

Ασκήσεις στις διακριτές κατανομές, Γεωμετρική, Αρνητική Διωνυμική, Υπεργεωμετρική και Poisson, τις διαδικασίες Poisson και τις στατιστικές Boltzmann, Bose-Einstein, Fermi-Dirac.

111. Ένα δοχείο περιέχει 10 κόκκινες και 20 λευκές σφαίρες και επιλέγουμε σφαίρες με επανατοποθέτηση.
- Ποια η πιθανότητα να επιλεγεί μία κόκκινη σφαίρα για πρώτη φορά στην τέταρτη επιλογή σφαίρας;
 - Ποια η πιθανότητα να επιλεγεί κόκκινη σφαίρα για πρώτη φορά πριν την τρίτη επιλογή;
 - Ποια η πιθανότητα να επιλεγεί κόκκινη σφαίρα για πρώτη φορά μετά την τέταρτη εκλογή σφαίρας;
 - Σε ποια επιλογή σφαίρας υπάρχει η μεγαλύτερη πιθανότητα να έχουμε επιλέξει μια κόκκινη σφαίρα;
 - Ποια η πιθανότητα να χρειαστούν τουλάχιστον 7 επιλογές σφαιρών ώστε να τραβήξουμε κόκκινη σφαίρα δεδομένου ότι ήδη χρειάστηκαν πάνω από 4 επιλογές;
112. Γίνεται ρίψη ενός ζαριού.
- Ποιος είναι ο αναμενόμενος αριθμός ρίψεων μέχρις ότου να έρθει 6 για δεύτερη φορά;
 - Ποια η πιθανότητα να έρθουν για πρώτη φορά 2 εξάρια στην τρίτη ρίψη;
 - Ποια η πιθανότητα να έρθουν τα 2 εξάρια μέχρι τις 4 πρώτες ρίψεις;
113. Μια εταιρία παράγει 850 προϊόντα εκ των οποίων 50 έχουν κάποιο ελάττωμα. Επιλέγονται 2 τεμάχια.
- Ποια η πιθανότητα τα 2 τεμάχια να μην είναι ελαττωματικά;
 - Ποια η πιθανότητα ένα εκ των 2 τεμαχίων να είναι ελαττωματικό;
 - Ποια η πιθανότητα να είναι και τα 2 τεμάχια ελαττωματικά;
 - Ποια η πιθανότητα να είναι ελαττωματικά περισσότερα από ένα τεμάχια;

114. Ένα κατάστημα αγοράζει εξαρτήματα από 2 εταιρίες, 100 από την Α εταιρία και 200 από την Β. Επιλέγονται 4 τεμάχια από τα 300.
- Ποια η πιθανότητα να είναι όλα τα τεμάχια από την εταιρία Α;
 - Ποια η πιθανότητα να είναι 2 ή περισσότερα τεμάχια από την εταιρία Α;
 - Ποια η πιθανότητα τουλάχιστον ένα τεμάχιο να είναι από την εταιρία Α;
 - Πόσα τεμάχια αναμένεται να είναι από την εταιρία Α σε ένα δείγμα 4 τεμαχίων;
115. Με αφετηρία τη συνάρτηση πιθανότητας της διωνυμικής κατανομής για πλήθος επαναλήψεων N πολύ μεγάλο και για πιθανότητα «επιτυχίας» p ανά δοκιμή πολύ μικρή, να αποδειχθεί η εξίσωση της συνάρτησης πιθανότητας της κατανομής Poisson.
116. Να αποδειχθούν οι εκφράσεις της μέσης τιμής και της διακύμανσης για την κατανομή Poisson.
117. Σε μια πόλη συμβαίνουν ατυχήματα με πιθανότητα 0.005 ανά ημέρα.
- Ποια η πιθανότητα να συμβεί ατύχημα σε περίοδο 400 ημερών;
 - Ποια η πιθανότητα να υπάρξουν το πολύ 3 ημέρες με ατυχήματα;
118. Ένα βιβλίο 300 σελίδων έχει 60 τυπογραφικά λάθη κατανεμημένα τυχαία.
- Ποια η πιθανότητα μια τυχαία σελίδα να περιέχει τουλάχιστον ένα τυπογραφικό λάθος;
 - Επιλέγουμε τυχαία 20 σελίδες.
Ποια η πιθανότητα να υπάρχει μεταξύ αυτών τουλάχιστον μία η οποία να περιέχει ένα τυπογραφικό λάθος τουλάχιστον;
 - Αρχίζουμε να ελέγχουμε από την αρχή μία-μία τις σελίδες μέχρις ότου βρούμε την πρώτη σελίδα με τουλάχιστον ένα λάθος.
Ποια η πιθανότητα η σελίδα αυτή να είναι η 57^η;

119. Κάποιος διαφημιστής στέλνει από ένα ηλεκτρονικό μήνυμα σε 10.000 λογαριασμούς ζητώντας προσωπικά στοιχεία. Είναι γνωστό ότι η πιθανότητα να απαντήσει κάποιος είναι 0.018%. Ποια η πιθανότητα να απαντήσουν τουλάχιστον 3;
120. Ο αριθμός προσέλευσης πελατών ανά ημέρα σε μια τράπεζα ακολουθεί κατανομή Poisson με μέση τιμή 1.5.
- Ποια είναι η τιμή της παραμέτρου λ ;
 - Ποια είναι η πιθανότητα να έλθουν 2 πελάτες μία τυχαία ημέρα;
 - Ποια είναι η πιθανότητα να έρθουν περισσότεροι από 2 πελάτες μια τυχαία ημέρα;
 - Ποια είναι η πιθανότητα να έρθουν περισσότεροι από 2 πελάτες μια τυχαία ημέρα δεδομένου ότι έχει ήδη έλθει τουλάχιστον ένας πελάτης;
121. Σε κάθε πτήση ενός αεροπλάνου 80 θέσεων έχει παρατηρηθεί ότι 4 επιβάτες κατά μέσο όρο δεν εμφανίζονται. Η εταιρεία κρατάει για τον λόγο αυτό λίστα αναμονής.
- Ποια είναι η πιθανότητα ο 2^{ος} στη λίστα να ταξιδέψει;
 - Ποια είναι η πιθανότητα ο 5^{ος} στη λίστα να ταξιδέψει;
 - Ποια είναι η πιθανότητα να εμφανιστούν όλοι;
122. Ένα αεροπλάνο Airbus 180 θέσεων εκτελεί κάποιο δρομολόγιο ενώ έχει παρατηρηθεί ότι το 5% των επιβατών κατά μέσο όρο δεν εμφανίζονται.
- Ποια κατανομή ακολουθεί ο αριθμός των επιβατών οι οποίοι δεν εμφανίζονται;
 - Ποιος είναι ο αναμενόμενος αριθμός επιβατών οι οποίοι δεν εμφανίζονται;
 - Ποια είναι η πιθανότητα να εμφανιστούν όλοι οι επιβάτες;
 - Ποια είναι η πιθανότητα να υπάρχουν 8 απόντες;
123. Από μια πηγή σωματιδίων α εκπέμπονται 4 σωματίδια το λεπτό.
- Ποια είναι η πιθανότητα να εκπεμφθούν 3 σωματίδια σε ένα λεπτό;
 - Ποια είναι η πιθανότητα να εκπεμφθούν 3 σωματίδια σε 2 λεπτά;
 - Ποια είναι η πιθανότητα να εκπεμφθούν τουλάχιστον 2 σωματίδια σε ένα λεπτό;
 - Ποια είναι η πιθανότητα να εκπεμφθούν το πολύ 2 σωματίδια σε ένα λεπτό;
 - Ποια είναι η πιθανότητα να εκπεμφθούν 2 σωματίδια σε μισό λεπτό;

124. Ο ρυθμός εμφάνισης μιας σπάνιας πάθησης σε ένα πληθυσμό είναι 2.3 επεισόδια τον χρόνο.
- Ποια είναι η πιθανότητα να έχει ο ίδιος άνθρωπος 5 επεισόδια σε 2 χρόνια;
 - Ποια είναι η πιθανότητα να έχει ένας άνθρωπος τουλάχιστον ένα επεισόδιο σε έναν χρόνο;
 - Ποιος είναι ο αναμενόμενος αριθμός επεισοδίων στον πληθυσμό σε 4 χρόνια;
125. Ένας ευθύγραμμος αγωγός έχει 2.3 ελαττώματα κάθε 1 χιλιοστό.
- Ποια η πιθανότητα να υπάρχουν 10 ελαττώματα σε 5 χιλιοστά;
 - Ποια η πιθανότητα να υπάρχει τουλάχιστον ένα ελάττωμα κάθε 2 χιλιοστά;
126. Σε μια πόλη είναι γνωστό ότι γίνονται 4.4 εισαγωγές ημερησίως λόγω μιας πάθησης.
- Ποια είναι η πιθανότητα να νοσηλευτούν 2 άτομα σε μία εβδομάδα;
 - Ποια είναι η πιθανότητα να νοσηλευθούν το πολύ 2 άτομα μέσα σε μία εβδομάδα;
 - Ποια είναι η πιθανότητα τουλάχιστον 3 άτομα να νοσηλευτούν σε διάστημα μιας εβδομάδας;
127. Μια μηχανή παράγει δεσμίδες των 5000 κερμάτων εκ των οποίων συνήθως 100 είναι ελαττωματικά. Ένας πελάτης επιλέγει ένα δείγμα 100 κερμάτων από μια δεσμίδα, τα εξετάζει ένα προς ένα και αν βρεθούν 4 ή λιγότερα κέρματα ελαττωματικά τότε η δεσμίδα γίνεται δεκτή. Σε διαφορετική περίπτωση ελέγχονται όλα ένα προς ένα τα κέρματα της δεσμίδας. Το κόστος ελέγχου 100 κερμάτων είναι 75 λεπτά του ευρώ. Ποιο είναι το αναμενόμενο κόστος για κάθε δεσμίδα;

128. Θεωρούμε ένα σύστημα n σωματιδίων και N ($N \geq n$) οι δυνατές καταστάσεις που μπορεί να βρεθεί κάθε σωματίδιο και οι οποίες αναπαρίστανται με N δοχεία. Έστω A_k το ενδεχόμενο να βρίσκονται k ($0 \leq k \leq n$) σωματίδια σε ένα δοχείο ανεξαρτήτως από το πως κατανέμονται τα άλλα σωματίδια στα υπόλοιπα δοχεία.

Ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου A_k αν:

- i. Τα σωματίδια είναι διακριτά (μόρια αερίου), δεν υπάρχει περιορισμός στον αριθμό των σωματιδίων ανά δοχείο και όλες οι κατανομές των σωματιδίων είναι ισοπίθανες (Boltzmann);
- ii. Τα σωματίδια είναι όμοια (μποζόνια π.χ. φωτόνια), δεν υπάρχει περιορισμός στον αριθμό των σωματιδίων ανά δοχείο και όλες οι κατανομές των σωματιδίων είναι ισοπίθανες (Bose-Einstein);
- iii. Τα σωματίδια είναι όμοια (φερμιόνια π.χ. ηλεκτρόνια), υπάρχει ο περιορισμός κάθε δοχείο να μπορεί να φιλοξενήσει κανένα ή ένα σωματίδιο (Απαγορευτική αρχή του Pauli) και όλες οι κατανομές των σωματιδίων είναι ισοπίθανες (Fermi-Dirac);

Βιβλιογραφία-Αναφορές

1. *S. Ross. Βασικές αρχές θεωρίας πιθανοτήτων. Εκδόσεις Κλειδάριθμος.*
2. *Γ. Κοντογιάννης, Σ. Τουμπής (2015) - Στοιχεία πιθανοτήτων.*
3. *Hoel, Port, Stone. Εισαγωγή στη θεωρία πιθανοτήτων. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.*
4. *Χ. Δαμιανού, Ν. Παπαδάτος, Χ. Χαραλαμπίδης - Εισαγωγή στις Πιθανότητες και τη Στατιστική.*
5. *Μπερτσέκα, Δ. και Τσιτσικλή, Γ. Εισαγωγή στις Πιθανότητες. Εκδόσεις Τζιόλα.*
6. *ΠΑΠΟΥΛΗΣ, PILLAI - ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ, ΤΥΧΑΙΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ ΚΑΙ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ.*
7. *Χ. Χαραλαμπίδης. Θεωρία Πιθανοτήτων και Εφαρμογές. Εκδόσεις Συμμετρία.*
8. *Schaum's Outline of Theory and Problems of Probability and Statistic.*
9. *Ο. Χρυσαφινού, Α. Μπουρνέτας, Ε. Βαγγελάτου – Σημειώσεις Πιθανοτήτων – Στατιστικής.*
10. *Κούτρα, Μ. Εισαγωγή στη Θεωρία Πιθανοτήτων και Εφαρμογές. Εκδόσεις Σταμούλης.*