Τυχαίες Μεταβλητές

- **Ορισμός:** Τυχαία μεταβλητή είναι μία πραγματική συνάρτηση που αποδίδει έναν πραγματικό αριθμό σε κάθε ενδεχόμενο του δειγματικού χώρου.
  - **Διακριτές:** Το σύνολο τιμών είναι πεπερασμένο ή αριθμήσιμο.
  - **Συνεχείς:** Το σύνολο τιμών είναι άπειρο.

Βασικές Συναρτήσεις

1. **Συνάρτηση πιθανότητας $p_X(x)$:**

$$p_X(x) = P(X = x)$$

   - Απαραίτητες ιδιότητες: $\sum p_X(x_i) = 1$.

2. **Αθροιστική συνάρτηση κατανομής $F_X(x)$:**

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

   - Ιδιότητες:
     - Συνεχής από δεξιά.
     - $\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$.
     - $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$.

Μέτρα Κεντρικής Τάσης και Διασποράς

- **Μέση Τιμή $E[X]$:**

$$\mu = E[X] = \sum x_i \cdot P(X = x_i)$$

- **Διακύμανση $\mathrm{Var}[X]$:**

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}[X] = E[(X - \mu)^2] = E[X^2] - (E[X])^2$$

- **Τυπική Απόκλιση:**

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}[X]}$$

Διακριτές Κατανομές

Δοκιμή Bernoulli

- **Ορισμός:** Μια δοκιμή με δύο δυνατά αποτελέσματα: "επιτυχία" (πιθανότητα p) και "αποτυχία" (πιθανότητα $1 - p$).
- **Πιθανότητα Επιτυχίας:** $P(X = 1) = p$.
- **Πιθανότητα Αποτυχίας:** $P(X = 0) = 1 - p$.
- **Μέση Τιμή:** $\mu = p$.
- **Διασπορά:** $\sigma^2 = p(1 - p)$.

Διωνυμική Κατανομή

- **Ορισμός:** Πιθανότητα x επιτυχιών σε N ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p:

$$P(X = x) = \binom{N}{x} p^x (1 - p)^{N-x}$$

- **Μέση Τιμή:** $\mu = Np$.
- **Διασπορά:** $\sigma^2 = Np(1 - p)$.

Γεωμετρική Κατανομή

- **Ορισμός:** Πιθανότητα πρώτης επιτυχίας στην x-οστή δοκιμή:

$$P(X = x) = (1-p)^{x-1}p$$

- **Μέση Τιμή:** $\mu = \frac{1}{p}$.
- **Διασπορά:** $\sigma^2 = \frac{1-p}{p^2}$.

Κατανομή Poisson

- **Ορισμός:** Πιθανότητα x γεγονότων σε σταθερό διάστημα:

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

- **Μέση Τιμή:** $\mu = \lambda$.
- **Διασπορά:** $\sigma^2 = \lambda$.

Υπεργεωμετρική Κατανομή

- **Ορισμός:** Πιθανότητα k επιτυχιών σε δείγμα n από πληθυσμό M:

$$P(X = k) = \frac{\binom{M_1}{k}\binom{M_2}{n-k}}{\binom{M}{n}}$$

  - M_1: αριθμός επιτυχιών στον πληθυσμό.
  - $M_2 = M - M_1$: αριθμός αποτυχιών στον πληθυσμό.
  - M: συνολικός πληθυσμός.
  - n: μέγεθος του δείγματος.
- **Μέση Τιμή:** $\mu = n \cdot \frac{M_1}{M}$.
- **Διασπορά:**

$$\sigma^2 = n \cdot \frac{M_1}{M} \cdot \frac{M_2}{M} \cdot \frac{M-n}{M-1}$$

Διαδικασία Poisson

- **Περιγραφή:** Η διαδικασία Poisson περιγράφει την εμφάνιση τυχαίων γεγονότων σε σταθερά χρονικά διαστήματα ή περιοχές, με σταθερό μέσο ρυθμό λ γεγονότων ανά μονάδα χρόνου/χώρου.
- **Ιδιότητες:**
  1. Τα γεγονότα είναι ανεξάρτητα.
  2. Ο αριθμός γεγονότων σε ένα διάστημα ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda \cdot t$, όπου t το μέγεθος του διαστήματος.
  3. Η πιθανότητα k γεγονότων στο διάστημα t:

$$P(X = k) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}$$

  - **Μέση Τιμή:** $E[X] = \lambda t$.
  - **Διασπορά:** $\mathrm{Var}[X] = \lambda t$.