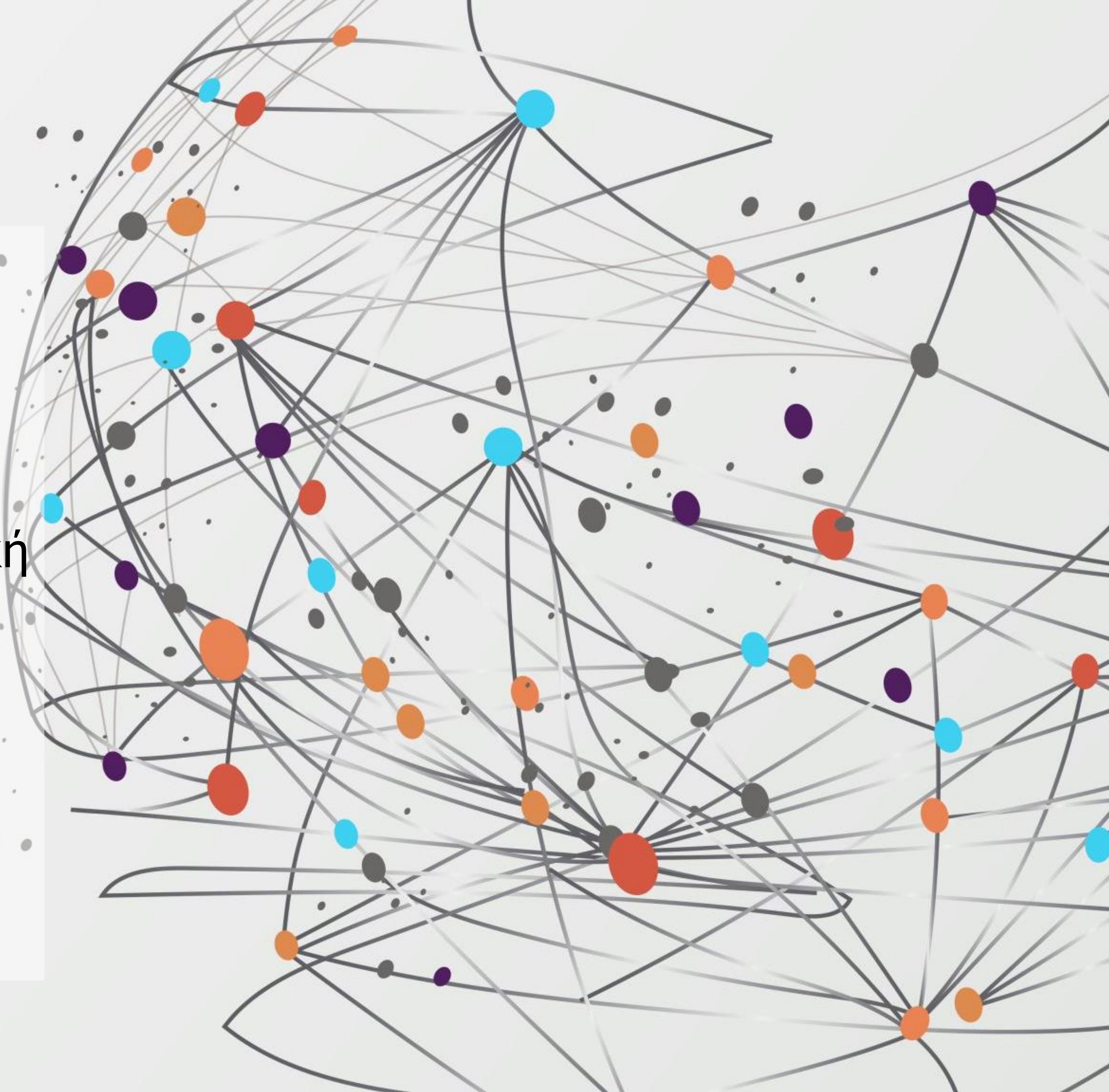
Θεωρία Πιθανοτήτων Διακριτές τυχαίες μεταβλητές

Συνοπτικές σημειώσεις
στην Θεωρία Συνόλων, την Αξιωματική Θεμελίωση και τη Συνδυαστική Ανάλυση

Ηλίας Σακέλλης



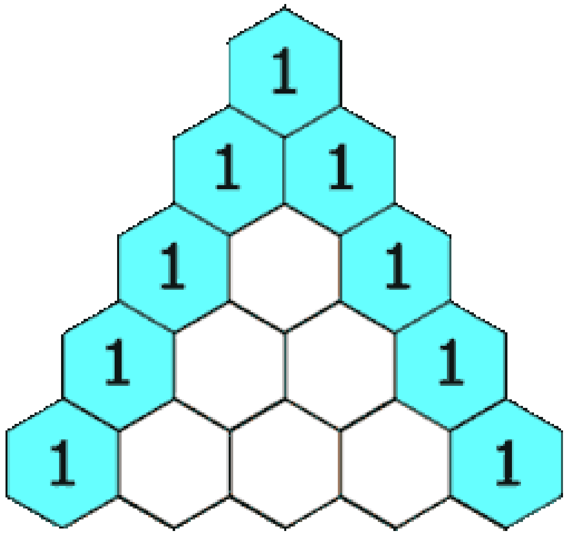
Βιβλιογραφία—Αναφορές

- *S. Ross. Βασικές αρχές θεωρίας πιθανοτήτων. Εκδόσεις Κλειδάριθμος.*
- *Γ. Κοντογιάννης, Σ. Τουμπής (2015) - Στοιχεία πιθανοτήτων.*
- *Hoel, Port, Stone. Εισαγωγή στη θεωρία πιθανοτήτων. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.*
- *Χ. Δαμιανού, Ν. Παπαδάτος, Χ. Χαραλαμπίδης - Εισαγωγή στις Πιθανότητες και τη Στατιστική.*
- *Μπερτσεκά, Δ. και Τσιτσικλή, Γ. Εισαγωγή στις Πιθανότητες. Εκδόσεις Τζιόλα.*
- *ΠΑΠΟΥΛΗΣ, PILLAI - ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ, ΤΥΧΑΙΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ ΚΑΙ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ.*
- *Χ. Χαραλαμπίδης. Θεωρία Πιθανοτήτων και Εφαρμογές. Εκδόσεις Συμμετρία.*
- *Schaum's Outline of Theory and Problems of Probability and Statistic.*
- *Ο. Χρυσαφινού, Α. Μπουρνέτας, Ε. Βαγγελάτου – Σημειώσεις Πιθανοτήτων – Στατιστικής.*
- *Κούτρα, Μ. Εισαγωγή στη Θεωρία Πιθανοτήτων και Εφαρμογές. Εκδόσεις Σταμουλής.*

Το τρίγωνο του Pascal

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

n=0	$(a+b)^0$	1	1
n=1	$(a+b)^1$	$1a+1b$	1 1
n=2	$(a+b)^2$	$1a^2+2ab+1b^2$	1 2 1
n=3	$(a+b)^3$	$1a^3+3a^2b+3ab^2+1b^3$	1 3 3 1
n=4	$(a+b)^4$	$1a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+1b^4$	1 4 6 4 1
n=5	$(a+b)^5$	$1a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+1b^5$	1 5 10 10 5 1



$$\binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0}\quad\binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0}\quad\binom{2}{1}\quad\binom{2}{2}$$
$$\binom{3}{0}\quad\binom{3}{1}\quad\binom{3}{2}\quad\binom{3}{3}$$
$$\binom{4}{0}\quad\binom{4}{1}\quad\binom{4}{2}\quad\binom{4}{3}\quad\binom{4}{4}$$
$$\binom{5}{0}\quad\binom{5}{1}\quad\binom{5}{2}\quad\binom{5}{3}\quad\binom{5}{4}\quad\binom{5}{5}$$

Ορισμός : Συνδυασμοί με επανάληψη ν στοιχείων

Συνδυασμοί με επανάληψη ν στοιχείων ενός συνόλου Χ ανά κ, ονομάζεται κάθε μη-διατεταγμένο υποσύνολο κ στοιχείων του Χ όπου επιτρέπεται η επανάληψη των στοιχείων και συμβολίζεται με

$$\begin{bmatrix} \nu \\ \kappa \end{bmatrix} = \binom{\nu+\kappa-1}{\kappa} = \binom{\nu+\kappa-1}{\nu-1} = \frac{(\nu+\kappa-1)!}{\kappa!(\nu-1)!}$$

Ορισμός : Δεσμευμένη πιθανότητα

Η δεσμευμένη πιθανότητα ενός ενδεχομένου Α δοθείσης της πραγματοποίησης του Β συμβολίζεται με $P(A|B)$ και δίνεται από την σχέση

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}, \qquad P(B)>0$$

όπου Α, Β υποσύνολα ενός δειγματικού χώρου Ω.

Παρατήρηση

Η δεσμευμένη πιθανότητα πληροί τα αξιώματα Kolmogorov

i. $P(A|B) \geq 0, \forall A, B \in \mathbb{F}$

ii. $P(\Omega|B) = 1, \forall B \in \mathbb{F}$

iii. $P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n|B) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n|B), \forall A_i, A_j : A_i \cap A_j = \varnothing, i \neq j$

Παρατήρηση

i. $P(A'|B) = 1 - P(A|B)$

ii. $P(A \cup B|\Gamma) = P(A|\Gamma) + P(B|\Gamma) - P(A \cap B|\Gamma)$

iii. $P(A' \cap B|\Gamma) = P(B|\Gamma) - P(A \cap B|\Gamma)$

Παρατήρηση

Από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας προκύπτει ο πολλαπλασιαστικός κανόνας:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B),\ P(B) > 0$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(A|B),\ P(A) > 0$$

Γενικότερα:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \ldots \cdot P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

Ορισμός : Ανεξάρτητα ενδεχόμενα

Τα ενεχόμενα A, B καλούνται ανεξάρτητα αν

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

εναλλακτικά

$$P(A|B) = P(A)$$

Σε αντίθετη περίπτωση λέγονται εξαρτημένα. Η ανεξαρτησία εκφράζει το γεγονός ότι η πραγματοποίηση του B δεν επηρεάζει την πραγματοποίηση του A.

Παρατήρηση

Αν τα A, B είναι ανεξάρτητα τότε επίσης ανεξάρτητα θα είναι και τα ενδεχόμενα:

$$A, B'$$

$$A', B$$

$$A', B'$$

Ορισμός : Ανεξάρτητα ενδεχόμενα

Τα ενδεχόμενα A_1, A_2, ..., A_v ενός δειγματικού χώρου Ω λέγονται αμοιβαίως ανεξάρτητα ανά δύο αν

$$P(A_i \cap Aj) = P(A_i) \cdot P(A_j)\ ,\ \forall i \neq j,\ i, j = 1, 2, \ldots, v$$

ενώ καλούνται ανεξάρτητα ή πλήρως ανεξάρτητα αν και μόνο αν

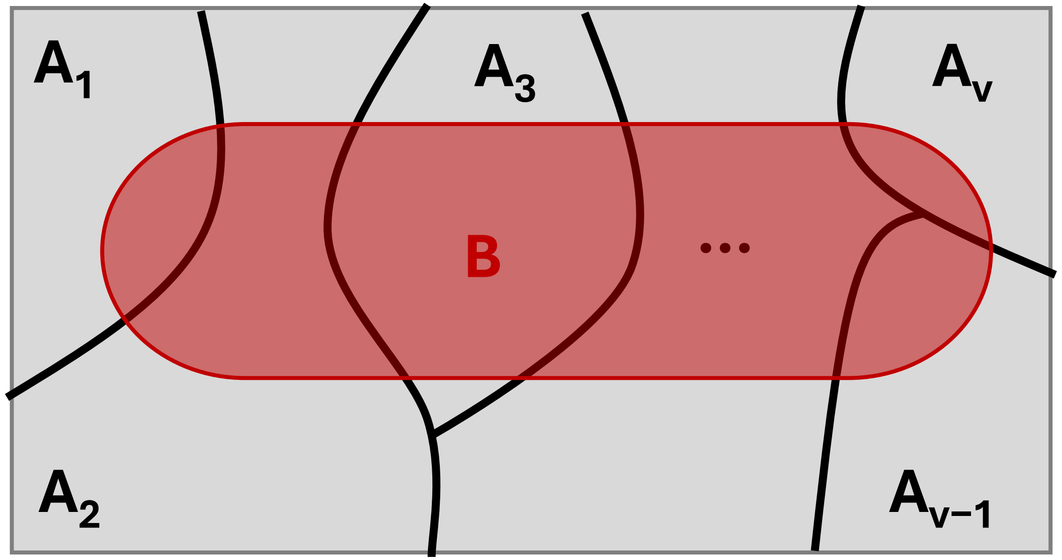
$$P\left(\bigcap_{i=1}^{\nu} A_i\right) = \prod_{i=1}^{\nu} P(A_i)$$

για κάθε συλλογή ενδεχομένων A_i.

Ορισμός : Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας

Αν $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ μία διαμέριση κάποιου δειγματικού χώρου Ω, δηλαδή $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_n$ με $A_i \cap A_j = \varnothing \ \forall i \neq j,\ i, j = 1, 2, \ldots, \nu$, τότε για οποιοδήποτε ενδεχόμενο B του δειγματικού χώρου Ω ισχύει

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + \ldots + P(A_\nu) \cdot P(B|A_\nu)$$



Ορισμός : Θεώρημα Bayes

Το είναι Θεώρημα Bayes είναι άμεση απόρροια του θεωρήματος ολικής πιθανότητας και του ορισμού της δεσμευμένης πιθανότητας. Για οποιοδήποτε ενδεχόμενο A_i, i= 1, 2, …, ν του δειγματικού χώρου Ω και B ένα οποιοδήποτε ενδεχόμενο του Ω ισχύει

$$P(A_k|B) = \frac{P(A_k)\cdot P(B|A_k)}{\sum_{i=1}^{\nu} P(A_i)\cdot P(B|A_i)}$$

Η $P(A_k)$ λέγεται εκ των προτέρων πιθανότητα του A_k (a priori), η $P(A_k|B)$ λέγεται εκ των υστέρων πιθανότητα (a posteriori) ενώ η $P(B|A_k)$ λέγεται πιθανοφάνεια (likelihood).