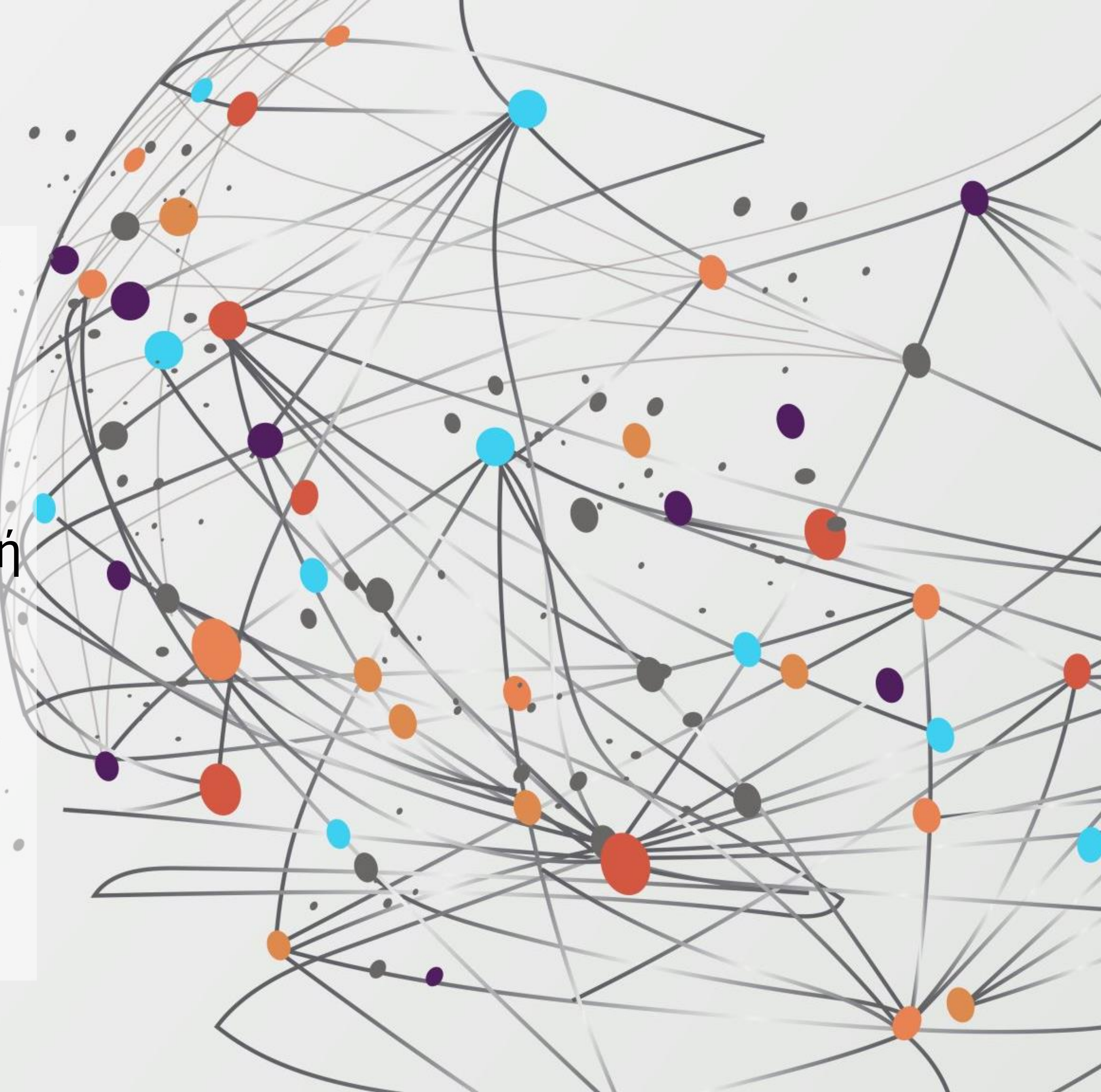
Θεωρία Πιθανοτήτων_Διακριτές τυχαίες μεταβλητές

Συνοπτικές σημειώσεις
στην Θεωρία Συνόλων, την Αξιωματική Θεμελίωση και τη Συνδυαστική ανάλυση

Ηλίας Σακέλλης



Βιβλιογραφία—Αναφορές

- *S. Ross. Βασικές αρχές θεωρίας πιθανοτήτων. Εκδόσεις Κλειδάριθμος.*
- *Γ. Κοντογιάννης, Σ. Τουμπής (2015) - Στοιχεία πιθανοτήτων.*
- *Hoel, Port, Stone. Εισαγωγή στη θεωρία πιθανοτήτων. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.*
- *Χ. Δαμιανού, Ν. Παπαδάτος, Χ. Χαραλαμπίδης - Εισαγωγή στις Πιθανότητες και τη Στατιστική.*
- *Μπερτσεκά, Δ. και Τσιτσικλή, Γ. Εισαγωγή στις Πιθανότητες. Εκδόσεις Τζιόλα.*
- *ΠΑΠΟΥΛΗΣ, PILLAI - ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ, ΤΥΧΑΙΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ ΚΑΙ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ.*
- *Χ. Χαραλαμπίδης. Θεωρία Πιθανοτήτων και Εφαρμογές. Εκδόσεις Συμμετρία.*
- *Schaum's Outline of Theory and Problems of Probability and Statistic.*
- *Ο. Χρυσαφινού, Α. Μπουρνέτας, Ε. Βαγγελάτου – Σημειώσεις Πιθανοτήτων – Στατιστικής.*
- *Κούτρα, Μ. Εισαγωγή στη Θεωρία Πιθανοτήτων και Εφαρμογές. Εκδόσεις Σταμουλής.*

Ορισμός

Ένα σύνολο είναι μια μη διατεταγμένη συλλογή συγκεκριμένων στοιχείων/μελών. Συμβολίζεται συνήθως με κεφαλαία π.χ. Α και { .. , .., ..} ή βάση της ιδιότητας {έκφραση: ιδιότητα} ή {ιδιότητα: έκφραση}.

Υπάρχουν άπειρα και περασμένα σύνολα.

Τα στοιχεία ενός συνόλου δεν επαναλαμβάνονται και δεν έχει σημασία η σειρά τους.

Ορισμός

Πληθικός αριθμός ή πληθικότητα είναι ο αριθμός που δείχνει το πλήθος των στοιχείων του συνόλου Σ και συμβολίζεται με $|\Sigma|$.

Ορισμός

Καρτεσιανό γινόμενο δύο συνόλων Α και Β είναι ένα νέο σύνολο $A \times B$ το οποίο περιέχει τα διατεταγμένα ζεύγη (α,β) με $\alpha \in A$ και $\beta \in B$ ή

$$A \times B=\{(\alpha,\beta): \alpha \in A,\ \beta \in B\}.$$

Ορισμός

Καρτεσιανό γινόμενο δύο συνόλων A και B είναι ένα νέο σύνολο $A \times B$ το οποίο περιέχει τα διατεταγμένα ζεύγη (α,β) με $\alpha \in A$ και $\beta \in B$ ή

$$A \times B = \{(\alpha,\beta): \alpha \in A,\ \beta \in B\}.$$

Παρατήρηση

- $A \times B \neq B \times A$
- Ορίζεται: $A \times \varnothing = \varnothing \times A = \varnothing \times \varnothing = \varnothing$
- Αν τα σύνολα A και B είναι πεπερασμένα σύνολα τότε $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

Ορισμός

Καρτεσιανή δύναμη συνόλου A είναι

$$A^n = A \times A \times \ldots \times A = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n): x_1, x_2, \ldots, x_n \in A,\ \ n \in \mathbb{N}\}$$

Ορισμός

Υποσύνολα: Αν κάθε στοιχείο του συνόλου A είναι και στοιχείο του B τότε λέμε ότι το A είναι υποσύνολο του B ή $\forall x \in A \xRightarrow{\text{τότε}} x \in B : A \subseteq B$

Αν $A \subseteq B$ και $A \neq B$ τότε το A ονομάζεται γνήσιο υποσύνολο του B: $A \subset B$ ή $A \subsetneq B$

Ορισμός

Δυναμοσύνολο $\mathbb{P}(A)$ (ή $\aleph(A)$) ενός συνόλου A ονομάζεται το σύνολο στοιχεία του οποίου είναι όλα τα υποσύνολα του A.

$\mathbb{P}(A) = \{X: X \leq A\}$ ή $\mathbb{P}(A) = 2^{A}$ με πληθικότητα $|\mathbb{P}(A)| = 2^{|A|}$

Πράξεις συνόλων

Ένωση: $A \cup B = \{x: x \in A$ Ή $x \in B\}$

Τομή: $A \cap B = \{x: x \in A$ ΚΑΙ $x \in B\}$ (αλλιώς ΑΒ)

Διαφορά: $A - B = \{x: x \in A$ ΚΑΙ $x \notin B\}$ (αλλιώς $A \backslash B$)

Συμμετρική διαφορά: $A \oplus B = \{x: (x \in A$ ΚΑΙ $x \notin B)$ Ή $(x \notin A$ ΚΑΙ $x \in B)\}$

Ορισμός

Το σύνολο $\mathcal{U}$ που περιέχει όλα τα στοιχεία που υπάρχουν στο εκάστοτε υπό μελέτη πρόβλημα ονομάζεται ***χώρος ή βασικό σύνολο ή καθολικό (Universal) σύνολο***.

Ορισμός

Συμπλήρωμα ενός συνόλου Α ονομάζεται το σύνολο $\overline{A}$ ή A^c ή Α' : $\overline{A} = \mathcal{U} - A$

Ορισμός

Τύποι (νόμοι) De Morgan:

$(A \cap B)' = A' \cup B'$

$(A \cup B)' = A' \cap B'$

$A \subset B \Rightarrow A' \supset B'$

Ιδιότητες συνόλων

Αντιμεταθετική: $A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$

Προσεταιριστική: $A \cup (B \cup \Gamma) = (A \cup B) \cup \Gamma$

$A \cap (B \cap \Gamma) = (A \cap B) \cap \Gamma$

Επιμεριστική: $A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$

$A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$

Ταυτοτικότητα: $A \cup \varnothing = A$

$A \cap \mathcal{U} = A$

Συμπληρωματικότητα: $A \cup A' = \mathcal{U}$ $\qquad A \cap A' = \varnothing$

$\mathcal{U}' = \varnothing$ $\qquad \varnothing' = \mathcal{U}$

$(A')' = A$

Ιδιότητες συνόλων

$$A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$$

$$A - B = A \cap B'$$

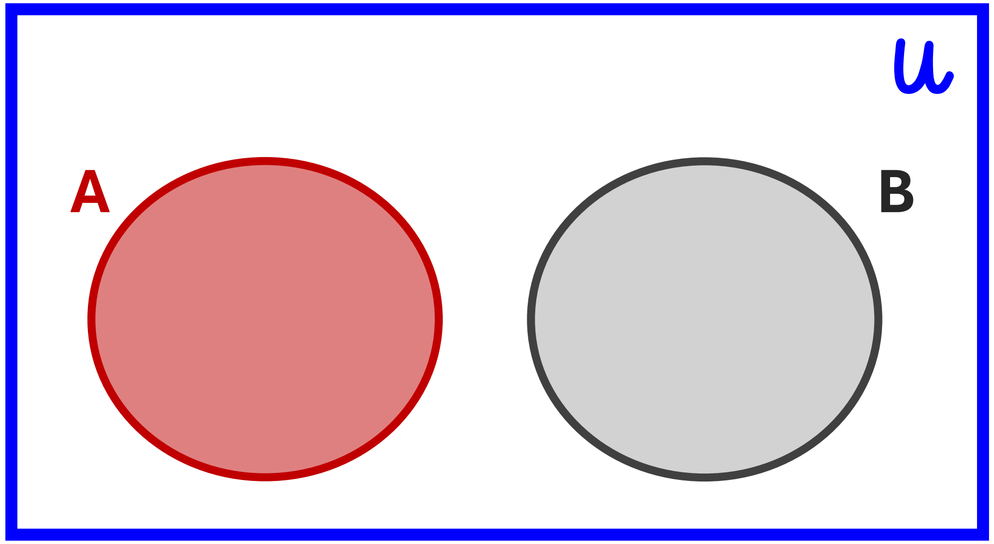
$$B - A = A' \cap B$$

Κανόνες απορρόφησης: $A \cup (A \cap B) = A$

$$A \cap (A \cup B) = A$$

Ορισμός

Ασυμβίβαστα ή ξένα ή αμοιβαίως αποκλειόμενα καλούνται τα σύνολα που έχουν τομή το κενό σύνολο $A \cap B = \varnothing$.



Ορισμός

Διαμέριση συνόλου A καλείται η συλλογή μη κενών υποσυνόλων του A αν και μόνο αν $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_n$ και τα $A_1, A_2, \ldots A_n$ είναι ξένα/ασυμβίβαστα ανά δύο ή $A_i \cap A_j = \varnothing \ \forall i \neq j$.

Παρατήρηση

Αν $A \cap B = \varnothing$ τότε $|A \cup B| = |A| + |B|$

Αν $A \cap B \neq \varnothing$ $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ (Αρχή Εγκλεισμού – Αποκλεισμού)

Ορισμός

Πείραμα τύχης-τυχαίο πείραμα είναι μια καλά καθορισμένη διαδικασία που μπορεί να επαληθευθεί όσες φορές χρειαστεί δίνοντας μέσα από ένα σύνολο παρατηρήσιμων δυνατών αποτελεσμάτων ένα αποτέλεσμα το οποίο δεν μπορεί να προβλεφθεί.

Ορισμός

Δειγματικός χώρος, Ω, ενός πειράματος τύχης καλείται το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων αυτού.

Ορισμός

Κάθε σημείο του δειγματικού χώρου ονομάζεται δειγματικό σημείο.

Ορισμός

Ένα υποσύνολο του δειγματικού χώρου καλείται ενδεχόμενο και αν αποτελείται από ένα μόνο στοιχείο-δειγματικό σημείο καλείται στοιχειώδες ή απλό ενδεχόμενο. Το ενδεχόμενο που δεν περιέχει κανένα στοιχείο του δειγματικού χώρου, δηλαδή το $\varnothing$, καλείται αδύνατο ενώ το ενδεχόμενο που αποτελείται από όλα τα δυνατά αποτελέσματα δηλαδή το Ω καλείται βέβαιο.

Παρατήρηση

Ο δειγματικός χώρος πρέπει να αποτελείται από αμοιβαίως αποκλειόμενα ενδεχόμενα ώστε να υπάρχει μόνο ένα αποτέλεσμα στο πείραμα.
Ο δειγματικός χώρος περιέχει κάθε δυνατό αποτέλεσμα ανεξαρτήτως του πώς θα μοντελοποιήσουμε το εκάστοτε πρόβλημα ή κατάσταση (συλλογικά εξαντλητικός).
Ο δειγματικός χώρος πρέπει να είναι επαρκώς λεπτομερής ώστε να διακρίνει τα διαφορετικά αποτελέσματα.

Ορισμός

Ο δειγματικός χώρος που είτε περιέχει πεπερασμένο αριθμό στοιχείων ή είναι αριθμήσιμο άπειρο σύνολο καλείται διακριτός δειγματικός χώρος π.χ. ζάρι, νόμισμα. Αν ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης είναι άπειρος και περιέχει μη αριθμήσιμο πλήθος στοιχείων καλείται συνεχής π.χ. χρόνος ζωής, απόσταση από κέντρο στόχου.

Ορισμός Υποκειμενικής πιθανότητας

Ο όρος πιθανότητα ερμηνεύεται ως βαθμός πίστης ή προσωπικής γνώμης. Υπάρχει πιθανότητα 20% να βρέξει αύριο. Η έλλειψη αντικειμενικότητας και πειραματικής επαληθευσιμότητας αντισταθμίζονται μερικώς από το γεγονός ότι οι υποκειμενικές κρίσεις προϋποθέτουν ότι γίνονται από κάποιον με ειδικές γνώσεις επί του ενδεχομένου. Π.χ. η παραπάνω πρόταση μπορεί έχει διατυπωθεί από έναν μετεωρολόγο ο οποίος έχει επιστημονικά δεδομένα για τη περιοχή, την εποχή κτλ. Άλλος μετεωρολόγος μπορεί να διαφωνεί. Άλλο παράδειγμα είναι διατυπώσεις του τύπου «είναι 1000% βέβαιο». Σε κάθε περίπτωση δεν είναι δυνατή η ανάθεση μιας τιμής πιθανότητας σε σύνθετα πειράματα με μεγάλο αριθμό δυνατών αποτελεσμάτων.

Παρατήρηση

Πλεονεκτήματα του ορισμού είναι το μεγάλο εύρος εφαρμογών.

Κλασικός ορισμός πιθανότητας

(Laplace 1812, Moivre 1711, Pascal, Cardano, Frenel)

Αν ένα πείραμα τύχης έχει πεπερασμένο δειγματικό χώρο Ω και όλα τα στοιχειώδη ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα τότε η πιθανότητα P(A) εμφάνισης ενός ενδεχομένου $A \subseteq \Omega$ δίνεται από τη σχέση

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Πρόβλημα: η χρήση της λέξεως *ισοπίθανα*

Περιορισμοί:

- προϋποθέτει ισοπίθανα ενδεχόμενα
- εφαρμόζεται σε πειράματα με πεπερασμένο δειγματικό χώρο

Πλεονεκτήματα:

- χρήση σε πολλές περιπτώσεις όπου πληρούνται οι παραπάνω προϋποθέσεις
- απλότητα

Στατιστικός ή εμπειρικός ορισμός πιθανότητας

Όταν επαναλαμβάνεται ένα πείραμα τύχης, παρόλη την μεταβλητότητα των επιμέρους αποτελεσμάτων, η σχετική συχνότητα εμφάνισης ενός ενδεχομένου $f_A = \frac{v_A}{v}$, όπου ν το πλήθος επαναλήψεων του πειράματος και v_A το πλήθος εμφάνισης του ενδεχομένου A, σταθεροποιείται γύρω από συγκεκριμένη τιμή η οποία ονομάζεται οριακή σχετική συχνότητα του ενδεχομένου A. Το εμπειρικό αποτέλεσμα λέγεται στατιστική ομαλότητα αλλά απαιτεί θεωρητική θεμελίωση προϋποθέτοντας την έννοια της πιθανότητας (θεώρημα/νόμος μεγάλων αριθμών).

Η πιθανότητα P(A) ενός ενδεχομένου A ενός πειράματος τύχης με δειγματικό χώρο Ω το οποίο επαναλαμβάνεται κάτω από τις ίδιες συνθήκες ορίζεται ως

$$P(A) = \lim_{v \to \infty} \frac{v_A}{v}$$

δηλαδή είναι η οριακή σχετική συχνότητα.

Παρατήρηση

- Η πιθανότητα προκύπτει από την επανάληψη του πειράματος ενώ στον κλασικό ορισμό είναι γνωστή εκ των προτέρων.
- Πρόβλημα αποτελεί για τον ορισμό η απεριόριστη επανάληψη του πειράματος υπό τις ίδιες συνθήκες. Πόσες πολλές; Πώς διασφαλίζεται το «ίδιες»;

Ορισμός

σ-άλγεβρα καλείται μια μη κενή συλλογή $\mathbb{F}$ υποσυνόλων του Ω για την οποία $\Omega \in \mathbb{F}$ και ισχύουν οι παρακάτω δύο ιδιότητες:

i. Αν το $A \in \mathbb{F}$ τότε $A' \in \mathbb{F}$

ii. Αν τα υποσύνολα A_n ($n=1, 2, \ldots$) τα ανήκουν στην $\mathbb{F}$ τότε τα $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ και $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ ανήκουν στην $\mathbb{F}$.

Παρατήρηση

Το δυναμοσύνολο $\mathbb{P}(\Omega)$ αποτελεί την μεγαλύτερη σ-άλγεβρα.

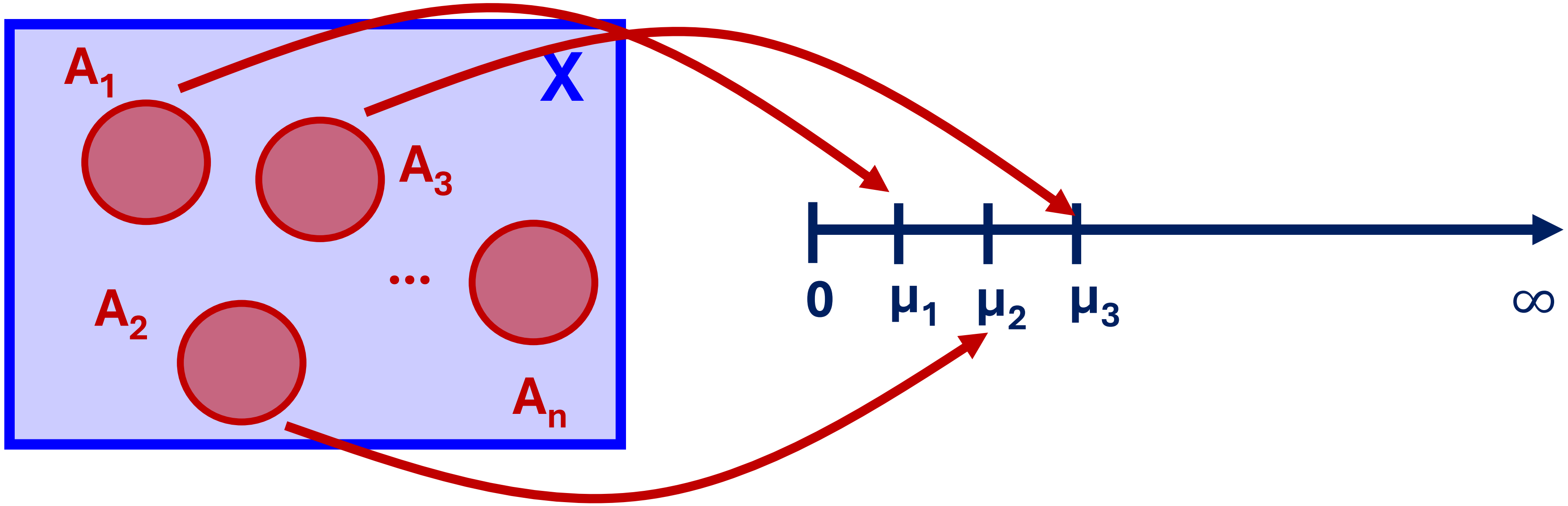
Ορισμός

Έστω ότι το σύνολο X είναι εφοδιασμένο με μια σ-άλγεβρα $\mathbb{F}$. Ένα μέτρο στον χώρο (X, $\mathbb{F}$) είναι μια συνάρτηση $\mu: \mathbb{F} \rightarrow [0, \infty]$ τέτοια ώστε:

i. $\mu(\varnothing) = 0$

ii. αν τα υποσύνολα είναι ξένα, $A_i \cap A_j = \varnothing$ $(i \neq j)$, τότε $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

Ορίζεται έτσι ένας χώρος μέτρου (X, $\mathbb{F}$, μ) όπου X ένας χώρος, $\mathbb{F}$ η σ-άλγεβρα υποσυνόλων του X και μ ένα μέτρο ορισμένο στην $\mathbb{F}$.



Αξιωματικός ορισμός πιθανότητας

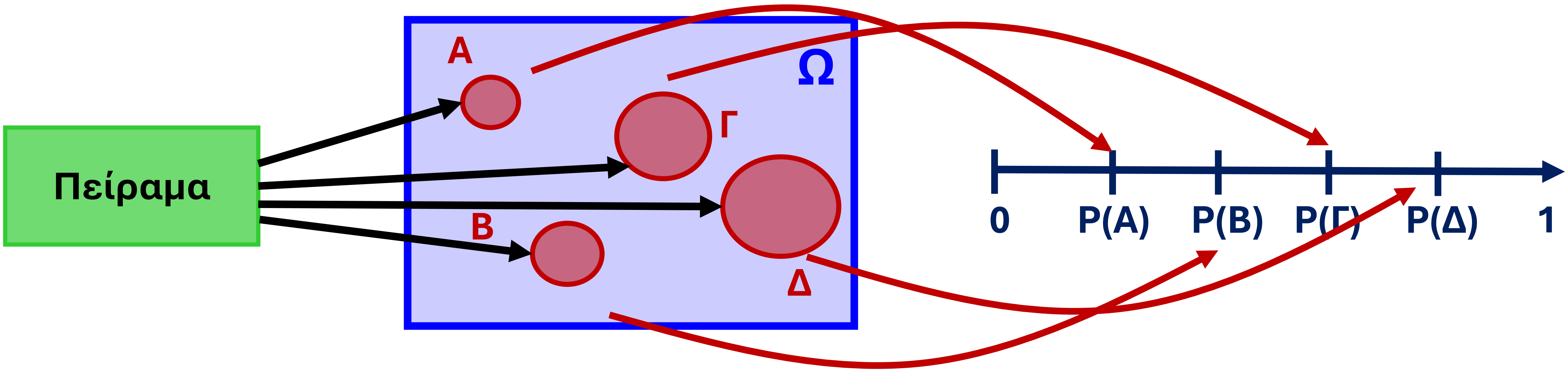
Ένα μέτρο πιθανότητας P σε μια άλγεβρα $\mathbb{F}$ υποσυνόλων ενός συνόλου Ω είναι μια πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού την $\mathbb{F}$ και σύνολο τιμών [0, 1] δηλαδή P: $\mathbb{F} \rightarrow [0, 1]$ με τις εξής ιδιότητες:

i. $P(\Omega) = 1$

ii. $P(A) \geq 0 \ \forall A \in \mathbb{F}$, A υποσύνολο του Ω

iii. Αν A_n (n=1, 2, ...) ξένα ανά δύο στην $\mathbb{F}$ τότε $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ (αριθμήσιμη προσθετικότητα/ σ-προσθετικότητα)

Ένας χώρος πιθανότητας είναι λοιπόν μια τριάδα (Ω, $\mathbb{F}$, P) που αποτελείται από ένα σύνολο Ω, μια σ-άλγεβρα $\mathbb{F}$ υποσυνόλων του Ω και ένα μέτρο πιθανότητας ορισμένο στον μετρήσιμο χώρο (Ω, $\mathbb{F}$) .



Πείραμα
A
Ω
Γ
B
Δ
0
P(A)
P(B)
P(Γ)
P(Δ)
1

Παρατήρηση

Ο αξιωματικός ορισμός ενσωματώνει τους προηγούμενους ορισμούς και παράλληλα θεμελιώνει και διερευνά την έννοια της πιθανότητας. Προκειμένου να αντιστοιχηθούν πιθανότητες σε ενδεχόμενα κάποιου πειράματος χρησιμοποιείται είτε ο στατιστικός ορισμός ως οριακή σχετική συχνότητα είτε ο κλασικός όταν το πείραμα τύχης έχει πεπερασμένο δειγματικό χώρο και ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα.

Ιδιότητες που απορρέουν από τον αξιωματικό ορισμό της πιθανότητας
i. $P(\varnothing) = 0$
ii. $P(\bigcup_{n=1}^{\kappa} A_n) = \sum_{n=1}^{\kappa} P(A_n)$, A_n ανεξάρτητα
iii. $P(A') = 1 - P(A), \forall A \in \mathbb{F}$
iv. $P(A \cap B') = P(A-B) = P(A) - P(A \cap B), \forall A,B \in \mathbb{F}$
$P(A' \cap B) = P(B-A) = P(B) - P(A \cap B), \forall A,B \in \mathbb{F}$
v. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B), \forall A,B \in \mathbb{F}$
vi. $P(A) \leq 1, \forall A \in \mathbb{F}$

Ιδιότητες που απορρέουν από τον αξιωματικό ορισμό της πιθανότητας

vii. Αν $A \subseteq B$ τότε $P(A) \leq P(B)$ δηλ. η P(…) είναι αύξουσα συνάρτηση

viii. $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$

ix. $P(\bigcup_{n=1}^{\kappa} A_n) = \sum_{n=1}^{\kappa} P(A_n) - \sum_n \sum_m P(A_n \cap A_m) + \sum_n \sum_m \sum_l P(A_n \cap A_m \cap A_l) + \ldots$
$+(-1)^{n-1} P(\bigcap_{n=1}^{k} A_n)$, όπου $1 \leq n < m < l \leq k$

$$P(A \cup B \cup \Gamma) = P(A) + P(B) + P(\Gamma) - P(A \cap B) - P(A \cap \Gamma) - P(B \cap \Gamma) + P(A \cap B \cap \Gamma)$$

vii. $P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B)$, αν τα A και B εξαντλούν το δειγματικό χώρο: $P(A \cup B)=1$

Ορισμός Γεωμετρικής πιθανότητας

Έστω Ω ένα χωρίο στον R^n και Α ένα υποσύνολο αυτού. Ορίζουμε ως πιθανότητα του Α την P(A)

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

όπου με μ() είναι είτε το μήκος (n= 1) είτε το εμβαδό (n= 2) είτε ο όγκος (n= 3).

Στοιχεία συνδυαστικής

Αρχή αθροίσματος

Έστω τα στοιχεία $\{α_1, α_2, ..., α_ν\}$. Αν το $α_1$ μπορεί να επιλεγεί με $κ_1$ διαφορετικούς τρόπους, ομοίως το $α_2$ με $κ_2$ διαφορετικούς τρόπους και εν γένει το $α_i$ στοιχείο ($i = 1, 2, ..., ν$) με $κ_i$ διαφορετικούς τρόπους τότε μπορούμε να επιλέξουμε το $α_1$ ή το $α_2$ ή ... ή το $α_ν$ με $κ_1 + κ_2 + κ_3 + ... + κ_ν$ τρόπους.

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_ν| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_ν|, \text{ με } A_i \cap A_j = \varnothing \quad \forall i, j$$

Αρχή πολλαπλασιαστική

Έστω τα στοιχεία $\{α_1, α_2, ..., α_ν\}$. Αν το $α_1$ μπορεί να επιλεγεί με $κ_1$ διαφορετικούς τρόπους, ομοίως το $α_2$ με $κ_2$ διαφορετικούς τρόπους και εν γένει το $α_i$ στοιχείο ($i = 1, 2, ..., ν$) με $κ_i$ διαφορετικούς τρόπους τότε μπορούμε να επιλέξουμε διαδοχικά το $α_1$ και κατόπιν το $α_2$ και κατόπιν το $α_3$ και τέλος το $α_ν$ με $κ_1 \cdot κ_2 \cdot κ_3 \cdot ... \cdot κ_ν$ τρόπους.

$$|A_1 \times A_2 \cdot \ldots \times A_ν| = |A_1| \times |A_2| \times \ldots \times |A_ν|$$

Ορισμός : Μεταθέσεις ν στοιχείων

Μεταθέσεις ν στοιχείων ονομάζονται οι ν! διατεταγμένες ν-άδες διακεκριμένων (διαφορετικών) στοιχείων (arrangements) και συμβολίζεται $(\nu)_\nu$.

$$(\nu)_\nu = \nu! = \nu \cdot (\nu-1) \cdot (\nu-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1, \quad \nu \geq 1, \quad 0! \triangleq 1$$

Παρατήρηση

Το ότι οι ν-άδες είναι διατεταγμένες συνεπάγεται ότι μας ενδιαφέρει η σειρά με την οποία επιλέγονται τα στοιχεία.

Ορισμός : Διατάξεις κ στοιχείων

Διατάξεις κ στοιχείων από ν ονομάζονται οι διατεταγμένες κ-αδες διακεκριμένων στοιχείων (permutations) όπου κάθε στοιχείο χρησιμοποιείται μια φορά μόνο, χωρίς επανάθεση και συμβολίζεται $(\nu)_\kappa$, ${}^{\nu}P_\kappa$, P_κ^ν , ${}_{\nu}P_\kappa$

$$ {}^{\nu}P_\kappa = \frac{\nu!}{(\nu-\kappa)!} \quad \text{όπου } 1 \leq \kappa \leq \nu $$

Παρατήρηση

Οι διατάξεις ν στοιχείων από ν, δηλαδή ${}^{\nu}P_\nu$, είναι θα οι μεταθέσεις ν στοιχείων

$$ {}^{\nu}P_\nu = \nu! $$

Ορισμός

Το πλήθος των τρόπων ώστε να διαταχθούν ν αντικείμενα εκ των οποίων, τα $ν_1$ είναι ενός είδους και όμοια μεταξύ τους, τα $ν_2$ είναι ενός δεύτερου είδους και επίσης όμοια μεταξύ τους και ούτω καθ΄ εξής είναι

$$\binom{ν}{ν_1 \;\; ν_2 \; \dots \; ν_κ}=\frac{ν!}{ν_1!ν_2!..ν_κ!}$$

Παρατήρηση

Οι παράγοντες $\frac{ν!}{ν_1!ν_2!..ν_κ!}$ ονομάζονται πολυωνυμικοί συντελεστές του όρου

$\frac{ν!}{ν_1!ν_2!..ν_κ!}\cdot x_1^{ν_1}\cdot x_2^{ν_2}\cdot \dots x_κ^{ν_κ}$ του αναπτύγματος $(x_1+ x_2+ \dots +x_κ)^ν$

Ορισμός : Συνδυασμοί ν στοιχείων

Συνδυασμοί ν στοιχείων ενός συνόλου ανά κ, ονομάζεται κάθε υποσύνολο μη-διατεταγμένων κ-άδων διακεκριμένων στοιχείων και συμβολίζεται με $\binom{\nu}{\kappa}$, ${}^{\nu}C_{\kappa}$, C^{ν}_{κ} , ${}_{\nu}C_{\kappa}$

$$^{\nu}C_{\kappa} = \frac{\nu!}{\kappa!(\nu-\kappa)!}$$

Παρατήρηση

$$^{\nu}C_{\kappa} = \frac{^{\nu}P_{\kappa}}{\kappa!}$$

$$\binom{\nu}{\kappa} = \binom{\nu}{\nu-\kappa}$$

$$^{\nu}C_{\nu} = 1$$

Ορισμός : Διωνυμικός συντελεστής

Το $\binom{\nu}{\kappa}$ ονομάζεται διωνυμικός συντελεστής του αναπτύγματος (διώνυμο του Νεύτωνα)

$$(\alpha + \beta)^{\nu} = \sum_{\kappa=0}^{\nu}\binom{\nu}{\kappa}\alpha^{\kappa}\beta^{\nu-\kappa} \qquad \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$$