Σύνοψη βασικών εννοιών και ιδιοτήτων

- Δειγματικός Χώρος Ω: Το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης.
- Απλό Ενδεχόμενο: Ένα ενδεχόμενο με μόνο ένα δειγματικό σημείο.
- Σύνθετο Ενδεχόμενο: Ένα ενδεχόμενο με περισσότερα από ένα δειγματικά σημεία.
- Συμπλήρωμα (A'): Πραγματοποιείται όταν δεν πραγματοποιείται το A.
  $P(A') = 1 - P(A)$.
- Ένωση ($A \cup B$): Πραγματοποιείται όταν πραγματοποιείται τουλάχιστον ένα από τα A ή B.
  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- Τομή ($A \cap B$): Πραγματοποιείται όταν πραγματοποιούνται και τα δύο A και B.
- Διαφορά (A - B): Πραγματοποιείται όταν πραγματοποιείται το A αλλά όχι το B.
  $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$.
- Συμμετρική Διαφορά ($A \oplus B$): Το ενδεχόμενο που περιέχει τα στοιχεία που ανήκουν είτε στο A είτε στο B, αλλά όχι και στα δύο.
  Ορίζεται ως:
  $A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$.
  $P(A \oplus B) = P(A) + P(B) - 2 \cdot P(A \cap B)$.
- Ξένα Ενδεχόμενα ($A \cap B = \emptyset$): Τα ενδεχόμενα A και B λέγονται ξένα όταν δεν μπορούν να πραγματοποιηθούν ταυτόχρονα.
  Για ξένα ενδεχόμενα:
  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Αξιώματα Πιθανοτήτων

- $P(\emptyset) = 0$: Η πιθανότητα του αδύνατου ενδεχομένου είναι 0.
- $P(S) = 1$: Η πιθανότητα του δειγματικού χώρου είναι 1.
- Αν A1, A2, ..., An είναι ξένα ανά δύο ενδεχόμενα, τότε ισχύει:
  $P(A1 \cup A2 \cup ... \cup A_n) = P(A1) + P(A2) + ... + P(A_n)$.

Δεσμευμένη Πιθανότητα

- Ορίζεται ως η πιθανότητα ενός ενδεχομένου A δεδομένου ότι έχει πραγματοποιηθεί ένα άλλο ενδεχόμενο B:

$P(A \mid B) = P(A \cap B) / P(B)$, με $P(B) > 0$.

Πολλαπλασιαστικός Τύπος

- Υπολογίζει την πιθανότητα τομής δύο ή περισσότερων ενδεχομένων:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$.

- Για περισσότερα από δύο ενδεχόμενα:

$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \ldots \cdot P(An \mid A1 \cap A_2 \ldots \cap A_{n-1})$.

Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας

- Αν $B_1, B_2, \ldots, B_n$ είναι μια διαμέριση του δειγματικού χώρου S, τότε για κάθε ενδεχόμενο A:

$P(A) = \Sigma\, P(A \mid B_i) \cdot P(B_i)$, όπου $i = 1, 2, \ldots, n$.

Θεώρημα του Bayes

- Επιτρέπει τον υπολογισμό της πιθανότητας μιας «αιτίας» B_k δοθέντος του αποτελέσματος A:

$P(B_k \mid A) = (P(A \mid B_k) \cdot P(B_k)) / \Sigma\, P(A \mid B_i) \cdot P(B_i)$, όπου $i = 1, 2, \ldots, n$.

Ανεξαρτησία Ενδεχομένων

- Δύο ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα αν η πραγματοποίηση του ενός δεν επηρεάζει την πιθανότητα του άλλου:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

- Με όρους δεσμευμένης πιθανότητας:

$P(A \mid B) = P(A)$ και $P(B \mid A) = P(B)$.

Σύνοψη Συνδυαστικής

Βασικές Αρχές

1. Πολλαπλασιαστική Αρχή:
Αν μια διαδικασία απαρίθμησης χωρίζεται σε k βήματα, τότε ο συνολικός αριθμός τρόπων είναι:
$n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$.

2. Αθροιστική Αρχή:
Αν μια εργασία μπορεί να εκτελεστεί με n_1 τρόπους ή με n_2 τρόπους (χωρίς επικαλύψεις), τότε ο συνολικός αριθμός τρόπων είναι:
Χωρίς επικαλύψεις: $n_1 + n_2$
Με επικαλύψεις: $n_1 + n_2$ - (αριθμός τρόπων που ανήκουν και στις δύο περιπτώσεις)

Διατάξεις και Επαναληπτικές Διατάξεις

- Διάταξη k-στοιχείων από n:
$P(n, k) = n! / (n-k)!$ όπου $1 \leq k \leq n$.
- Επαναληπτική Διάταξη k-στοιχείων από n:
n^k, όπου $k \geq 1$, $n \geq 1$.

Μεταθέσεις

- Μεταθέσεις n-στοιχείων:
$P(n, n) = n!$
- Μεταθέσεις με επαναλήψεις:
$n! / (n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!)$ όπου $n_1, n_2, \ldots, n_k$ είναι οι αριθμοί των όμοιων στοιχείων.

Συνδυασμοί και Επαναληπτικοί Συνδυασμοί

- Συνδυασμός k-στοιχείων από n:
$C(n, k) = n! / (k! \cdot (n-k)!)$ όπου $1 \leq k \leq n$.
- Επαναληπτικός Συνδυασμός k-στοιχείων από n:
$C(n+k-1, k) = (n+k-1)! / (k! \cdot (n-1)!)$

Κατανομή Σφαιρών σε Κουτιά

Η κατανομή εξαρτάται από:
1. Αν οι σφαίρες είναι διακεκριμένες ή μη διακεκριμένες.
2. Αν τα κουτιά είναι διακεκριμένα ή μη διακεκριμένα.
3. Αν υπάρχουν περιορισμοί.

Περίληψη Περιπτώσεων

Σημειώσεις:

n: αριθμός κουτιών, k: αριθμός σφαιρών.

Με περιορισμούς: κάθε κουτί μπορεί να περιέχει μία ή καμία σφαίρα.

Χωρίς περιορισμούς: κάθε κουτί μπορεί να περιέχει καμία, μία ή και περισσότερες σφαίρες.

Περίπτωση	***Αριθμός Τρόπων***
Διακεκριμένες σφαίρες, διακεκριμένα κουτιά, χωρίς περιορισμούς	n^k,
Διακεκριμένες σφαίρες, διακεκριμένα κουτιά, με περιορισμούς	$P(n, k) = n! / (n-k)!$
Διακεκριμένες σφαίρες, διακεκριμένα κουτιά, με περιορισμούς και με επιπλέον περιορισμό να μην υπάρχει άδειο κουτί	$n!$ αν $k=n$, αλλιώς 0
Μη διακεκριμένες σφαίρες, διακεκριμένα κουτιά, χωρίς περιορισμούς	$C(n+k-1, k) = (n+k-1)! / (k! \cdot (n-1)!)$
Μη διακεκριμένες σφαίρες, διακεκριμένα κουτιά, με περιορισμούς	$C(n, k) = n! / (k! \cdot (n-k)!)$
Μη διακεκριμένες σφαίρες, διακεκριμένα κουτιά, χωρίς περιορισμούς με μόνο περιορισμό να μην υπάρχει άδειο κουτί	$C(k-1, n-1)$, αν $k \geq n$, αλλιώς 0
Μη διακεκριμένες σφαίρες, διακεκριμένα κουτιά, με περιορισμούς και με επιπλέον περιορισμό να μην υπάρχει άδειο κουτί	1 αν $k = n$, αλλιώς 0