Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής
Εξετάσεις στα Αστροφυσικά Ρευστά, 21 Μαΐου 2024
Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες, Καλή επιτυχία (★ = bonus ερωτήματα)

Θέμα 1ο (2.5 μονάδες):

Υδροδυναμικός στατικός δίσκος άπειρων διαστάσεων έχει πυκνότητα $\rho(z) = \rho_0 \frac{|z|}{H} e^{-z^2/H^2}$ και πίεση $P(z) = P_0 \left[1 - \left(1 - e^{-z^2/H^2}\right)^2\right]$.
(α) Τι εκφράζουν οι σταθερές H και ρ_0;
Πως εξαρτάται η σταθερά P_0 από τα H, ρ_0, G;
(β) Ποια είναι η ένταση της ιδιοβαρύτητας του δίσκου; (Γνωστά είναι τα H, ρ_0, G.)
(γ) Βρείτε την σταθερά P_0.

Θέμα 2ο (2.5 μονάδες):

Ένα επίπεδο ωστικό κύμα σε μια υδροδυναμική ροή κινείται με σταθερή ταχύτητα u_s, συγκεκριμένα βρίσκεται στη θέση $x_s = u_s t$ το χρόνο t. Αν για $x > x_s$ το ρευστό έχει πυκνότητα ρ_1, πίεση P_1 και μηδενική ταχύτητα, βρείτε τα αντίστοιχα μεγέθη στην περιοχή $x < x_s$.
Ο πολυτροπικός δείκτης γ θεωρείται γνωστός.

Θέμα 3ο (2.5 μονάδες):

Η περιοχή $x > 0$ είναι γεμάτη με ομογενές στατικό πλάσμα αγωγιμότητας σ.
(α) Αποδείξτε τη σχέση που δίνει το συντελεστή μαγνητικής διάχυσης σε αυτό το πλάσμα.
(β) Στην περιοχή $x < 0$ υπάρχει χρονομεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο το οποίο για $x = 0$ είναι $\boldsymbol{B}|_{x=0} = B_0 \cos(\omega t)\hat{y}$ (με B_0 και ω σταθερές).
Πόσο διεισδύει το πεδίο μέσα στο πλάσμα;
Υπόδειξη: Βρείτε το πεδίο θεωρώντας ότι έχει μορφή $\boldsymbol{B} = \mathrm{Re}\left[C e^{-i\omega t + ikx}\right]\hat{y}$.

Θέμα 4ο (2.5 μονάδες):

Τα ηλεκτρόνια σε ένα μαγνητισμένο πλάσμα εκτελούν αφενός κίνηση Larmor και αφετέρου συγκρούονται με άλλα ηλεκτρόνια ή με πρωτόνια. Εκτιμήστε τις χρονικές κλίμακες που χαρακτηρίζουν αυτές τις διαδικασίες, θεωρώντας γνωστά τα μεγέθη n, T, B.

ΛΥΣΕΙΣ:

Θέμα 1ο:

(α) Το πάχος του δίσκου είναι $\sim H$ και η μέγιστη πυκνότητα $\sim \rho_0$.
Μελετώντας την συνάρτηση $\rho(z)$ για την οποία $\rho'(z) = \frac{\rho_0}{H} e^{-z^2/H^2}(1 - 2z^2/H^2)$ συμπεραίνουμε ότι η πυκνότητα είναι μηδενική για $z = 0$, αυξάνεται μέχρι την τιμή $\frac{\rho_0}{\sqrt{2e}}$ στο ύψος $z = H/\sqrt{2}$ και μετά φθίνει και πρακτικά μηδενίζεται σε ύψος $z = H\sqrt{5}$.
Με διαστατική ανάλυση προκύπτει $P_0 \propto G\rho_0^2 H^2$.
(β) Από νόμο Gauss $g' = -4\pi G\rho$ για $z > 0$ προκύπτει $g(z) = -2\pi G\rho_0 H \int_0^z \frac{2z}{H^2} e^{-z^2/H^2} = -2\pi G\rho_0 H \left(1 - e^{-z^2/H^2}\right)$ (το ίδιο από ολοκληρωτικό νόμο Gauss). Προφανώς $g(-z) = -g(z)$.
(γ) $P' = \rho g = -2\pi G\rho_0^2 z e^{-z^2/H^2}\left(1 - e^{-z^2/H^2}\right) \Leftrightarrow$
$P(z) = -\pi G\rho_0^2 H^2 \int_\infty^z \frac{2z}{H^2} e^{-z^2/H^2}\left(1 - e^{-z^2/H^2}\right) dz = \frac{\pi G\rho_0^2 H^2}{2}\left[1 - \left(1 - e^{-z^2/H^2}\right)^2\right]$, δηλ. $P_0 = \frac{\pi G\rho_0^2 H^2}{2}$.

Θέμα 2ο:

Το σύστημα του ωστικού κύματος τρέχει με ταχύτητα $u_s\hat{x}$. Στο σύστημα αυτό το μέρος 1 έχει ταχύτητα $\boldsymbol{u}_1 = u_1\hat{x}$ με $u_1 = -u_s$ και ο αντίστοιχος αριθμός Mach είναι $M_1 = \frac{u_1}{c_{s1}}$ όπου $c_{s1} = \sqrt{\gamma P_1/\rho_1}$. Οι σχέσεις $\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1 + 2/M_1^2}$, $\frac{P_2}{P_1} = \frac{2\gamma M_1^2 - \gamma + 1}{\gamma + 1}$ δίνουν τα ρ_2 και P_2. Η σχέση $\frac{u_1}{u_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}$ δίνει $u_2 = -u_s \frac{\gamma - 1 + 2/M_1^2}{\gamma + 1}$ και άρα στο αρχικό σύστημα αναφοράς η ταχύτητα για $x < x_s$ είναι $\boldsymbol{u}|_{x<x_s} = u_2\hat{x} + \boldsymbol{u}_s = \frac{2}{\gamma + 1}\left(1 - \frac{1}{M_1^2}\right)\boldsymbol{u}_s$.

Θέμα 3ο:

(α) Θεωρία $\eta = \frac{c^2}{4\pi\sigma}$.
(β) Θέτοντας $\boldsymbol{B} = B(x,t)\hat{y}$ πρέπει να βρούμε τη λύση της $\frac{\partial B}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 B}{\partial x^2}$ με οριακή συνθήκη $B|_{x=0} = B_0 \cos(\omega t)$.
Θεωρώντας ότι το πεδίο είναι το πραγματικό μέρος του μιγαδικού $B = Ce^{-i\omega t + ikx}$ (κάτι που είναι δυνατόν αφού η εξίσωση είναι γραμμική με σταθερούς συντελεστές), η διαφορική δίνει $k^2 = \frac{\omega}{\eta} i \Leftrightarrow k = \pm\frac{1+i}{\delta}$, όπου $\delta = \sqrt{\frac{2\eta}{\omega}}$. Τα δύο πρόσημα δίνουν λύσεις με $e^{-i\omega t + ikx} = e^{\mp x/\delta} e^{-i(\omega t \mp x/\delta)}$. Μόνο το πάνω πρόσημο είναι δεκτό, αφενός γιατί αντιστοιχεί σε εκθετική μείωση, αφετέρου γιατί αντιστοιχεί σε κύμα που οδεύει από την διαχωριστική προς το εσωτερικό του πλάσματος. Άρα $B = Ce^{-x/\delta} e^{-i(\omega t - x/\delta)}$ με $C = B_0$ λόγω της οριακής στο $x = 0$. Παίρνοντας το πραγματικό μέρος βρίσκουμε ότι το πεδίο μέσα στο πλάσμα είναι $\boldsymbol{B} = B_0 e^{-x/\delta}\cos(\omega t - x/\delta)\hat{y}$, όπου $\delta = \sqrt{\frac{2\eta}{\omega}}$ το επιδερμικό βάθος (κλίμακα που δείχνει σε πόσο μήκος διεισδύει το πεδίο μέσα στο πλάσμα).

Θέμα 4ο:

Περίοδος κίνησης Larmor $\tau_B = \frac{2\pi}{\omega_B} = \frac{2\pi m_e c}{eB}$.
Χρόνος μεταξύ κρούσεων $\tau_c = \frac{\ell}{v} = \frac{1/n\sigma}{v}$ με $v \sim \sqrt{k_\mathrm{B}T/m_e}$, $\sigma \sim \pi r_0^2$, $\frac{e^2}{r_0} \sim k_\mathrm{B}T$.