

Ασκήσεις στην Θεωρία Συνόλων, την Αξιοματική Θεμελίωση και τη Συνδυαστική ανάλυση

- 1) Να βρεθεί ο πληθικός αριθμός των συνόλων  $\Delta = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}$  και  $E = \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}\}$ .
- 2) Να βρεθεί ο πληθικός αριθμός του κενού συνόλου. Ισχύει η ισότητα  $\emptyset = \{\emptyset\}$  ;
- 3) Ποια είναι τα καρτεσιανά γινόμενα  $A \times B, B \times A, A \times A$  όπου  $A = \{1, 2\}, B = \{3, 4\}$
- 4) Ποιο είναι το καρτεσιανό γινόμενο του συνόλου  $A = \{1, 2, \dots, 6\}$  με τον εαυτό του;  
Να βρεθεί ο πληθικός αριθμός του συνόλου.
- 5) Να υπολογιστεί η καρτεσιανή δύναμη  $A^6$  και ο πληθικός αριθμός του συνόλου  $A = \{K, \Gamma\}$ .
- 6) Με τη βοήθεια δένδρογράμματος να βρεθούν τα υποσύνολα του  $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ .
- 7) Αν  $A = \{1, 2, 3\}$ , να βρεθεί το δυναμοσύνολο και η πληθικότητά του.
- 8) Να βρεθεί το δυναμοσύνολο των συνόλων  $\{1\}, \emptyset$  και  $\{\alpha, \{\alpha, \beta\}\}$ .
- 9) Αν  $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}, B = \{\beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta\}$  και  $\Gamma = \{1, 2, 3\}$  να υπολογιστούν τα παρακάτω:  
 $A \cup B, A \cap B, A - B, B - A, A \cap \Gamma, (A - B) \cup (B - A), A - \Gamma, (A \cap B) \times A, A \cap \emptyset$  .
- 10) Αν  $A = \{4, 3, 6, 7, 1, 9\}, B = \{5, 6, 8, 4\}$  και έστω  $U = \{0, 1, \dots, 10\}$ , να βρεθούν τα:  
 $A', B', (A')', A \cap A', A \cup A', U', A - A', A - B', \emptyset', A' \cap B, B - A, A \cap B', A - B$  .
- 11) Να δειχθεί ότι  $A = (A \cap B) \cup (A \cap B')$  με διάγραμμα Venn.
- 12) Ποιες είναι οι διαμερίσεις του  $A = \{1, 2, 3\}$ ;
- 13) Έστω  $A, B, \Gamma, U$  . Να βρεθούν οι σχέσεις που εκφράζουν τα παρακάτω.
  - i. Πραγματοποιούνται και τα τρία
  - ii. Δεν πραγματοποιείται κανένα
  - iii. Πραγματοποιείται το πολύ ένα
  - iv. Πραγματοποιείται ακριβώς ένα
  - v. Πραγματοποιείται τουλάχιστον ένα
  - vi. Πραγματοποιείται μόνο το B
  - vii. Πραγματοποιείται μόνο τα A και Γ
  - viii. Πραγματοποιούνται τουλάχιστον δύο
  - ix. Πραγματοποιούνται το πολύ δύο
  - x. Πραγματοποιούνται ακριβώς δύο
- 14) Ένα πείραμα αποτελείται από την ρίψη ενώ ζαριού και κατόπιν ενός κέρματος, 2 φορές εφόσον η ένδειξη του ζαριού είναι περιττός αριθμός και μια φορά αν το ζάρι δείξει άρτιο.  
Ποιος είναι ο δειγματικός χώρος  $\Omega$ ;

15) Γίνεται ρίψη ενός νομίσματος 2 φορές. Να βρεθεί ο δειγματικός χώρος καθώς και τα παρακάτω ενδεχόμενα. (Κ: Κεφάλι, Γ: Γράμματα)

A = «ακριβώς μία φορά Κ»

B = «τουλάχιστον μία φορά Κ»

H = «δεν εμφανίζονται Γράμματα»

Δ = «εμφανίζονται 2 Κ ή το πολύ μία φορά εμφανίζεται Κ»

E = «εμφανίζεται το Β ή το Η ενδεχόμενο»

Z = «αν συμβαίνει το ενδεχόμενο Β τότε δεν συμβαίνει το ενδεχόμενο Η»

16) Επιλέγουμε ένα χαρτί από μια τράπουλα. Να σχεδιαστεί ο δειγματικός χώρος Ω.

Να βρεθεί ο δειγματικός χώρος εάν δεν λάβουμε υπόψιν τις φιγούρες. Πληρούνται οι προϋποθέσεις για να είναι ο Ω δειγματικός χώρος;

Για το δειγματικό χώρο Ω θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

A = «Ενδεχόμενο να επιλέξουμε ρήγα»

B = «Ενδεχόμενο να επιλέξουμε καρό»

Να διατυπωθούν με λόγια τα παρακάτω ενδεχόμενα:

- i.  $A \cup B$
- ii.  $A \cap B$
- iii.  $A \cup B'$
- iv.  $A' \cup B'$
- v.  $A - B$
- vi.  $A' - B'$
- vii.  $(A \cap B) \cup (A \cap B')$

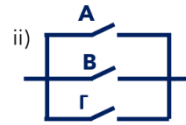
Να σχεδιαστούν βάσει του δειγματικού χώρου Ω τα  $A \cup B$  και  $A' \cap B'$

17) Γίνεται ρίψη ενός ζαριού. Ποια η πιθανότητα να έρθει: 3, 7, περιττός, πάνω από 3, τουλάχιστον 2, το πολύ 2, άρτιος και μικρότερος του 5.

18) Έστω για ένα δεδομένο δειγματικό χώρο  $\Omega$  τρία ενδεχόμενα  $A, B, \Gamma$  με δεδομένες πιθανότητες. Να υπολογισθούν οι πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων.

- i. να μην συμβεί το  $\Gamma$
- ii. να συμβεί το  $A$  και το  $B$  (υποθέτουμε ότι  $A \cap B \neq \emptyset$ )
- iii. να συμβεί το  $A$  αλλά όχι το  $B$
- iv. να συμβεί μόνο το  $A$  ή μόνο το  $B$
- v. να συμβεί το  $B$  ή το  $\Gamma$
- vi. να συμβεί τουλάχιστον ένα από τα  $A, B, \Gamma$
- vii. να μην συμβεί κανένα από τα  $A, B, \Gamma$
- viii. να συμβεί το  $\Gamma$  αλλά όχι τα  $A, B$
- ix. να μην συμβεί ούτε το  $A$  και ούτε το  $B$  ή να συμβεί το  $\Gamma$

19) Αν  $P(A) = \alpha, P(B) = \beta, P(\Gamma) = \gamma$  η πιθανότητα να λειτουργεί ο κάθε διακόπτης ανεξάρτητα, να βρεθεί πιθανότητα να διαρρέονται από ρεύμα οι παρακάτω διατάξεις:



20) Ένα νόμισμα ρίχνεται 2 φορές. Να βρεθούν τα παρακάτω ενδεχόμενα και η πιθανότητα εμφάνισής τους (K: Κεφάλι, Γ: Γράμματα):

$A = \text{«Ακριβώς μία φορά »}$

$B = \text{«Τουλάχιστον μία φορά K»}$

$H = \text{«Δεν εμφανίζεται Γ»}$

$\Delta = \text{«Εμφανίζονται δύο K ή το πολύ μία φορά K»}$

$E = \text{«Εμφανίζεται το ενδεχόμενο B ή το H»}$

$Z = \text{«Αν συμβαίνει το ενδεχόμενο B τότε δε συμβαίνει το ενδεχόμενο H»}$

21) Σε ένα εργαστήριο λειτουργούν 3 δίκτυα υπολογιστών από τα οποία τις τελευταίες 200 μέρες:

30% των ημερών τουλάχιστον ένα δεν λειτουργεί

10% των ημερών ακριβώς 2 δεν λειτουργούν

5% των ημερών δεν λειτουργεί κανένα

Ποια η πιθανότητα να λειτουργούν 2 δίκτυα υπολογιστών;

22) Νόμισμα διαμέτρου  $d$  ( $d=2r$ ) ρίχνεται σε ορθογώνιο δάπεδο το οποίο αποτελείται από  $N$  ορθογώνια παραλληλόγραμμα πλακάκια εμβαδού  $\alpha\beta$ , με  $\alpha \leq \beta$  και  $d < \alpha$ . Ποια η πιθανότητα το νόμισμα να είναι ολόκληρο εντός ενός πλακιδίου και να μην κόβει τους αρμούς;

23) Η πρόγνωση καιρού δίνει τις εξής πιθανότητες:

60% θα βρέξει σήμερα (ενδεχόμενο A)

50% θα βρέξει αύριο (ενδεχόμενο B)

30% δεν θα βρέξει καμία μέρα από τις δύο

Να βρεθεί:

- i. η πιθανότητα να βρέξει σήμερα ή αύριο
- ii. η πιθανότητα να βρέξει σήμερα και αύριο
- iii. η πιθανότητα να βρέξει σήμερα, όχι όμως αύριο
- iv. η πιθανότητα να βρέξει μόνο μια από τις δυο μέρες

24) Σε ένα πανεπιστήμιο από τους 120 φοιτητές οι 60 μαθαίνουν αγγλικά, οι 50 μαθαίνουν γαλλικά και 20 φοιτητές μαθαίνουν γαλλικά και αγγλικά.

Ποια η πιθανότητα ένας φοιτητής να:

- i. γνωρίζει αγγλικά ή γαλλικά
- ii. δεν γνωρίζει ούτε αγγλικά ούτε γαλλικά
- iii. γνωρίζει μόνο μία από τις 2 γλώσσες

Να γίνουν τα αντίστοιχα διαγράμματα Venn.

25) Έχουμε 4 λογοτεχνικά και 3 επιστημονικά βιβλία. Με πόσους τρόπους μπορώ να διαλέξω ένα βιβλίο; Με πόσους τρόπους μπορώ να διαλέξω ένα λογοτεχνικό και ένα επιστημονικό βιβλίο; Να σχεδιαστούν τα αντίστοιχα δενδρογράμματα.

26) Ένα πρόγραμμα σπουδών διαθέτει 3 μαθήματα μαθηματικών, 4 μαθήματα φυσικής, 5 μαθήματα φιλοσοφίας, 2 μαθήματα ιστορίας και 4 μαθήματα χημείας. Με πόσους τρόπους μπορώ να διαλέξω 5 μαθήματα, ένα από κάθε γνωστικό πεδίο;

Να σχεδιαστεί το αντίστοιχο δενδρόγραμμα.

- 27) Για να πάμε από την Αθήνα στην Κρήτη έχουμε 3 δυνατούς τρόπους ενώ για να πάμε από την Αθήνα στη Ρόδο 2 τρόπους. Από την Κρήτη υπάρχουν 2 τρόποι για να πάμε στο Κάσο ενώ από τη Ρόδο μπορούμε να πάμε στην Κάσο με 4 τρόπους.
- Πόσοι τρόποι υπάρχουν να πάμε από την Αθήνα στην Κρήτη ή στη Ρόδο;
  - Πόσοι τρόποι υπάρχουν να πάμε από την Αθήνα στην Κάσο μέσω Κρήτης;
  - Πόσοι τρόποι υπάρχουν να πάμε από την Αθήνα στην Κάσο είτε μέσω Κρήτης είτε μέσω Ρόδου;
- 28) Με πόσους τρόπους μπορούμε να φτιάξουμε μια πινακίδα οχήματος με 5 χαρακτήρες ως εξής: ο πρώτος να είναι σύμφωνο, ο δεύτερος να είναι φωνήεν, ο τρίτος και ο τέταρτος να είναι ένα ψηφίο από 0 έως 9 και ο πέμπτος ένα ψηφίο από 1 έως 9.
- 29) Γίνεται μία τηλεμαχία με συμμετοχή ενός εκπροσώπου από κάθε κόμμα. Το ένα κόμμα έχει 2 υποψηφίους (Α, Β) και το δεύτερο κόμμα 3 υποψηφίους (Γ, Δ, Ε). Πόσα αντίπαλα ζευγάρια μπορούν να γίνουν;
- 30) Πόσοι πενταψήφιοι κωδικοί μπορούν να σχηματιστούν αποτελούμενοι από 3 κεφαλαία γράμματα και 2 ψηφία; Πόσοι κωδικοί υπάρχουν αν δεν επιτρέπονται ίδια γράμματα ή ψηφία;
- 31) Πόσοι εξαψήφιοι φυσικοί αριθμοί μπορούν να κατασκευαστούν (όχι 0 στην αρχή) αν:
- Τα ψηφία μπορούν να επαναλαμβάνονται
  - Τα ψηφία δεν μπορούν να επαναλαμβάνονται
  - Ο αριθμός να είναι άρτιος και τα ψηφία μπορούν να επαναλαμβάνονται
  - Ο αριθμός να είναι άρτιος και τα ψηφία δεν μπορούν να επαναλαμβάνονται
- 32) Πόσοι δυαδικοί αριθμοί με 7 ψηφία έχουν πρώτο ψηφίο το 1 ή τελειώνουν σε 3 μηδενικά (αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού);
- 33) Πόσοι τρόποι υπάρχουν να διατάξουμε τα γράμματα α, β, γ;
- 34) Πόσοι διαφορετικοί κωδικοί μπορούν να σχηματιστούν αν τα 3 πρώτα ψηφία μπορούν να είναι τα 1, 2, 3, τα δύο επόμενα οι χαρακτήρες +, - και τα τέσσερα τελευταία τα γράμματα φ, χ, ψ, ω;
- 35) Έχουμε μια τράπουλα με 52 φύλλα. Πόσες διατάξεις υπάρχουν για όλα τα φύλλα της τράπουλας; Επιλέγουμε 5 φύλλα και τα διατάσσουμε σε ένα τραπέζι. Πόσες είναι οι δυνατές διατάξεις;
- 36) Με πόσους τρόπους μπορούμε να διατάξουμε 5 σφαίρες διαφορετικών χρωμάτων;

- 37) Με πόσους τρόπους μπορούν να κάτσουν σε σειρά σε έναν καναπέ 4 άνθρωποι από ένα πλήθος 10 ανθρώπων;
- 38) Με πόσους τρόπους μπορούν να διαταχθούν 5 άνδρες και 4 γυναίκες στη σειρά δεδομένου ότι οι γυναίκες καταλαμβάνουν τις άρτιες θέσεις;
- 39) Με πόσους τρόπους μπορούν να διαταχθούν 6 διαφορετικά βιβλία μαθηματικών, 4 φυσικής και 5 χημείας αν:
- πρέπει να είναι μαζί ανά είδος;
  - πρέπει μόνο τα βιβλία των μαθηματικών να είναι μαζί;
- 40) Με πόσους τρόπους μπορούν να διαταχθούν 5 διαφορετικά βιβλία αν:
- δεν υπάρχουν περιορισμοί;
  - 2 από αυτά πρέπει να είναι μαζί;
  - 2 από αυτά δεν πρέπει να είναι μαζί;
- 41) Με πόσους τρόπους μπορούν να διαταχθούν 7 βιβλία:
- χωρίς περιορισμούς;
  - αν 3 συγκεκριμένα βιβλία πρέπει να είναι μαζί;
  - αν 2 συγκεκριμένα βιβλία πρέπει να είναι στο τέλος και την αρχή;
- 42) Ένας άνθρωπος μπορεί να διαλέξει μεταξύ 10 αντικειμένων.
- Με πόσους τρόπους μπορεί να τα διατάξει/επιλέξει;
  - Έστω ότι τα αντικείμενα χωρίζονται σε 2 ομάδες των 4 και των 6. Ο άνθρωπος αρχικά επιλέγει τυχαία ένα αντικείμενο και αφού διατάξει και τα υπόλοιπα της ομάδας στην οποία ανήκει το επιλεγθέν, κατόπιν διατάσσει και τα αντικείμενα της άλλης ομάδας. Πόσες διατάξεις υπάρχουν;
- 43) Από μια ομάδα 24 ανθρώπων επιλέγονται ένας για πρόεδρος, ένας για αντιπρόεδρος, ένας για γραμματέας και ένα μέλος. Με πόσους τρόπους μπορούν να διαταχθούν/σχηματίσουν τετραμελή επιτροπή;
- 44) Σε έναν ανελκυστήρα δεκαώροφου κτιρίου υπάρχουν 10 άτομα στο ισόγειο. Πόσοι τρόποι υπάρχουν ώστε να κατέβουν ο καθένας σε διαφορετικό όροφο; Αν τα άτομα είναι 6 πόσοι διαφορετικοί τρόποι υπάρχουν;
- 45) Πόσοι τετραψήφιοι αριθμοί PIN μπορούν να φτιαχτούν αν επιτρέπεται η επανάληψη ψηφίων και πόσοι αν όχι;
- 46) Ρίχνουμε ένα νόμισμα 5 φορές. Πόσα είναι τα δυνατά αποτελέσματα;
- 47) Πόσοι δυαδικοί οκταψήφιοι αριθμοί μπορούν να σχηματιστούν;



60) Με πόσους τρόπους μπορούν να μοιραστούν 10 αντικείμενα σε 2 ομάδες, 4 στη μία και 6 στην άλλη χωρίς να μας ενδιαφέρει η σειρά;

Βιβλιογραφία-Αναφορές

1. *S. Ross. Βασικές αρχές θεωρίας πιθανοτήτων. Εκδόσεις Κλειδάριθμος.*
2. *Γ. Κοντογιάννης, Σ. Τουμπής (2015) - Στοιχεία πιθανοτήτων.*
3. *Hoel, Port, Stone. Εισαγωγή στη θεωρία πιθανοτήτων. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.*
4. *Χ. Δαμιανού, Ν. Παπαδάτος, Χ. Χαραλαμπίδης - Εισαγωγή στις Πιθανότητες και τη Στατιστική.*
5. *Μπερτσεκά, Δ. και Τσιτσικλή, Γ. Εισαγωγή στις Πιθανότητες. Εκδόσεις Τζιόλα.*
6. *ΠΑΠΟΥΛΗΣ, PILLAI - ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ, ΤΥΧΑΙΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ ΚΑΙ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ.*
7. *Χ. Χαραλαμπίδης. Θεωρία Πιθανοτήτων και Εφαρμογές. Εκδόσεις Συμμετρία.*
8. *Schaum's Outline of Theory and Problems of Probability and Statistic.*
9. *Ο. Χρυσάφινου, Α. Μπουρνέτας, Ε. Βαγγελάτου – Σημειώσεις Πιθανοτήτων – Στατιστικής.*
10. *Κούτρα, Μ. Εισαγωγή στη Θεωρία Πιθανοτήτων και Εφαρμογές. Εκδόσεις Σταμούλης.*