

Ασκήσεις στην Συνδυαστική ανάλυση, την δεσμευμένη πιθανότητα και την ανεξαρτησία

61. Έστω μια ομάδα αποτελούμενη από 5 μαθηματικούς και 7 φυσικούς. Με πόσους τρόπους μπορεί να συσταθεί μια επιτροπή αποτελούμενη από 2 μαθηματικούς και 3 φυσικούς αν:
- δεν υπάρχει κάποιος περιορισμός
 - ένας συγκεκριμένος φυσικός πρέπει να συμπεριληφθεί
 - δύο συγκεκριμένοι μαθηματικοί δεν πρέπει να είναι στην επιτροπή
62. Σε ένα δοχείο υπάρχουν 20 αριθμημένες σφαίρες, 12 εκ των οποίων είναι άσπρες και οι 8 πράσινες. Εξάγονται 8 σφαίρες χωρίς επανατοποθέτηση.
- Με πόσους τρόπους μπορούν να εξαχθούν οι 8 αυτές σφαίρες;
 - Με πόσους τρόπους μπορούν να εξαχθούν 2 άσπρες και 6 πράσινες;
63. Επιλέγουμε 5 φύλλα από τα 52 μίας τράπουλας. Με πόσους τρόπους μπορεί κανείς να επιλέξει χωρίς επανατοποθέτηση:
- πέντε οποιαδήποτε φύλλα;
 - τέσσερις άσους και ένα οποιοδήποτε άλλο χαρτί;
 - τέσσερις άσους και ένα ρίγα;
 - τρία δεκάρια και δύο βαλέδες;
 - τα φύλλα 9, 10, βάλε, ντάμα και ρήγα;
 - τρία φύλλα από ένα είδος και δύο φύλλα από ένα άλλο είδος;
 - κανέναν άσσο;
 - τουλάχιστον έναν άσο;
 - ακριβώς τέσσερις άσους;
 - το πολύ τρεις άσους;
 - τέσσερα ίδια φύλλα π.χ. τέσσερις άσους ή τέσσερα 2αρια κ.ο.κ.;
 - τρία χαρτιά με τον ίδιο αριθμό μεταξύ τους και τα άλλα δυο ίδια μεταξύ τους;
64. Με πόσους τρόπους μπορούν να γίνουν συνεντεύξεις σε 3 από 20 υποψήφιους;

65. Έστω ερωτηματολόγιο 20 ερωτήσεων Σ-Λ.
- i. Με πόσους τρόπους μπορεί να απαντηθεί;
 - ii. Πόσοι τρόποι από αυτούς περιέχουν 7 σωστές και 13 λάθος απαντήσεις;
 - iii. Πόσοι τρόποι έχουν τουλάχιστον 17 σωστές απαντήσεις;
66. Ένας μαθητής μπορεί να επιλέξει ένα από τα 3 μαθήματα φυσικής, ένα από τα 2 μαθήματα μαθηματικών και ένα από τα 2 μαθήματα φιλοσοφίας. Πόσα πιθανά προγράμματα μπορεί να φτιάξει;
67. Με πόσους τρόπους μπορούμε να διαλέξουμε 5 άτομα από ένα σύνολο 8 ατόμων αν 2 από αυτά δεν θέλουν να είναι μαζί;
68. Με πόσους τρόπους μπορούμε να διατάξουμε 5 άτομα σε ένα πενταθέσιο ποδήλατο αν μόνο ένα από 2 συγκεκριμένα άτομα μπορεί να είναι ο οδηγός;
69. Με πόσους τρόπους μπορούμε να φτιάξουμε μια τριμελή επιτροπή επιλέγοντας 10 άτομα αν:
- i. τα 3 μέλη έχουν ίδιους ρόλους;
 - ii. ένας θα είναι ο πρόεδρος, ένας ο αντιπρόεδρος και ένας ο ταμίας;
70. Από μια ομάδα 8 γυναικών και 6 ανδρών πόσες εξαμελείς επιτροπές είναι δυνατόν να σχηματιστούν αποτελούμενες από 3 άνδρες και 3 γυναίκες αν:
- i. 2 συγκεκριμένοι άνδρες δεν θέλουν να είναι μαζί;
 - ii. 2 συγκεκριμένες γυναίκες δεν θέλουν να είναι μαζί;
 - iii. ένας συγκεκριμένος άνδρας και μια συγκεκριμένη γυναίκα δεν θέλουν να είναι μαζί;
71. Μια παρτίδα 10 υπολογιστών περιλαμβάνει 3 ελαττωματικούς. Με πόσους τρόπους μπορούν να επιλεγούν 4 υπολογιστές από τους οποίους τουλάχιστον 2 να είναι ελαττωματικοί;
72. Ένα ράφι περιέχει 9 βιβλία εκ των οποίων 5 είναι μαθηματικών, 3 είναι φυσικής και ένα είναι χημείας. Με πόσους τρόπους μπορούν να επιλεγούν:
- i. 3 βιβλία;
 - ii. 3 βιβλία εκ των οποίων το ένα να είναι το βιβλίο της χημείας;
 - iii. 3 βιβλία εκ των οποίων τα 2 να είναι μαθηματικών και το ένα φυσικής;

73. Μία παρτίδα συσκευών περιέχει 3 συσκευές τύπου Α, 4 συσκευές τύπου Β, 5 συσκευές τύπου Γ και 6 συσκευές τύπου Δ. Πόσοι τρόποι υπάρχουν συνολικά ώστε να επιλέξω 3 συσκευές; Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε τις 3 συσκευές ώστε:
- όλες να είναι τύπου Γ;
 - η μία συσκευή να είναι τύπου Β, η άλλη συσκευή να είναι τύπου Γ και η τρίτη συσκευή να είναι τύπου Δ;
 - τουλάχιστον δυο συσκευές να είναι τύπου Β και καμία συσκευή τύπου Α και τύπου Δ;
74. Έστω ότι θέλουμε να επιλέξουμε τρία από τα ψηφία 1, 2, 3 ή 4. Με πόσους τρόπους μπορούμε να τα επιλέξουμε εάν:
- μας ενδιαφέρει η σειρά τους;
 - δε μας ενδιαφέρει η σειρά τους;
 - δε μας ενδιαφέρει η σειρά τους και τα ψηφία μπορούν να επαναλαμβάνονται;
75. Πόσοι τρόποι υπάρχουν να μοιράσουν 3 παιδιά 5 παγωτά;
76. Με πόσους τρόπους μπορούμε να βάλουμε 13 όμοιες σφαίρες σε 3 δοχεία:
- εάν επιτρέπεται να έχουμε και άδεια δοχεία;
 - εάν πρέπει να έχουμε τουλάχιστον μία σφαίρα ανά δοχείο;
77. Ένα κουτί περιέχει 6000 επεξεργαστές από τους οποίους 2000 κατασκευάζονται από την εταιρία Α και οι υπόλοιποι από την εταιρία Β. Τα ποσοστά ελαττωματικών επεξεργαστών των εταιριών Α και Β είναι 10% και 5% αντιστοίχως. Επιλέγεται ένας επεξεργαστής και διαπιστώνεται ότι είναι ελαττωματικός. Ποια η πιθανότητα να προέρχεται από την εταιρία Α;
78. Ένα νόμισμα ρίχνεται 2 φορές. Έστω τα ενδεχόμενα:
- $$A = \{\text{η ένδειξη } K \text{ εμφανίζεται τουλάχιστον μία φορά}\}$$
- $$B = \{\text{στην πρώτη ρίψη εμφανίζονται γράμματα}\}$$
- $$\Delta = \{\text{σε κάθε ρίψη εμφανίζεται διαφορετική ένδειξη}\}$$
- Να υπολογιστούν οι: i) $P(A|B)$, ii) $P(B|A)$, iii) $P(\Delta|A)$, iv) $P(\Delta|B)$
79. Ποια η πιθανότητα σε μια οικογένεια με 2 παιδιά να είναι και τα 2 κορίτσια δεδομένου ότι τουλάχιστον ένα είναι κορίτσι; Ποια η πιθανότητα να είναι και τα 2 κορίτσια δεδομένου ότι το πρώτο το λένε Φωτεινή;
80. Ρίχνουμε ένα νόμισμα 3 φορές. Ποια η πιθανότητα να έρθουν περισσότερες Κορώνες (Κ) από Γράμματα (Γ) δεδομένου ότι στην πρώτη ρίψη ήρθε κορώνα;

81. Ένα αεροπλάνο πετάει σε μια περιοχή με πιθανότητα 0.05. Ένα ραντάρ εντοπίζει το αεροπλάνο με πιθανό 0.99. Αν δεν υπάρχει αεροπλάνο η πιθανότητα το ραντάρ να δώσει λανθασμένη ένδειξη εντοπισμού είναι 0.1. Ποια η πιθανότητα εσφαλμένου εντοπισμού και ποια η πιθανότητα να μην εντοπιστεί το αεροπλάνο παρόλο που πετάει στην περιοχή;
82. Τραβάμε 3 φύλλα από μία τράπουλα χωρίς επανατοποθέτηση. Ποια η πιθανότητα:
- να μην είναι κανένα από αυτά τα 3 φύλλα κούπες (♥);
 - το 1^ο φύλλο να μην είναι κούπα και να είναι το 2^ο;
 - το 1^ο και το 2^ο φύλλο να μην είναι κούπα και να είναι το 3^ο;
83. Μια τάξη αποτελείται από 4 φυσικούς και 12 μαθηματικούς οι οποίοι μοιράζονται σε 4 ομάδες των 4 μελών η κάθε μία. Ποια η πιθανότητα η κάθε ομάδα να περιέχει έναν φυσικό;
84. Ένα δοχείο περιέχει 6 κόκκινες, 4 λευκές και 5 μπλε σφαίρες. Επιλέγουμε διαδοχικά 3 σφαίρες. Ποια η πιθανότητα να τραβήξουμε με τη σειρά μία κόκκινη, κατόπιν μία λευκή και τέλος μια μπλε αν επιτρέπεται η επανατοποθέτηση και αν όχι;
85. Ποια η πιθανότητα εάν ρίξουμε 10 ζάρια να υπάρχουν ακριβώς 4 άσοι δεδομένου ότι υπάρχουν 4 εξάρια;
86. Πραγματοποιείται ρίψη 2 ζαριών. Έστω τα παρακάτω ενδεχόμενα:
- $A = \{ \text{η πρώτη ένδειξη να είναι } 1 \text{ ή } 2 \text{ ή } 3 \}$
 - $B = \{ \text{η πρώτη ένδειξη να είναι } 3 \text{ ή } 4 \text{ ή } 5 \}$
 - $\Gamma = \{ \text{το άθροισμα των 2 ενδείξεων να είναι } 9 \}$
 - $\Delta = \{ \text{η δεύτερη ένδειξη να είναι } 4 \text{ ή } 5 \text{ ή } 6 \}$
 - $E = \{ \text{το άθροισμα των 2 ενδείξεων να είναι } 7 \}$
 - Να εξεταστεί εάν είναι ανεξάρτητα τα ενδεχόμενα i) A, B, Γ και ii) A, Δ, E.
87. Μια εταιρία απασχολεί 40 φυσικούς και 30 μαθηματικούς με την εξής κατανομή:

	Φυσικοί	Μαθηματικοί
Τεχνικοί	22	25
Προγραμματιστές	18	5

Έστω T το ενδεχόμενο να επιλεγεί ένας τεχνικός και Φ το ενδεχόμενο να επιλεγεί ένας φυσικός. i) Είναι τα ενδεχόμενα T και Φ ανεξάρτητα; ii) Ποια είναι η πιθανότητα να επιλέξουμε έναν τεχνικό δεδομένου ότι επιλέξαμε ήδη φυσικό;

88. Το Δοχείο 1 (Δ_1) περιέχει 3 κόκκινες και 2 μπλε σφαίρες ενώ το Δοχείο 2 (Δ_2) περιέχει 2 κόκκινες και 8 μπλε σφαίρες. Ρίχνουμε ένα κέρμα. Αν έρθουν Γράμματα (Γ) διαλέγουμε μια σφαίρα από το πρώτο δοχείο αλλιώς διαλέγουμε μια σφαίρα από το δεύτερο δοχείο. Ποια η πιθανότητα να διαλέξουμε μια κόκκινη σφαίρα δεδομένου ότι επιλέξαμε την σφαίρα από το δοχείο Δ_1 , ποια η πιθανότητα να διαλέξουμε μια κόκκινη σφαίρα δεδομένου ότι επιλέξαμε την σφαίρα από το δοχείο Δ_2 και τέλος ποια η πιθανότητα να διαλέξουμε μια κόκκινη σφαίρα;
89. Σε ένα τουρνουά σκάκι κάποιος συγκεκριμένος συμμετέχων έχει να αντιμετωπίσει 3 ειδών αντιπάλους: 50% τύπου 1 με πιθανότητα νίκης 0.3, 25% τύπου 2 με πιθανότητα νίκης 0.2 και 25% τύπου 3 με πιθανότητα νίκης 0.5. Ποια η πιθανότητα να νικήσει απέναντι σε έναν τυχαία επιλεγμένο αντίπαλο;
90. Ρίχνουμε ένα ζάρι 4 πλευρών μια φορά και αν το αποτέλεσμα είναι 1 ή 2 ρίχνουμε και μια δεύτερη φορά το ζάρι αλλιώς σταματάμε. Ποια η πιθανότητα το άθροισμα να είναι τουλάχιστον 4;
91. Πρόβλημα Monty Hall: Υποθέτουμε ότι σε ένα τηλεπαιχνίδι υπάρχουν 3 πόρτες. Πίσω από τις 2 πόρτες δεν υπάρχει τίποτα ενώ πίσω από την τρίτη υπάρχει ένα δώρο. Ο διαγωνιζόμενος διαλέγει τυχαία μια πόρτα και πρόκειται να κερδίσει ότι βρίσκεται πίσω από αυτήν. Πριν όμως ανοίξει την πόρτα ο παρουσιαστής, ο οποίος γνωρίζει τι βρίσκεται πίσω από κάθε πόρτα, ανοίγει μία από τις άλλες 2 πόρτες αποκαλύπτοντας ότι δεν υπάρχει πίσω από αυτήν κάτι και ρωτάει τον διαγωνιζόμενο εάν επιθυμεί να αλλάξει την πόρτα την οποία διάλεξε αρχικά με την άλλη πόρτα που δεν είχε διαλέξει. Συμφέρει τον διαγωνιζόμενο να αλλάξει ή όχι την αρχική του επιλογή;
92. Μία εταιρία παράγει 3 ειδών επεξεργαστές A, B και Γ σε ποσοστά 50%, 40% και 10% και γνωρίζει ότι οι επεξεργαστές της παρουσιάζουν βλάβη σε ποσοστά 6%, 10% και 15% αντιστοίχως. Αγοράζει κάποιος έναν επεξεργαστή. Ποια η πιθανότητα να είναι ελαττωματικός; Δεδομένου ότι ο επεξεργαστής είναι ελαττωματικός, ποια η πιθανότητα να είναι της εταιρείας B;

Βιβλιογραφία-Αναφορές

1. *S. Ross. Βασικές αρχές θεωρίας πιθανοτήτων. Εκδόσεις Κλειδάριθμος.*
2. *Γ. Κοντογιάννης, Σ. Τουμπής (2015) - Στοιχεία πιθανοτήτων.*
3. *Hoel, Port, Stone. Εισαγωγή στη θεωρία πιθανοτήτων. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.*
4. *Χ. Δαμιανού, Ν. Παπαδάτος, Χ. Χαραλαμπίδης - Εισαγωγή στις Πιθανότητες και τη Στατιστική.*
5. *Μπερτσεκά, Δ. και Τσιτσικλή, Γ. Εισαγωγή στις Πιθανότητες. Εκδόσεις Τζιόλα.*
6. *ΠΑΠΟΥΛΗΣ, PILLAI - ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ, ΤΥΧΑΙΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ ΚΑΙ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ.*
7. *Χ. Χαραλαμπίδης. Θεωρία Πιθανοτήτων και Εφαρμογές. Εκδόσεις Συμμετρία.*
8. *Schaum's Outline of Theory and Problems of Probability and Statistic.*
9. *Ο. Χρυσαφινού, Α. Μπουρνέτας, Ε. Βαγγελάτου – Σημειώσεις Πιθανοτήτων – Στατιστικής.*
10. *Κούτρα, Μ. Εισαγωγή στη Θεωρία Πιθανοτήτων και Εφαρμογές. Εκδόσεις Σταμούλης.*