Μελέτη συσχετίσεων με Παραγοντική Ροπή 2ης τάξης

Μ. Βασιλείου, Φ. Διάκονος, Α. Καπόγιαννης

Περίληψη

Γίνεται ανίχνευση νόμου δύναμης που αποκαλύπτει μη τετριμμένες συσχετίσεις με τη χρήση της παραγοντικής ροπής 2ης τάξης. Με κατάλληλο πρόγραμμα αναλύονται δεδομένα προσομοιώσεων από απλοποιημένο σύστημα. Εξετάζεται η επίδραση τυχαίου θορύβου στη δυνατότητα ανίχνευσης του νόμου δύναμης.

Αριθμός φοιτητών/τριών: 2

Προαπαιτούμενες γνώσεις: Ευχέρεια προγραμματισμού σε οποιαδήποτε γλώσσα.

Αναλυτική Περιγραφή

Σε πλήθος φυσικών φαινομένων αναδεικνύεται το φαινόμενο της συμμετρίας κλίμακας. Αυτό σημαίνει ότι αν κοιτάξουμε το φυσικό σύστημα σε διάφορες κλίμακες βλέπουμε την ίδια εικόνα ή συμπεριφορά. Μαθηματικά αυτό μπορεί να οριστεί μέσω μίας ποσότητας $f(x)$ που ορίζεται σε διάφορα x. Προβαίνουμε σε μία ανακλιμάκωση λ, δηλαδή αναζητούμε πως συμπεριφέρεται η $f(x)$ στις τιμές λx. Η $f(x)$ παρουσιάζει συμμετρία κλίμακας αν ισχύει:

$$f\left(\lambda x\right)=\lambda^{\alpha} f\left(x\right), \quad (1)$$

όπου ο α είναι ένας χαρακτηριστικός εκθέτης.

Συχνά η συμμετρία κλίμακας συνδέεται με έναν νόμο δύναμης. Πράγματι αν $f(x)=\beta x^{\alpha}$, τότε η $f(x)$ πράγματι παρουσιάζει συμμετρία κλίμακας:

$$f\left(\lambda x\right)=\beta\left(\lambda x\right)^{\alpha}=\beta\lambda^{\alpha}x^{\alpha}=\lambda^{\alpha}\beta x^{\alpha}=\lambda^{\alpha} f\left(x\right), \quad (2)$$

Συχνά ο νόμος δύναμης εμφανίζεται σε φυσικά συστήματα που υπόκεινται σε αλλαγή φάσης. Μάλιστα εντελώς διαφορετικά μεταξύ τους συστήματα είναι δυνατό να εμφανίζουν τον ίδιο κρίσιμο εκθέτη, να εμφανίζουν τον ίδιο νόμο δύναμης και να έχουν την ίδια συμπεριφορά (ανήκουν τότε στην ίδια κλάση παγκοσμιότητας).

Στην σωματιδιακή φυσική γίνεται μεγάλη προσπάθεια ανίχνευσης του κρίσιμου σημείου της κβαντικής χρωμοδυναμικής. Το σημείο αυτό βρίσκεται σε συγκεκριμένες συνθήκες κατά την αλλαγή φάσης μεταξύ του πλάσματος «κουάρκ-γκλουονίων» και της συνηθισμένης αδρονικής ύλης. Ένα από τα σήματα που αναμένεται να σχετίζεται με την ανίχνευση του κρίσιμου σημείου είναι το φαινόμενο της διαλειπτότητας (intermittency) [1], το οποίο και αυτό εμφανίζει νόμο δύναμης.

Ο νόμος δύναμης μπορεί να μελετηθεί εύκολα σε λογαριθμικά διαγράμματα. Σε αυτήν την περίπτωση μία συνάρτηση της μορφής $f(x)=\beta x^{\alpha}$ γίνεται:

$$\log\left[f\left(x\right)\right]=\log\left(\beta x^{\alpha}\right)=\log\left(\beta\right)+a\log\left(x\right), \quad (3)$$

δηλαδή η συνάρτηση γίνεται ευθεία που η κλίση της ταυτίζεται με τον εκθέτη α.

Πολλές φορές τα διαθέσιμα πειραματικά δεδομένα είναι με τη μορφή ορισμένων σημείων από έναν χώρο εμβάπτισης με διάσταση d (d=1 για ευθεία, d=2 για επίπεδο ή d=3 για τρισδιάστατο χώρο). Για παράδειγμα για την ανίχνευση του κρίσιμου σημείου της QCD χρησιμοποιούνται ορμές πρωτονίων σε χώρο 2 διαστάσεων [1]. Θέλουμε από τα δεδομένα αυτά να ανιχνεύσουμε την ύπαρξη ενός νόμου δύναμης. Μία μέθοδος είναι να χρησιμοποιήσουμε την παραγοντική ροπή 2ης τάξης, F_2 [2-3]. Για την εφαρμογή της μεθόδου αυτής σχηματίζουμε ένα κουτί L^d, το οποίο περιέχει όλα τα σημεία μας. Το κουτί μπορεί να είναι ευθύγραμμο τμήμα, τετράγωνο ή κύβος, ανάλογα με την τιμή του d. Στη συνέχεια υποδιαιρούμε κάθε ακμή του κουτιού σε M το πλήθος διαμερίσεις, διαιρώντας έτσι το χώρο του κουτιού σε M^d κελιά. Μετρούμε τον αριθμό των σημείων N βρίσκονται μέσα σε κάθε κελί. Στη συνέχεια σχηματίζουμε την ποσότητα:

$$F_2(M)=\frac{\frac{1}{M^d}\sum_c N(N-1)}{\left(\frac{1}{M^d}\sum_c N\right)^2}, \quad (4)$$

όπου η άθροιση υπονοείται ότι γίνεται σε όλα τα κελιά. Αυτή η ποσότητα αποτελεί την παραγοντική ροπή 2ης τάξης. Ουσιαστικά η ποσότητα $N(N$-1) είναι ανάλογη με τα ζεύγη σημείων που βρίσκονται σε ένα κελί της διαμέρισης M. Η διαμέριση M συνδέεται με την κλίμακα παρατήρησης l που είναι το μήκος της ακμής του κελιού. Η σχέση τους είναι:

$$M=\frac{L}{l}\Rightarrow l=\frac{L}{M}. \quad (5)$$

Έτσι ουσιαστικά η F_2 εκφράζει τη συμπεριφορά του αριθμού των ζευγών που σχηματίζονται, ανά κλίμακα παρατήρησης. Τα ζεύγη πάλι σχετίζονται με τη συσχέτιση των σημείων. Αν ο ολικός αριθμός των σημείων που έχουμε είναι N_m, το άθροισμα στον παρονομαστή θα είναι πάντοτε N_m, για όλες τις διαμερίσεις.

Το σκόρπισμα των N_m σημείων μέσα στο κουτί L^d, αποτελεί ένα «γεγονός», δηλαδή μία καταμέτρηση από ένα πείραμα. Προκειμένου να έχουμε στατιστικά καλύτερα αποτελέσματα μπορούμε να επαναλάβουμε με άλλες μετρήσεις συγκεντρώνοντας έτσι N_e γεγονότα. Για λόγους απλότητας θεωρούμε ότι όλα τα γεγονότα έχουν τον ίδιο αριθμό μετρημένων σημείων N_m. Τότε στην (4), για κάθε διαμέριση M, θα πρέπει να επαναλάβουμε τη μέτρηση των αριθμών N για κάθε γεγονός και να πάρουμε τη μέση τιμή σε όλα τα γεγονότα. Σε αυτήν περίπτωση η F_2 διαμορφώνεται σε:

$$F_2(M)=\frac{\frac{1}{M^d}\left\langle\sum_c N(N-1)\right\rangle_e}{\left(\frac{1}{M^d}N_m\right)^2}\Rightarrow F_2(M)=\frac{M^d}{N_m^2}\left\langle\sum_c N(N-1)\right\rangle_e. \quad (6)$$

Σε περίπτωση που στο σύστημα ενυπάρχει ένας νόμος δύναμης με έναν χαρακτηριστικό εκθέτη d_F, αποδεικνύεται ότι ο συνολικός αριθμός των ζευγών που καταμετρώνται σε μία διαμέριση μεταβάλλονται με την κλίμακα παρατήρησης ως:

$$\left\langle\sum_c N(N-1)\right\rangle_e \propto l^{d_F} \propto M^{-d_F}. \quad (7)$$

Έτσι η F_2 μεταβάλλεται με την κλίμακα παρατήρησης ή τη διαμέριση ως:

$$F_2(M)\propto l^{d_F-d}\propto M^{d-d_F}=\left(M^d\right)^{1-\frac{d_F}{d}}. \quad (8)$$

Αυτό σημαίνει ότι αν σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση της F_2 σε συνάρτηση με το M^d σε λογαριθμικό διάγραμμα θα πρέπει να εμφανίζεται γραμμικό τμήμα με κλίση 1-(d_F/d). Συνεπώς η μελέτη της F_2 επιτρέπει την ανίχνευση της παρουσίας ενός νόμου δύναμης σε ένα καταμετρούμενο σημειοσύνολο. Συνήθως ο νόμος δύναμης εμφανίζεται μετά από τις πρώτες διαμερίσεις, καθώς εκεί υπάρχουν πιο έντονα οριακά φαινόμενα.

Ενδιαφέρον, φυσικά, παρουσιάζει η ανίχνευση ενός μη τετριμμένου νόμου δύναμης με εκθέτη $d_F<d$, γιατί αυτό υποδηλώνει ότι υπάρχει μία συγκεκριμένη δυναμική που τον παράγει. Η F_2 θα παρουσιάζει τότε μία αύξηση με τις διαμερίσεις M. Η αντίθετη περίπτωση είναι τα σημεία να βρίσκονται με τυχαίο τρόπο σκορπισμένα, όπως για παράδειγμα αν έχουν παραχθεί ομοιόμορφα μέσα στο αρχικό κουτί. Τέτοια εικόνα εμφανίζει συνήθως και ο θόρυβος που υπάρχει συχνά σε διάφορα πειράματα. Τότε αναμένεται να είναι $d_F=d$ και η κλίση της F_2 θα είναι μηδενική.

Πολλές φορές στις πειραματικές μετρήσεις συνυπάρχουν σημειοσύνολα που προέρχονται από μη τετριμμένη δυναμική, που συνδέονται με εκθέτη $d_F<d$ με σημειοσύνολα που οφείλονται σε τυχαίο θόρυβο και παρουσιάζουν τον εκθέτη του χώρου εμβάπτισης d. Η ανάλυση με την F_2 τότε δεν θα εμφανίζει την ενδιαφέρουσα κλίση d_F από τις μικρές διαμερίσεις, αλλά για να τη δούμε θα πρέπει να

προχωρήσουμε σε μεγαλύτερες. Καθώς μεγαλώνει το ποσοστό του θορύβου η εμφάνιση του νόμου δύναμης που μας ενδιαφέρει σπρώχνεται σε μεγαλύτερες διαμερίσεις.

Υλοποίηση

Για λόγους απλότητας θα μελετηθούν πειραματικά δεδομένα από μονοδιάστατο σύστημα. Επομένως θα έχουμε d=1. Στα αρχεία που θα σας δοθούν θα υπάρχουν καταγεγραμμένα N_m σημεία ανά γεγονός και συνολικά N_e γεγονότα. Η μορφή του αρχείου θα είναι ως εξής:

N_m(=αριθμός σημείων ανά γεγονός) i_e(=τρέχων αριθμός γεγονότος)

x_1

x_2

…

x_m

Τα x_j είναι οι πειραματικές μετρήσεις ανά γεγονός. Στα αρχεία θα υπάρχει ένα αρχείο που θα έχει μόνο θόρυβο, ένα αρχείο που δεν θα έχει καθόλου θόρυβο δηλαδή θα περιέχει έναν καθαρό νόμο δύναμης και τουλάχιστον ένα αρχείο που θα έχει μόνο κάποιο ποσοστό θορύβου (ανάμεσα σε 0% και 100%).

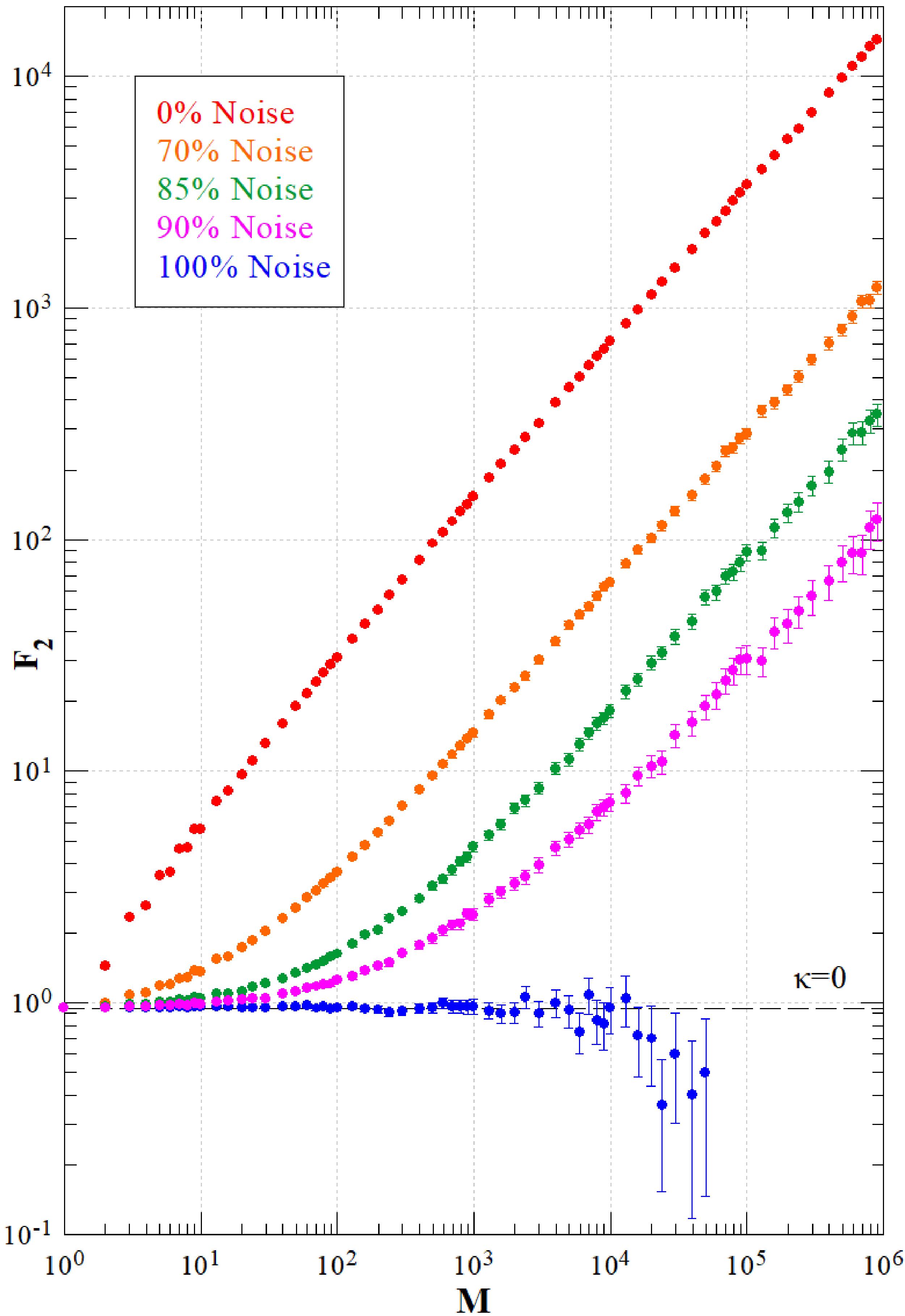
1. Γράψτε πρόγραμμα που να διαβάζει τα πειραματικά σας δεδομένα. Στη συνέχεια βρείτε από όλα τα γεγονότα τη μικρότερη τιμή x_{min} και τη μεγαλύτερη x_{max}. Το κουτί μέσα στο οποίο θα κάνετε την ανάλυσή σας θα είναι στην προκειμένη περίπτωση ένα ευθύγραμμο τμήμα μήκους L=x_{max} - x_{min}.
2. Χωρίστε το μήκος L σε M διαμερίσεις. Έχετε τώρα κελιά που είναι τμήματα μήκους $l=L/M$. Πάρτε τα σημεία από κάθε γεγονός και τοποθετήστε τα όλα στα αντίστοιχα κελιά. Μετρήστε σε κάθε κελί τον αριθμό $N(N$-1). Προσέξτε ότι η διαδικασία αυτή αλγοριθμικά είναι πολύ πιο αποδοτική από το να παίρνετε κάθε κελί και να ελέγχετε ποια σημεία πέφτουν μέσα στο συγκεκριμένο κελί. Αθροίστε από όλα τα κελιά την ποσότητα $N(N$-1). Αυτό είναι το αποτέλεσμα $\sum_c N(N-1)$ από το συγκεκριμένο γεγονός. Επαναλάβετε τη διαδικασία για όλα τα γεγονότα. Το τελικό σας άθροισμα διαιρέστε το με τον αριθμό των γεγονότων N_e ώστε να πάρετε τη μέση τιμή ανά γεγονός. Υπολογίστε την $F_2(M)$ σύμφωνα με τη σχέση (6).
3. Επαναλάβετε το βήμα 2 για διάφορες τιμές του M. Επειδή θέλουμε να παράγουμε λογαριθμικό διάγραμμα δε συμφέρει να υπολογίζετε τις τιμές της F_2 για όλα τα M από το 1 έως μία τιμή M_{max}. Αντίθετα, για κάθε τάξη μεγέθους του M που είναι 10^{ν}, υπολογίστε την F_2 μόνο για τις τιμές $M=\mu 10^{\nu}$, μ=1,2,…,9. Έτσι μπορείτε να φτάσετε εύκολα έως ν=6.
4. Κατασκευάστε λογαριθμικό διάγραμμα της F_2 σε συνάρτηση με το M. Ανιχνεύστε αν υπάρχει μη τετριμμένος νόμος δύναμης. Αν υπάρχει, βρείτε που υπάρχει γραμμικό τμήμα και σε αυτήν την περιοχή χαράξτε ευθεία και υπολογίστε την κλίση κ και το σφάλμα της. Εξάγετε την τιμή και το σφάλμα της d_F από τη σχέση (8). Μετά από ποια διαμέριση και μετά από ποια κλίμακα παρατήρησης εμφανίζεται ο νόμος δύναμης;
5. Επαναλάβετε τα βήματα 1-4 για κάθε αρχείο που θα σας δοθεί.
6. Διακρίνετε ποιο αρχείο δεν περιέχει καθόλου θόρυβο, ποιο έχει μόνο θόρυβο και ποιο ή ποια έχουν κάποιο ποσοστό θορύβου.
7. Στο τέλος της επεξεργασίας σας γράψτε εργαστηριακή αναφορά εξηγώντας αναλυτικά τους υπολογισμούς σας, καταγράφοντας τα συμπεράσματά σας και ενσωματώνοντας πίνακες και διαγράμματα. Σε παράρτημα καταγράψτε τον κώδικά σας. Σε κάθε τμήμα του κώδικά σας θα πρέπει να έχετε ενσωματώσει αρκετές επεξηγήσεις που να εξηγούν σε κάθε βήμα τη διαδικασία που ακολουθείτε. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε ότι πακέτα λογισμικού θέλετε. Ενδεικτικά η αναφορά σας θα περιλαμβάνει διάγραμμα όπως αυτό του Σχ. 1.

Αναφορές

[1] N.G. Antoniou, F.K. Diakonos, A.S. Kapoyannis, K.S. Kousouris, Phys. Rev. Lett. **97**, 032002 (2006)

[2] A. Bialas, R. Peshanski, Nucl. Phys. **B** 273, 703 (1986)

[3] A. Bialas, R. Peshanski, Nucl. Phys. **B** 308, 857 (1988)



Σχ. 1. Η παραγοντική ροπή 2ης τάξης F_2 σα συνάρτηση της διαμέρισης M για συστήματα που υπακούουν σε νόμο δύναμης με μη τετριμμένο εκθέτη, αλλά περιέχουν διάφορα ποσοστά θορύβου. Παρουσιάζονται και τα σφάλματα που οφείλονται στις στατιστικές διακυμάνσεις ανάμεσα στα διάφορα γεγονότα (δεν θα υπολογιστούν στα πλαίσια της συγκεκριμένης εργασίας).