Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής
Εξετάσεις στα Αστροφυσικά Ρευστά, 15 Φεβρουαρίου 2023
Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες, Καλή επιτυχία (★ = bonus ερωτήματα)

Ονοματεπώνυμο: ____, ΑΜ: ________________

Έχω παραδώσει εργασίες: ΝΑΙ ☐ ΟΧΙ ☐

Θέμα 1$^{\text{ο}}$ (3.4 μονάδες):

Έστω η στάσιμη, σφαιρικά συμμετρική προσρόφηση ύλης στην κεντρική περιοχή ενός γαλαξία, υπό την επίδραση βαρύτητας $\vec{g} = -\dfrac{GM}{r^2}\hat{r}$ λόγω της κεντρικής μελανής του οπής. Θεωρήστε τη ροή ισόθερμη με ταχύτητα ήχου c_s και την ταχύτητα μη-σχετικιστική και ακτινική $\vec{u} = u(r)\hat{r}$.
(α) Γράψτε την εξίσωση που εκφράζει την διατήρηση μάζας και δίνει τον ρυθμό προσρόφησης ύλης $\dot{M}$.
(β) Γράψτε την εξίσωση ορμής και το ισοδύναμο ολοκλήρωμα Bernoulli.
(γ) Θεωρώντας ότι η ροή ξεκινά από $r = \infty$ με πυκνότητα ρ_∞ και αμελητέα ταχύτητα υπολογίστε την τιμή του ολοκληρώματος Bernoulli.
(δ) Συνδυάζοντας το ολοκλήρωμα Bernoulli και την διατήρηση μάζας δείξτε ότι η ταχύτητα καθορίζεται από την εξίσωση
$$\frac{u^2}{2} + c_s^2 \ln \frac{\dot{M}}{4\pi r^2 \rho_\infty |u|} - \frac{GM}{r} = 0.$$
★ (ε) Δείξτε ότι υπάρχει ηχητικό κρίσιμο σημείο όπου $u_c = -c_s$ στη θέση $r_c = \dfrac{GM}{2c_s^2}$.
(στ) Βρείτε το ρυθμό προσρόφησης $\dot{M}$ απαιτώντας η λύση να περνά από το κρίσιμο σημείο. (Δεδομένα είναι τα c_s, ρ_∞ και GM).

Θέμα 2$^{\text{ο}}$ (3.3 μονάδες):

(α) Μία στήλη πλάσματος ακτίνας R βρίσκεται σε μαγνητοστατική ισορροπία. Αν το ρεύμα που την διαρρέει έχει πυκνότητα $\vec{J} = \dfrac{2I}{\pi R^2}\left(1 - \dfrac{\varpi^2}{R^2}\right)\hat{z}$ σε κυλινδρικές συντεταγμένες με άξονα z τον άξονα της στήλης (I είναι το συνολικό ρεύμα) βρείτε την πίεση στον άξονα.
Υπόδειξη: Πρέπει (α$_1$) να βρείτε το μαγνητικό πεδίο της στήλης και (α$_2$) να επιλύσετε την εξίσωση μαγνητοστατικής ισορροπίας.
(β) Ποιο μέρος της πυκνότητας μαγνητικής δύναμης αντιστοιχεί στην μαγνητική πίεση και ποιο στην τάση;

Θέμα 3$^{\text{ο}}$ (3.3 μονάδες):

Έμβολο δημιουργεί ισχυρό ωστικό κύμα κινούμενο με ταχύτητα u_ε μέσα σε σωλήνα με στατικό ρευστό πυκνότητας ρ_1 και πολυτροπικού δείκτη γ.
(α) Ποια η ταχύτητα του ωστικού κύματος;
(β) Ποια η πυκνότητα και η πίεση στην περιοχή 2 μεταξύ εμβόλου και κύματος;
(γ) Ποιος ο λόγος μεταξύ της πυκνότητας μακροσκοπικής ενέργειας $\rho_2 u_\varepsilon^2/2$ στην περιοχή 2 και της πυκνότητας μικροσκοπικής (εσωτερικής) ενέργειας στην ίδια περιοχή;
★ (δ) Βρείτε τον λόγο του ερωτήματος (γ) συναρτήσει του αριθμού M_1 στην γενική περίπτωση που το ωστικό κύμα δεν είναι απαραίτητα ισχυρό.

ΛΥΣΕΙΣ:

Θέμα 1ο:

(α) $4\pi r^2 \rho u = -\dot{M}$.

(β) $u\dfrac{du}{dr} = -\dfrac{c_s^2}{\rho}\dfrac{d\rho}{dr} - \dfrac{GM}{r^2}$, $\dfrac{u^2}{2} + c_s^2 \ln\rho - \dfrac{GM}{r} = E$.

(γ) $E = c_s^2 \ln\rho_\infty$, άρα $\dfrac{u^2}{2} + c_s^2 \ln\dfrac{\rho}{\rho_\infty} - \dfrac{GM}{r} = 0$.

(δ) Η ζητούμενη προκύπτει αντικαθιστώντας $\rho = \dfrac{\dot{M}}{4\pi r^2 |u|}$ στο ολοκλήρωμα Bernoulli.

(ε) Η διαφορική που καθορίζει την ταχύτητα προκύπτει είτε από την εξίσωση της ορμής (αντικαθιστώντας $\rho = \dfrac{\dot{M}}{4\pi r^2|u|}$) είτε παραγωγίζοντας την σχέση του ερωτήματος (δ) και είναι $\dfrac{du}{dr} = \dfrac{u}{r}\dfrac{2c_s^2 - GM/r}{u^2 - c_s^2}$. Είναι $\dfrac{0}{0}$ στο ηχητικό κρίσιμο σημείο, επομένως σε αυτό ισχύουν $u_c^2 - c_s^2 = 0 \Leftrightarrow u_c = -c_s$ και $2c_s^2 - \dfrac{GM}{r_c} = 0 \Leftrightarrow r_c = \dfrac{GM}{2c_s^2}$.

(στ) Η σχέση του ερωτήματος (δ) αν εφαρμοστεί στο κρίσιμο σημείο δίνει $\dfrac{u_c^2}{2} + c_s^2 \ln\dfrac{\dot{M}}{4\pi r_c^2 \rho_\infty |u_c|} - \dfrac{GM}{r_c} = 0$. Αντικαθιστώντας $u_c = -c_s$ και $r_c = \dfrac{GM}{2c_s^2}$ προκύπτει $\dot{M} = \dfrac{\pi e^{3/2}\rho_\infty G^2 M^2}{c_s^3}$.

Θέμα 2ο:

(α_1) Το πεδίο είναι μόνο αζιμουθιακό. Ο νόμος Ampére $\oint \vec{B}\cdot d\vec{r} = \dfrac{4\pi}{c}\iint \vec{J}\cdot d\vec{a}$ σε βρόχο ακτίνας ϖ δίνει $B_\phi 2\pi\varpi = \dfrac{4\pi}{c}\displaystyle\int_0^\varpi J_z 2\pi\varpi\, d\varpi$. Αντικαθιστώντας το ρεύμα και ολοκληρώνοντας βρίσκουμε $\vec{B} = \dfrac{2I}{cR^2}\left(2\varpi - \dfrac{\varpi^3}{R^2}\right)\hat{\phi}$.

(α_2) Η εξίσωση μαγνητοστατικής ισορροπίας $0 = -\vec{\nabla}P + \dfrac{\vec{J}\times\vec{B}}{c}$ με $P = P(\varpi)$ δίνει $\dfrac{dP}{d\varpi} = -\dfrac{4I^2}{\pi c^2 R^4}\left(2\varpi - 3\dfrac{\varpi^3}{R^2} + \dfrac{\varpi^5}{R^4}\right)$. Ολοκληρώνοντας από τον άξονα όπου $P = P_c$ μέχρι την επιφάνεια όπου $P = 0$ βρίσκουμε την πίεση στον άξονα $P_c = \dfrac{5I^2}{3\pi c^2 R^2}$.

(β) Το μέρος που αντιστοιχεί στην μαγνητική πίεση είναι $-\vec{\nabla}\dfrac{B^2}{8\pi} = -\dfrac{B}{4\pi}\dfrac{dB}{d\varpi}\hat{\varpi} = -\dfrac{1}{4\pi}\left(\dfrac{2I}{cR^2}\right)^2\left(2\varpi - \dfrac{\varpi^3}{R^2}\right)\left(2 - 3\dfrac{\varpi^2}{R^2}\right)\hat{\varpi}$.
Η ακτίνα καμπυλότητας των γραμμών είναι $\mathcal{R} = \varpi$ και το μοναδιαίο προς το κέντρο καμπυλότητας είναι $\hat{n} = -\hat{\varpi}$, άρα το μέρος που αντιστοιχεί στην τάση είναι $\dfrac{B^2}{4\pi\mathcal{R}}\hat{n} = \dfrac{B^2}{4\pi\varpi}(-\hat{\varpi}) = -\dfrac{1}{4\pi\varpi}\left(\dfrac{2I}{cR^2}\right)^2\left(2\varpi - \dfrac{\varpi^3}{R^2}\right)^2\hat{\varpi}$.
Εύκολα επαληθεύεται ότι το άθροισμα των δύο μερών είναι ίσο με την πυκνότητα δύναμης $\vec{J}\times\vec{B}/c$ που βρήκαμε παραπάνω.

Θέμα 3ο:

(α) Στο σύστημα του ωστικού κύματος είναι $u_1 = u_s$ και $u_2 = u_s - u_\varepsilon$. Για ισχυρό ωστικό κύμα ο λόγος συμπίεσης είναι $r = \dfrac{\gamma+1}{\gamma-1}$ επομένως ισχύει $\dfrac{u_1}{u_2} = r \Leftrightarrow u_s = \dfrac{\gamma+1}{2}u_\varepsilon$.

(β) Είναι $\rho_2 = r\rho_1 = \dfrac{\gamma+1}{\gamma-1}\rho_1$. Ο λόγος πιέσεων είναι $\dfrac{P_2}{P_1} = \dfrac{2\gamma}{\gamma+1}M_1^2$ με $M_1^2 = \dfrac{u_s^2}{\gamma P_1/\rho_1}$, άρα $P_2 = \dfrac{2}{\gamma+1}\rho_1 u_s^2 = \dfrac{\gamma+1}{2}\rho_1 u_\varepsilon^2$.

(γ) Η πυκνότητα μακροσκοπικής ενέργειας στο μέρος 2 είναι $\dfrac{\rho_2 u_\varepsilon^2}{2} = \dfrac{\gamma+1}{\gamma-1}\dfrac{\rho_1 u_\varepsilon^2}{2}$ και η πυκνότητα μικροσκοπικής ενέργειας στο μέρος 2 είναι $\dfrac{P_2}{\gamma-1} = \dfrac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}\rho_1 u_\varepsilon^2$.
Επομένως οι δύο πυκνότητες είναι ίσες (ο ζητούμενος λόγος είναι μονάδα).

(δ) Στη γενική περίπτωση ο λόγος συμπίεσης είναι $r = \dfrac{\gamma+1}{\gamma-1+2/M_1^2}$ οπότε $\rho_2 = \dfrac{\gamma+1}{\gamma-1+2/M_1^2}\rho_1$ και η σχέση $r = \dfrac{u_1}{u_2} = \dfrac{u_s}{u_s - u_\varepsilon}$ δίνει $u_\varepsilon = \dfrac{2(1-1/M_1^2)}{\gamma+1}u_s$. Από το λόγο πιέσεων προκύπτει $P_2 = \dfrac{2\gamma M_1^2 - (\gamma-1)}{\gamma+1}P_1$. Αντικαθιστώντας τα παραπάνω στο ζητούμενο λόγο πυκνοτήτων ενεργειών και θέτοντας $\rho_1 u_s^2/\gamma P_1 = M_1^2$ βρίσκουμε $\dfrac{\rho_2 u_\varepsilon^2/2}{P_2/(\gamma-1)} = \dfrac{2\gamma(\gamma-1)(1-1/M_1^2)^2}{[2\gamma-(\gamma-1)/M_1^2](\gamma-1+2/M_1^2)}$.
Η σχέση $\dfrac{u_1}{u_2} = \dfrac{\gamma+1}{\gamma-1+2/M_1^2}$ με $M_1^2 = \dfrac{\rho_1 u_1^2}{\gamma P_1}$ και $u_1 = u_s$, $u_2 = u_s - u_\varepsilon$ δίνει $u_s^2 - \dfrac{\gamma+1}{2}u_\varepsilon u_s - \dfrac{\gamma P_1}{\rho_1} = 0 \Leftrightarrow u_s = \dfrac{\gamma+1}{4}u_\varepsilon + \sqrt{\left(\dfrac{\gamma+1}{4}u_\varepsilon\right)^2 + \dfrac{\gamma P_1}{\rho_1}}$ (η άλλη λύση του τριωνύμου είναι αρνητική και απορρίπτεται). Έτσι βρίσκουμε το $M_1 = u_s/c_{s1}$ συναρτήσει του u_ε/c_{s1} και μπορούμε να εκφράσουμε το αποτέλεσμα συναρτήσει του λόγου αυτού.