Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής
Εξετάσεις στα Αστροφυσικά Ρευστά, 16 Σεπτεμβρίου 2022
Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες, Καλή επιτυχία (★ = bonus ερωτήματα)

Ονοματεπώνυμο: ______________________________, AM: ______________

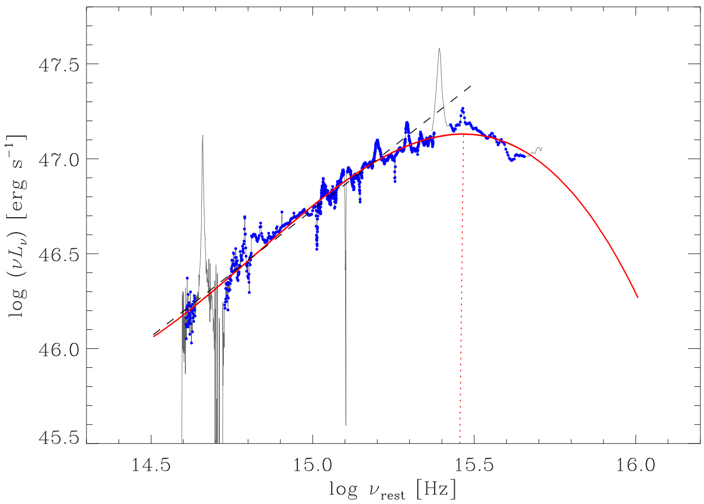
Έχω παραδώσει εργασίες: NAI ☐ ΟΧΙ ☐

Θέμα 1ο (3.4 μονάδες):

(α) Δείξτε ότι το βαρυτικό πεδίο με δυναμικό $\Phi_g = -\dfrac{GM}{\sqrt{r^2+R^2}}$, όπου M και R σταθερές, αντιστοιχεί σε συνεχή κατανομή μάζας με πυκνότητα $\rho = \dfrac{3R^2}{4\pi G^5 M^4}(-\Phi_g)^5$.
(β) Βρείτε την πίεση ώστε η κατανομή να βρίσκεται σε υδροστατική ισορροπία και δείξτε ότι είναι βαροτροπική με $\gamma = 6/5$.
(γ) Βρείτε τη βαρυτική δυναμική ενέργεια και τη συνολική εσωτερική ενέργεια. Σχολιάστε τη σχέση μεταξύ τους.
Δίνεται το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\xi^2\,d\xi}{(\xi^2+1)^3} = \frac{\pi}{16}$.

Θέμα 2ο (3.3 μονάδες):

(α) Εξηγήστε περιγραφικά πως προκύπτουν οι σχέσεις $L = \dfrac{GM\dot{M}}{2\varpi_{\rm in}}$ και $T_{\rm eff} = \left(\dfrac{3GM\dot{M}}{56\pi\sigma_{\rm SB}\varpi_{\rm in}^3}\right)^{1/4}$ σε ένα λεπτό αστροφυσικό δίσκο προσαύξησης.

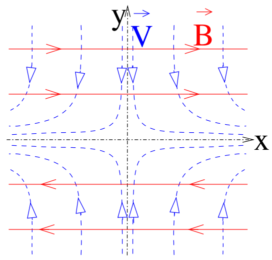


(β) Η παραπάνω παρατήρηση του blazar 4C 71.07 (από το άρθρο Raiteri et al 2019, MNRAS, 489, 1837) συμφωνεί πολύ καλά με το μοντέλο των λεπτών δίσκων. Εκτιμήστε την ολική ισχύ που εκπέμπει ο δίσκος (θεωρώντας την ίση με τη μέγιστη τιμή του νL_ν) και τη μέγιστη θερμοκρασία του δίσκου (με δεδομένο ότι η μέγιστη εκπομπή ενός μέλανος σώματος συμβαίνει στην ενέργεια $h\nu = 2.8 k_{\rm B} T$).

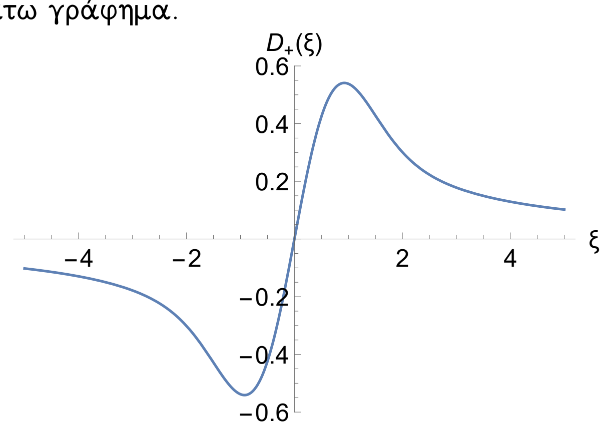
(γ) Η εσωτερική ακτίνα του δίσκου είναι $\eta\dfrac{GM}{c^2}$, όπου η παράμετρος η μπορεί να πάρει τιμές από 1 ως 6 ανάλογα με το πόσο γρήγορα περιστρέφεται η μελανή οπή. Εκτιμήστε ποιος μπορεί να είναι ο ρυθμός προσρόφησης και ποια η μάζα της μελανής οπής (για όλες τις δυνατές τιμές της η).

Θέμα 3ο (3.3 μονάδες):

Το δίπλα σχήμα δείχνει μια στάσιμη κατανομή πλάσματος όπου αντιπαράλληλες γραμμές μαγνητικού πεδίου (συνεχείς γραμμές) συναντώνται στο επίπεδο $y = 0$ και απελευθερώνουν την ενέργειά τους στην περιοχή αυτή.



Το πλάσμα έχει σταθερή πυκνότητα ρ, αγωγιμότητα $c^2/4\pi\eta$ και ταχύτητα $\boldsymbol{u} = kx\hat{x} - ky\hat{y}$ όπου k θετική σταθερά (διακεκομμένες γραμμές), ενώ το μαγνητικό πεδίο έχει μορφή $\boldsymbol{B} = B(y)\,\hat{x}$, με $B(-y) = -B(y)$.
(α) Ποια διαφορική εξίσωση ικανοποιεί η $B(y)$;
★ (β) Δείξτε ότι το μαγνητικό πεδίο γράφεται $B = B_0\,D_+(y/\ell)$ με $B_0 =$ σταθερά, $\ell = \sqrt{\dfrac{2\eta}{k}}$ και $D_+(\xi) = e^{-\xi^2}\displaystyle\int_0^\xi e^{w^2}dw$ η συνάρτηση Dawson που είναι η περιττή λύση της διαφορικής εξίσωσης $\dfrac{dD_+(\xi)}{d\xi} + 2\xi D_+(\xi) = 1$ και φαίνεται στο παρακάτω γράφημα.



Ποια η φυσική σημασία του μήκους ℓ; (Συνδέστε την με τα δύο μέρη του ηλεκτρικού πεδίου.)
(γ) Δείξτε ότι ισχύει $\dfrac{u^2}{2} + \dfrac{P}{\rho} + \dfrac{B^2}{8\pi\rho} =$ σταθερά.
(δ) Με δεδομένο ότι η εσωτερική ενέργεια του πλάσματος παραμένει σταθερή βρείτε την ισχύ που εκλύεται ανά μονάδα όγκου.

ΛΥΣΕΙΣ:

Θέμα 1^o:

(α) Ο νόμος Poisson δίνει $\nabla^2 \Phi_g = 4\pi G\rho \Leftrightarrow \rho = \frac{1}{4\pi G r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d\Phi_g}{dr}\right) = \frac{M}{4\pi r^2}\frac{d}{dr}\left[\frac{r^3}{(r^2+R^2)^{3/2}}\right] = \frac{3MR^2}{4\pi}\frac{1}{(r^2+R^2)^{5/2}} = \frac{3R^2}{4\pi G^5 M^4}(-\Phi_g)^5$.

(β) Για να ισχύει $\frac{\gamma}{\gamma-1}Q\rho^{\gamma-1} + \Phi_g = E \Leftrightarrow \frac{\gamma}{\gamma-1}Q\left(\frac{3R^2}{4\pi G^5 M^4}\right)^{\gamma-1}(-\Phi_g)^{5(\gamma-1)} + \Phi_g = E =$ σταθερά, πρέπει $E = 0$ (αναμενόμενο γιατί σε άπειρη απόσταση μηδενίζονται και η πυκνότητα και το δυναμικό), $5(\gamma-1) = 1 \Leftrightarrow \gamma = 6/5$ και $Q = \frac{G}{6}\left(\frac{4\pi M^4}{3R^2}\right)^{1/5}$.

Το ίδιο προκύπτει με ολοκλήρωση της $0 = -P' - \rho\Phi_g' \Leftrightarrow P' = \frac{3R^2}{4\pi G^5 M^4}\Phi_g^5\Phi_g' \Leftrightarrow P = \frac{R^2}{8\pi G^5 M^4}\Phi_g^6$ (η σταθερά ολοκλήρωσης μηδενίζεται ώστε στο άπειρο η πίεση να μηδενίζεται), δηλ. $P = Q\rho^{6/5}$ με $Q = \frac{G}{6}\left(\frac{4\pi M^4}{3R^2}\right)^{1/5}$.

(γ) Η βαρυτική δυναμική ενέργεια είναι $V = \frac{1}{2}\iiint \Phi_g \rho\, d\tau = -\frac{1}{2}\frac{3R^2}{4\pi G^5 M^4}\int_0^\infty \Phi_g^6 4\pi r^2\, dr = -\frac{3GM^2}{2R}\int_0^\infty \frac{R^3 r^2\, dr}{(r^2+R^2)^3}$. Το ολοκλήρωμα με αλλαγή μεταβλητής $\xi = r/R$ είναι ίσο με $\int_0^\infty \frac{\xi^2\, d\xi}{(\xi^2+1)^3} = \left[\frac{\xi(\xi^2-1)}{8(\xi^2+1)^2} + \frac{1}{8}\arctan\xi\right]_0^\infty = \frac{\pi}{16}$, άρα $V = -\frac{3\pi GM^2}{32R}$.

Η συνολική εσωτερική ενέργεια είναι $U = \int_0^\infty \frac{P}{\gamma-1}4\pi r^2\, dr = \frac{5GM^2}{2R}\int_0^\infty \frac{R^3 r^2\, dr}{(r^2+R^2)^3} = \frac{5\pi GM^2}{32R}$.

Η σχέση μεταξύ τους είναι $U = -\frac{5}{3}V$. Προκύπτει και από το θεώρημα Virial $3\iint P\, d\tau + V = 0 \Leftrightarrow 3(\gamma-1)U + V = 0 \Leftrightarrow U = -\frac{V}{3(\gamma-1)}$.

Θέμα 2^o:

(α) Η μηχανική ενέργεια μάζας δM σε απόσταση ϖ είναι $-\frac{GM\delta M}{2\varpi}$. Η ισχύς L οφείλεται στην απώλεια αυτής της μηχανικής ενέργειας όταν η μάζα μεταφέρεται από μεγάλη ακτίνα $\varpi_{\rm out}$ σε ακτίνα $\varpi_{\rm in}$ (θεωρώντας ότι κινείται σχεδόν κυκλικά τόσο στην αρχική όσο και στην τελική ακτίνα).
Από το νόμο Stefan–Boltzmann η ροή που ακτινοβολείται από κάθε δαχτυλίδι του δίσκου είναι $\sigma_{\rm SB}T_{\rm eff}^4$. Αυτή οφείλεται στις ενεργειακές απώλειες λόγω ιξώδους και εν τέλει στην απώλεια μηχανικής ενέργειας.
(β) $L \sim 10^{47.2}$ erg/s.
Η συχνότητα στο μέγιστο $\nu = 10^{15.45}$ Hz αντιστοιχεί στην μέγιστη θερμοκρασία του δίσκου $T = \frac{h\nu}{2.8k_{\rm B}} = 5\times 10^4$ K (στην εσωτερική του ακτίνα).
(γ) Αντικαθιστώντας $\varpi_{\rm in} = \eta GM/c^2$ στις σχέσεις του ερωτήματος (α) προκύπτουν $\dot{M} = \frac{2\eta L}{c^2}$ και $M = \frac{1}{\eta}\sqrt{\frac{3Lc^4}{28\pi\sigma_{\rm SB}G^2T_{\rm eff}^4}}$. Η αντικατάσταση δίνει $\dot{M} = 5\eta M_\odot$/yr και $M = \frac{3\times 10^{10}}{\eta}M_\odot$, με $\eta = 1$–6.

Θέμα 3^o:

(α) Το μαγνητικό πεδίο είναι στάσιμο σαν αποτέλεσμα της ισορροπίας μεταξύ μεταφοράς και διάχυσης $0 = \nabla\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}) + \eta\nabla^2\boldsymbol{B}$.
Η σχέση αυτή αποδεικνύεται συνδυάζοντας το νόμο Faraday $\nabla\times\boldsymbol{E} = 0$ με το νόμο του Ohm $\boldsymbol{E} = -\frac{\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}}{c} + \frac{4\pi\eta}{c^2}\boldsymbol{J}$ και το νόμο Ampére $\boldsymbol{J} = \frac{c}{4\pi}\nabla\times\boldsymbol{B}$, χρησιμοποιώντας και την ταυτότητα $\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{B}) = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{B}) - \nabla^2\boldsymbol{B}$ με $\nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0$ για το μαγνητικό πεδίο.
Αντικαθιστώντας $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B} = kyB\hat{z}$, $\nabla\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}) = k\frac{d(yB)}{dy}\hat{x}$ και $\nabla^2\boldsymbol{B} = \frac{d^2B}{dy^2}\hat{x}$ βρίσκουμε τη διαφορική εξίσωση $0 = k\frac{d(yB)}{dy} + \eta\frac{d^2B}{dy^2}$.
(β) Ολοκληρώνοντας μία φορά βρίσκουμε $C = kyB + \eta\frac{dB}{dy}$.
Η σταθερά αυτή αντιστοιχεί στο ηλεκτρικό πεδίο, το οποίο είναι $\boldsymbol{E} = -\frac{\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}}{c} + \frac{4\pi\eta}{c^2}\boldsymbol{J} = -\frac{1}{c}\left(kyB + \eta\frac{dB}{dy}\right)\hat{z}$ και από το νόμο Faraday πρέπει να είναι σταθερό.
Αν $C = 0$ παίρνουμε λύση $B \propto e^{-ky^2/2\eta}$ η οποία δεν είναι περιττή άρα απορρίπτεται.
Αν $C \neq 0$, διαιρώντας την διαφορική με C (για να την φέρουμε στην μορφή που δίνει τη συνάρτηση Dawson) έχουμε $\frac{kyB}{C} + \frac{\eta}{C}\frac{dB}{dy} = 1$. Απαιτώντας να ισχύουν $\frac{kyB}{C} = 2\xi D_+$ και $\frac{\eta}{C}\frac{B}{y} = \frac{D_+}{\xi}$ βρίσκουμε τις σχέσεις $B = B_0 D_+$, $B_0 = \frac{\ell C}{\eta}$,

$\xi = \dfrac{y}{\ell}$, $\ell = \sqrt{\dfrac{2\eta}{k}}$ που μετατρέπουν την διαφορική σε $\dfrac{dD_+(\xi)}{d\xi} + 2\xi D_+(\xi) = 1$.

Το ηλεκτρικό πεδίο είναι $\boldsymbol{E} = -\dfrac{\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}}{c} + \dfrac{4\pi\eta}{c^2}\boldsymbol{J} = -\dfrac{1}{c}\left(kyB + \eta\dfrac{dB}{dy}\right)\hat{z}$ και ο λόγος των δύο μερών του $\dfrac{u_y B}{\eta dB/dy}$ είναι διαστατικά ίσος με $\dfrac{ky^2}{\eta} = \dfrac{2y^2}{\ell^2}$. Επομένως η χωρική κλίμακα ℓ διαχωρίζει την περιοχή $|y| \ll \ell$ όπου ισχύει $\boldsymbol{E} \approx \dfrac{4\pi\eta}{c^2}\boldsymbol{J}$ από την περιοχή $|y| \gg \ell$ όπου $\boldsymbol{E} \approx -\dfrac{\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}}{c}$.

(γ) Η εξίσωση ορμής είναι $\dot{\boldsymbol{u}} = -\dfrac{\boldsymbol{\nabla}P}{\rho} + \dfrac{\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}}{\rho c}$.
Η επιτάχυνση στο αριστερό μέλος γράφεται $\dot{\boldsymbol{u}} = (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u} = \left(kx\dfrac{\partial}{\partial x} - ky\dfrac{\partial}{\partial y}\right)(kx\,\hat{x} - ky\,\hat{y}) = k^2(x\hat{x} + y\hat{y}) = \boldsymbol{\nabla}\left(\dfrac{u^2}{2}\right)$.

Το ίδιο προκύπτει από $\dot{\boldsymbol{u}} = k\dot{x}\hat{x} - k\dot{y}\hat{y} = k^2x\hat{x} + k^2y\hat{y}$. Ένας άλλος τρόπος είναι να χρησιμοποιήσουμε τη γενική μορφή του όρου $(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\nabla}\left(\dfrac{u^2}{2}\right) + (\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{u})\times\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\nabla}\left(\dfrac{u^2}{2}\right)$, διότι εδώ το πεδίο ταχύτητας είναι αστρόβιλο.

Η πυκνότητα είναι σταθερή, άρα $\dfrac{\boldsymbol{\nabla}P}{\rho} = \boldsymbol{\nabla}\left(\dfrac{P}{\rho}\right)$.
Οι γραμμές του μαγνητικού πεδίου δεν έχουν καμπυλότητα, άρα $\dfrac{\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}}{c} = -\boldsymbol{\nabla}\left(\dfrac{B^2}{8\pi}\right)$.
Επομένως η εξίσωση ορμής γράφεται $\boldsymbol{\nabla}\left(\dfrac{u^2}{2}\right) = -\boldsymbol{\nabla}\left(\dfrac{P}{\rho}\right) - \boldsymbol{\nabla}\left(\dfrac{B^2}{8\pi\rho}\right)$ και έχει ολοκλήρωμα Bernoulli $\dfrac{u^2}{2} + \dfrac{P}{\rho} + \dfrac{B^2}{8\pi\rho} =$ σταθερά.

(δ) Η εξίσωση ενέργειας $\dfrac{de}{dt} + P\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{\rho}\right) = q + \dfrac{J^2}{\rho\sigma}$ για σταθερά ρ και e δίνει την ισχύ που εκλύεται ανά μονάδα όγκου $\rho|q| = \dfrac{4\pi\eta J^2}{c^2}$. Αντικαθιστώντας το ρεύμα $\boldsymbol{J} = \dfrac{c}{4\pi}\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} = -\dfrac{c}{4\pi}\dfrac{dB}{dy}\hat{z} = -\dfrac{cB_0}{4\pi\ell}\dfrac{dD_+}{d(y/\ell)}\hat{z}$ βρίσκουμε $\rho|q| = \dfrac{kB_0^2}{8\pi}\left[\dfrac{dD_+(y/\ell)}{d(y/\ell)}\right]^2 = \dfrac{kB_0^2}{8\pi}\left(1 - 2\,\dfrac{y}{\ell}\dfrac{B}{B_0}\right)^2$.