Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής
Εξετάσεις στα Αστροφυσικά Ρευστά, 12 Σεπτεμβρίου 2024
Διάρκεια εξέτασης 2 $\frac{1}{2}$ ώρες, Καλή επιτυχία (★ = bonus ερωτήματα)

Ονοματεπώνυμο: ______________________________, AM: ______________

Έχω παραδώσει εργασίες: NAI ☐ OXI ☐

Θέμα 1$^{\text{ο}}$ (3.75 μονάδες):

Έστω πλάσμα σε μαγνητοστατική ισορροπία, με θερμική πίεση $P(z)$ και μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B} = B_0 [\cos(c_1 z)\hat{x} + \sin(c_2 z)\hat{y}]$, όπου B_0, c_1, c_2 γνωστές σταθερές.

★ (α) Ποιες οι δυναμικές γραμμές του πεδίου;

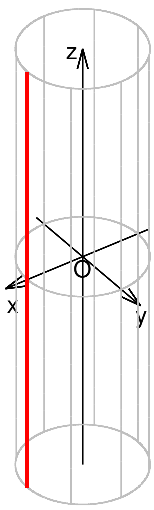
(β) Ποια η $P(z)$ αν για $z = 0$ είναι $P|_{z=0} = \dfrac{B_0^2}{8\pi}$;

(γ) Ποια η μαγνητική πίεση και ποια η σχέση της με την θερμική πίεση;

(δ) Γίνεται το παραπάνω μαγνητικό πεδίο να είναι μηδενικής δύναμης;

Θέμα 2$^{\text{ο}}$ (2.5 μονάδες):

Έστω ιδεατό πλάσμα στην κυλινδρική στήλη του σχήματος, αρχικά στατικό και με ομογενές μαγνητικό πεδίο $B_0\hat{z}$. Η στήλη εκτείνεται από $z = -L/2$ ως $z = L/2$. Από την στιγμή $t = 0$ και μετά το πλάσμα αποκτά περιστροφική ταχύτητα $\boldsymbol{u} = \Omega\varpi\cos(\pi z/L)\hat{\phi}$ (όπου Ω σταθερά).



(α) Ποιο θα είναι το μαγνητικό πεδίο σε μεταγενέστερους χρόνους $t > 0$;

(β) Ποια η ροή Poynting στη $\hat{z}$ κατεύθυνση και τι εκφράζει;

Θέμα 3$^{\text{ο}}$ (3.75 μονάδες):

Θέλουμε να μελετήσουμε πως τροποποιούνται τα ηχητικά κύματα σε ένα μοριακό νέφος αδιατάρακτης πυκνότητας ρ_0 και ταχύτητας ήχου c_s, όταν λάβουμε υπόψη την ιδιοβαρύτητα (που αλλάζει λόγω της αλλαγής στην πυκνότητα).

Θεωρήστε δεδομένο ότι η σχέση διασποράς που προκύπτει έχει την μορφή

$$\omega^2 = c_s^2 k^2 - X,$$

όπου ο όρος X εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά του αδιατάρακτου νέφους και την σταθερά G.

(α) Βρείτε την προσεγγιστική έκφραση του όρου X χρησιμοποιώντας διαστατική ανάλυση. (Θεωρήστε γνωστή την αδιάστατη πολλαπλασιαστική σταθερά C.)

(β) Ποιο χαρακτηριστικό μήκος κύματος λ_J αντιστοιχεί στην μετάβαση από κύμα ($\omega^2 > 0$) σε αστάθεια ($\omega^2 < 0$);

(γ) Ποια η μάζα M_J που αντιστοιχεί στο μήκος λ_J και ποια η σημασία της στην Αστροφυσική;

<u>ΛΥΣΕΙΣ:</u>

<u>Θέμα 1ο</u>:

(α) $\dfrac{dx}{B_x} = \dfrac{dy}{B_y} = \dfrac{dz}{B_z} \Leftrightarrow \dfrac{dx}{\cos(c_1 z)} = \dfrac{dy}{\sin(c_2 z)} = \dfrac{dz}{0}$, άρα είναι ευθείες $\dfrac{x}{\cos(c_1 z)} - \dfrac{y}{\sin(c_2 z)} =$ σταθερά στα επίπεδα $z =$ σταθερά.

(β) Από $0 = -\nabla P + \dfrac{(\nabla \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{B}}{4\pi}$ βρίσκουμε $\dfrac{dP}{dz} = \dfrac{B_0^2}{4\pi} [c_1 \sin(c_1 z) \cos(c_1 z) - c_2 \sin(c_2 z) \cos(c_2 z)]$ και ολοκληρώνοντας (με δεδομένη την τιμή στο $z = 0$) $P = \dfrac{B_0^2}{8\pi} \left[\sin^2(c_1 z) + \cos^2(c_2 z)\right]$.

(γ) Η μαγνητική πίεση είναι $\dfrac{B^2}{8\pi} = \dfrac{B_0^2}{8\pi} \left[\cos^2(c_1 z) + \sin^2(c_2 z)\right]$. Το άθροισμά της με την θερμική πίεση είναι σταθερό, κάτι που αναμένεται από την εξίσωση μαγνητοστατικής ισορροπίας, διότι η τάση είναι μηδενική (ισχύει $(\boldsymbol{B} \cdot \nabla)\boldsymbol{B} = 0$, ή αλλιώς οι δυναμικές γραμμές είναι ευθείες).

(δ) Γίνεται, αρκεί $c_1 = c_2$ οπότε η πυκνότητα μαγνητικής δύναμης μηδενίζεται (ισοδύναμα η θερμική πίεση είναι σταθερή).
Αυτό προκύπτει και απαιτώντας το ρεύμα να έχει ίδια διεύθυνση με το πεδίο, δηλ. $\nabla \times \boldsymbol{B} = \alpha \boldsymbol{B}$.

<u>Θέμα 2ο</u>:

(α) Αρχικά είναι $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B} = u B_0 \hat{\varpi}$ και $\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}) = B_0 \dfrac{\partial u}{\partial z} \hat{\phi}$ οπότε θα δημιουργηθεί αζιμουθιακό πεδίο και μετά από μικρό χρονικό διάστημα t θα είναι $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}|_{t=0} + \left.\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\right|_{t=0} t = B_0 \hat{z} + B_0 \dfrac{\partial u}{\partial z} t \hat{\phi}$.
Το αζιμουθιακό πεδίο που δημιουργείται δεν τροποποιεί την $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}$, επομένως σε κάθε μεταγενέστερο χρόνο θα ισχύει $\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = B_0 \dfrac{\partial u}{\partial z} \hat{\phi}$ και $\boldsymbol{B} = B_0 \hat{z} + B_0 \dfrac{\partial u}{\partial z} t \hat{\phi}$.

(β) $\boldsymbol{S} = \dfrac{c}{4\pi} \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B} = -\dfrac{(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{B}}{4\pi} = -\dfrac{(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{B})\boldsymbol{B} - B^2 \boldsymbol{u}}{4\pi}$. Στην $\hat{z}$ κατεύθυνση είναι $S_z = -\dfrac{u B_\phi B_z}{4\pi}$. Εκφράζει την ροή ενέργειας από την περιοχή περιστροφής κοντά στο επίπεδο $z = 0$ προς μικρότερα και μεγαλύτερα z. Η ενέργεια αυτή αποθηκεύεται στο μαγνητικό πεδίο, του οποίου η ενεργειακή πυκνότητα $B^2/8\pi$ αυξάνει με το χρόνο.

<u>Θέμα 3ο</u>:

(α) Με $X = C \rho_0^\alpha c_s^\beta G^\gamma$ η διαστατική ανάλυση, απαιτώντας το X να έχει μονάδες $1/[T]^2$, δίνει $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$, δηλ. $X = C \rho_0 G$.
Η πλήρης διαταρακτική μελέτη δίνει $C = 4\pi$.

(β) Η μετάβαση $\omega = 0$ αντιστοιχεί σε $k_J = \dfrac{X^{1/2}}{c_s} = \dfrac{(C \rho_0 G)^{1/2}}{c_s}$ και άρα $\lambda_J = \dfrac{2\pi}{k_J} = \dfrac{2\pi c_s}{(C \rho_0 G)^{1/2}}$.

(γ) Η αντίστοιχη μάζα είναι $M_J = \rho_0 \lambda_J^3 = \dfrac{(2\pi)^3}{C^{3/2}} \dfrac{c_s^3}{\rho_0^{1/2} G^{3/2}}$ και ουσιαστικά εκφράζει την μάζα που περικλείεται σε σφαίρα ακτίνας $\lambda_J/2$.
Ίδιας τάξης μεγέθους αποτέλεσμα δίνει η ακριβέστερη σχέση $M_J = \rho_0 \dfrac{4\pi (\lambda_J/2)^3}{3}$.

Το φαινόμενο που μελετούμε είναι η αστάθεια Jeans που γενικά αποτελεί το βασικό λόγο ύπαρξης ανομοιογενειών στο Σύμπαν, ειδικότερα της δημιουργίας αστέρων σε μοριακά νέφη. Όταν η μάζα είναι μεγαλύτερη της M_J η πίεση δεν είναι ικανή να συγκρατήσει την βαρύτητα και το νέφος καταρρέει.