Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής
Εξετάσεις στα Αστροφυσικά Ρευστά, 15 Φεβρουαρίου 2022
Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες, Καλή επιτυχία (★ = bonus ερωτήματα)

Ονοματεπώνυμο: ____, ΑΜ: ________________

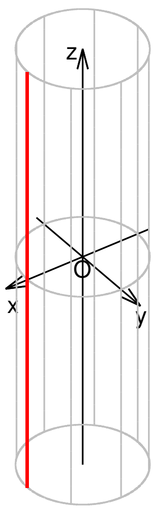
Έχω παραδώσει εργασίες: ΝΑΙ ☐ ΟΧΙ ☐

Θέμα 1ο (3 μονάδες):

Ένα άστρο μπορεί να θεωρηθεί σφαιρικά συμμετρική, στάσιμη και στατική κατανομή ρευστού που περιβάλλεται από κενό.
(α) Πως προκύπτει η εξίσωση υδροστατικής ισορροπίας του $\boldsymbol{\nabla}^2 h = -4\pi G\rho$;
Ποια είναι τα διάφορα μεγέθη στη σχέση αυτή;
(β) Έστω το ρευστό του άστρου μπορεί να θεωρηθεί προσεγγιστικά ασυμπίεστο με πυκνότητα ρ και η τιμή της πίεσης στο κέντρο είναι P_c.
(β_1) Βρείτε διαστατικά την ακτίνα του άστρου σαν συνάρτηση των P_c και ρ.
(β_2) Ποια η ακριβής σχέση που δίνει την ακτίνα του άστρου σαν συνάρτηση των P_c και ρ;
(Βρείτε πρώτα την πίεση συναρτήσει της ακτίνας.)
(γ) Δείξτε ότι για ένα άστρο σε υδροστατική ισορροπία η συνάρτηση $F(r) = P(r) + \dfrac{GM(r)^2}{8\pi r^4}$ με $M(r) = \displaystyle\int_0^r \rho\, 4\pi r^2 dr$ είναι φθίνουσα ανεξαρτήτως καταστατικής εξίσωσης και άρα σε κάθε άστρο μάζας M και ακτίνας R η πίεση στο κέντρο είναι $P_c > \dfrac{GM^2}{8\pi R^4}$.

Θέμα 2ο (3 μονάδες):

Έστω ιδεατό πλάσμα, αρχικά στατικό και με ομογενές μαγνητικό πεδίο $B_0\hat{z}$. Από την στιγμή $t = 0$ και μετά το πλάσμα αποκτά περιστροφική ταχύτητα $\boldsymbol{u} = \Omega\varpi e^{-z^2/L^2}\hat{\phi}$ (όπου Ω και L θετικές σταθερές).
(α) Ποιο θα είναι το μαγνητικό πεδίο σε μεταγενέστερους χρόνους $t > 0$;
(β) Έστω η δυναμική γραμμή που αρχικά είναι η ευθεία $x = L$, $y = 0$ (ή ισοδύναμα $\varpi = L$, $\phi = 0$). Βρείτε την εξίσωσή της το χρόνο $t = \pi/2\Omega$ και σχεδιάστε την όσο πιο προσεκτικά μπορείτε, σχολιάζοντας τα χαρακτηριστικά που θεωρείτε άξια λόγου.
★ (γ) Ποια η ροή Poynting στη $\hat{z}$ κατεύθυνση και τι εκφράζει;

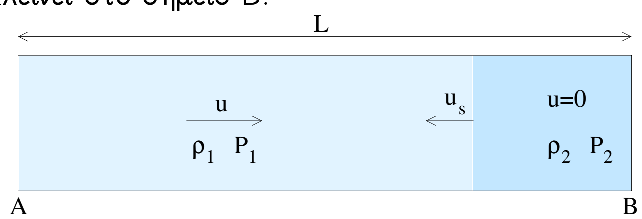


Θέμα 3ο (2 μονάδες):

(α) Εξηγήστε ποιοτικά πως αλλάζει με τη θερμοκρασία η ενεργός διατομή των κρούσεων Coulomb σε ένα πλάσμα (αποφανθείτε δηλ. αν η ενεργός διατομή μειώνεται ή αυξάνεται όταν η θερμοκρασία αυξάνεται και δώστε το λόγο).
(β) Έστω σε ένα πλάσμα στη θέση της αλληλεπίδρασης Coulomb υπήρχε κάποια άλλη αλληλεπίδραση που δημιουργούσε εκτροπή κατά γωνία $\vartheta = 2\arctan\dfrac{A}{b^n}$ όταν τα ηλεκτρόνια πλησίαζαν πρωτόνια με παράμετρο κρούσης b, όπου A και n σταθερές με $n > 1$.
(β_1) Ποια θα ήταν η $\sigma_{\rm large}$;
(β_2) Ποια θα ήταν η $\sigma_{\rm small}$;
Ποιες κρούσεις θα κυριαρχούσαν;

Θέμα 4ο (2 μονάδες):

(α) Έστω υδροδυναμικό ωστικό κύμα με $\boldsymbol{u}_t = 0$ ρευστού με πολυτροπικό δείκτη γ. Ποιος είναι ο λόγος u_1/u_2 των ταχυτήτων στο σύστημα της ασυνέχειας συναρτήσει του αριθμού Mach του υπερηχητικού μέρους;
(β) Μονατομικό ιδανικό ρευστό κινείται στο σωλήνα του σχήματος με ισχυρά υπερηχητική ταχύτητα 300 km/s. Τη στιγμή $t = 0$ ο σωλήνας κλείνει στο σημείο Β.



(β_1) Σε πόσο χρόνο θα μηδενιστεί η ταχύτητα στο σημείο Α που απέχει 10^7 cm από το Β;
★ (β_2) Ποια θα ήταν η απάντηση αν στην αρχική ροή η ταχύτητα ήταν 300 km/s, αλλά η ταχύτητα του ήχου ήταν επίσης 300 km/s;

ΛΥΣΕΙΣ:

Θέμα 1ο:

(α) Το ολοκλήρωμα Bernoulli είναι $h + \Phi_g = E =$ σταθερά, όπου $\boldsymbol{\nabla} h = \dfrac{\boldsymbol{\nabla} P}{\rho}$. Αντικαθιστώντας $\Phi_g = E - h$ στην εξίσωση Poisson $\boldsymbol{\nabla}^2 \Phi_g = 4\pi G\rho$ βρίσκουμε $\boldsymbol{\nabla}^2 h = -4\pi G\rho$.

(β_1) Η ακτίνα εξαρτάται από τις ρ, P_c και τη σταθερά της παγκόσμιας έλξης G. Αντικαθιστώντας μονάδες στη σχέση $R \propto \rho^\alpha P_c^\beta G^\delta$ βρίσκουμε $[L] = \left(\dfrac{[M]}{[L]^3}\right)^\alpha \left(\dfrac{[M]}{[L][T]^2}\right)^\beta \left(\dfrac{[L]^3}{[M][T]^2}\right)^\delta$ (οι μονάδες της πίεσης βρίσκονται π.χ. από τη δυναμική πίεση $P = \rho u^2$ ενώ της σταθεράς G π.χ. από το νόμο Κέπλερ $\omega^2 = GM/r^3$), δηλ. σύστημα $1 = -3\alpha - \beta + 3\delta$, $0 = \alpha + \beta - \delta$, $0 = -2\beta - 2\delta$ με λύση $\alpha = -1$, $\beta = 1/2$, $\delta = -1/2$ και επομένως διαστατικά προκύπτει $R \propto \sqrt{\dfrac{P_c}{G\rho^2}}$.

(β_2) Για ασυμπίεστο ρευστό η πυκνότητα είναι σταθερή και $h = \dfrac{P}{\rho}$, οπότε προκύπτει $\boldsymbol{\nabla}^2 P = -4\pi G\rho^2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{r^2}\dfrac{d}{dr}\left(r^2 \dfrac{dP}{dr}\right) = -4\pi G\rho^2 \Leftrightarrow r^2\dfrac{dP}{dr} = -\displaystyle\int 4\pi G\rho^2 r^2 dr = C_1 - \dfrac{4\pi G\rho^2 r^3}{3} \Leftrightarrow \dfrac{dP}{dr} = \dfrac{C_1}{r^2} - \dfrac{4\pi G\rho^2 r}{3} \Leftrightarrow P = \displaystyle\int\left(\dfrac{C_1}{r^2} - \dfrac{4\pi G\rho^2 r}{3}\right) dr = C_2 - \dfrac{C_1}{r} - \dfrac{4\pi G\rho^2 r^2}{6}$, όπου C_1 και C_2 σταθερές ολοκλήρωσης. Στο κέντρο παίρνει την τιμή P_c, επομένως $C_1 = 0$ (για να μην απειρίζεται) και $C_2 = P_c$. Άρα $P = P_c - \dfrac{4\pi G\rho^2 r^2}{6}$.
Στην ακτίνα R του άστρου η πίεση μηδενίζεται (αφού ο χώρος έξω από το άστρο είναι κενός). Άρα $0 = P_c - \dfrac{4\pi G\rho^2 R^2}{6} \Leftrightarrow R = \sqrt{\dfrac{3P_c}{2\pi G\rho^2}}$.

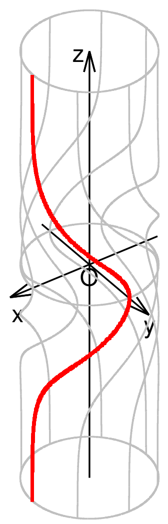
(γ) Η παράγωγος της συνάρτησης $F(r)$, χρησιμοποιώντας την εξίσωσης υδροστατικής ισορροπίας $0 = -\dfrac{dP}{dr} - \rho\dfrac{GM(r)}{r^2}$ και $\dfrac{dM(r)}{dr} = \rho\, 4\pi r^2$, προκύπτει $\dfrac{dF}{dr} = -\dfrac{GM(r)^2}{2\pi r^5}$, δηλ. αρνητική.
Άρα $R > 0 \Leftrightarrow F(R) < F(0) \Leftrightarrow 0 + \dfrac{GM^2}{8\pi R^4} < P_c + 0$, διότι στην επιφάνεια η πίεση μηδενίζεται και $M(R) = M$, ενώ στο κέντρο η πίεση είναι P_c και $\lim\limits_{r\to 0}\dfrac{M(r)^2}{r^4} = \lim\limits_{r\to 0}\dfrac{(\rho|_{r=0}\, 4\pi r^3/3)^2}{r^4} = 0$.

Θέμα 2ο:

(α) Αρχικά είναι $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B} = uB_0\hat{\varpi}$ και $\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}) = B_0\dfrac{\partial u}{\partial z}\hat{\phi} = -2B_0\dfrac{\Omega\varpi z}{L^2}e^{-z^2/L^2}\hat{\phi}$ οπότε θα δημιουργηθεί αζιμουθιακό πεδίο και μετά από μικρό χρονικό διάστημα t θα είναι $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}|_{t=0} + \left.\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\right|_{t=0} t = B_0\hat{z} - 2B_0\dfrac{\Omega t\varpi z}{L^2}e^{-z^2/L^2}\hat{\phi}$.
Το αζιμουθιακό πεδίο που δημιουργείται δεν τροποποιεί την $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}$, επομένως σε κάθε μεταγενέστερο χρόνο θα ισχύει $\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -2B_0\dfrac{\Omega\varpi z}{L^2}e^{-z^2/L^2}\hat{\phi}$ και $\boldsymbol{B} = B_0\hat{z} - 2B_0\dfrac{\Omega t\varpi z}{L^2}e^{-z^2/L^2}\hat{\phi}$.

Το πεδίο μπορεί να βρεθεί και με γενική επίλυση της διαφορικής $\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B})$, αντικαθιστώντας τη δοσμένη ταχύτητα και τη γενική μορφή $\boldsymbol{B} = B_\varpi(\varpi,\phi,z,t)\hat{\varpi} + B_\phi(\varpi,\phi,z,t)\hat{\phi} + B_z(\varpi,\phi,z,t)\hat{z}$.
Η $\hat{\varpi}$ συνιστώσα είναι $\dfrac{\partial B_\varpi}{\partial t} = -\Omega e^{-z^2/L^2}\dfrac{\partial B_\varpi}{\partial \phi}$ και έχει γενική λύση $B_\varpi = F(\varpi, \phi - \Omega t e^{-z^2/L^2}, z)$. Λόγω της αρχικής συνθήκης $B_\varpi|_{t=0} = 0$ προκύπτει $F = 0$, δηλ. σε κάθε χρόνο ισχύει $B_\varpi = 0$.
Όμοια η $\hat{z}$ συνιστώσα είναι $\dfrac{\partial B_z}{\partial t} = -\Omega e^{-z^2/L^2}\dfrac{\partial B_z}{\partial \phi}$ και έχει γενική λύση $B_z = G(\varpi, \phi - \Omega t e^{-z^2/L^2}, z)$. Λόγω της αρχικής συνθήκης $B_z|_{t=0} = B_0$ προκύπτει $G = B_0$, δηλ. σε κάθε χρόνο ισχύει $B_z = B_0$.
Η $\hat{\phi}$ συνιστώσα, χρησιμοποιώντας τις λύσεις που βρήκαμε $B_\varpi = 0$ και $B_z = B_0$, είναι $\dfrac{\partial B_\phi}{\partial t} = -2B_0\dfrac{z}{L^2}\Omega\varpi e^{-z^2/L^2}$ και έχει γενική λύση $B_\phi = -2B_0\dfrac{z}{L^2}\Omega t\varpi e^{-z^2/L^2} + H(\varpi,\phi,z)$. Λόγω της αρχικής συνθήκης $B_\phi|_{t=0} = 0$ προκύπτει $H = 0$. Έτσι βρίσκουμε ότι το πεδίο σε κάθε χρόνο $t > 0$ είναι $\boldsymbol{B} = B_0\hat{z} - 2B_0\dfrac{\Omega t\varpi z}{L^2}e^{-z^2/L^2}\hat{\phi}$.

(β) Η ολοκλήρωση της $\dfrac{d\varpi}{B_\varpi} = \dfrac{\varpi\, d\phi}{B_\phi} = \dfrac{dz}{B_z}$ δίνει ότι οι δυναμικές γραμμές έχουν εξίσωση $\varpi =$ σταθερά, $\phi = \Omega t e^{-z^2/L^2} +$ σταθερά. Για τη συγκεκριμένη γραμμή είναι $\varpi = L$ και $\phi = \Omega t e^{-z^2/L^2}$, όπου ο χρόνος δίνεται $t = \pi/2\Omega$. Για $|z| \gg L$ όπου δεν υπάρχει περιστροφή είναι πάντα $\phi = 0$, δηλ. η γραμμή έχει πακτωμένα «άκρα» τα σημεία $x = L$, $y = 0$, $z = \pm\infty$. Στα ενδιάμεσα z η γραμμή έχει περιστραφεί κατά $\phi = \dfrac{\pi}{2}e^{-z^2/L^2}$, μένοντας πάντα πάνω στον κύλινδρο $\varpi = L$.



Λόγω της εκθετικής πτώσης πρακτικά η γωνία αυτή δεν είναι μηδενική μόνο στην περιοχή $|z| \lesssim 2L$. Στο επίπεδο $z = 0$ η γραμμή έχει στραφεί κατά γωνία $\pi/2$ και άρα περνά από το σημείο $x = 0$, $y = L$, $z = 0$.

(γ) $\boldsymbol{S} = \frac{c}{4\pi}\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B} = -\frac{(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{B}}{4\pi} = -\frac{(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{B})\boldsymbol{B} - B^2\boldsymbol{u}}{4\pi}$. Στην $\hat{z}$ κατεύθυνση είναι $S_z = -\frac{uB_\phi B_z}{4\pi} = \frac{B_0^2 \Omega^2 \varpi^2 zt}{2\pi L^2} e^{-2z^2/L^2}$. Εκφράζει την ροή ενέργειας από την περιοχή περιστροφής κοντά στο επίπεδο $z = 0$ προς μικρότερα και μεγαλύτερα z. Η ενέργεια αυτή αποθηκεύεται στο μαγνητικό πεδίο, του οποίου η ενεργειακή πυκνότητα $B^2/8\pi$ αυξάνει με το χρόνο.

Θέμα 3$^{\text{o}}$:

(α) Όσο αυξάνεται η θερμοκρασία τόσο μειώνεται η γωνία εκτροπής (γιατί τα φορτία έχουν μεγάλη ταχύτητα και επηρεάζονται λιγότερο από τις δυνάμεις Coulomb), άρα οι κρούσεις είναι ασθενέστερες, δηλ. μειώνεται η ενεργός διατομή.

(β$_1$) $\vartheta = \pi/2$ αν $b_{\pi/2} = A^{1/n}$, άρα $\sigma_{\text{large}} = \pi b_{\pi/2}^2 = \pi A^{2/n}$.

(β$_2$) $1 \approx \sum \vartheta^2 = \int \vartheta^2 dN = \int \vartheta^2\, n\, ut\, 2\pi b\, db$.

Για κρούσεις μικρής εκτροπής $\vartheta \approx 2A/b^n$ και η σχέση $n\ell\sigma = 1$ με $\ell = ut$ δίνει $\sigma_{\text{small}} = \frac{1}{nut} = \int_{A^{1/n}}^{\lambda_D} \vartheta^2 2\pi b\, db \approx \int_{A^{1/n}}^{\lambda_D} \frac{4A^2}{b^{2n}} 2\pi b\, db = \frac{4\pi A^2}{n-1}\left[-b^{2-2n}\right]_{A^{1/n}}^{\lambda_D} \approx \frac{4\pi A^{2/n}}{n-1} = \frac{4}{n-1}\sigma_{\text{large}}$.

Οι σκεδάσεις μικρών γωνιών είναι πιο σημαντικές αν $\sigma_{\text{small}} > \sigma_{\text{large}} \Leftrightarrow n < 5$.

Θέμα 4$^{\text{o}}$:

(α) Λόγω της $\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2$ είναι $\frac{u_1}{u_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1} = r$ όπου $r = \frac{\gamma+1}{\gamma - 1 + 2/M_1^2}$ ο λόγος συμπίεσης.

(β) Ωστικό κύμα θα ξεκινήσει τη στιγμή $t = 0$ από το Β, θα κινείται με ταχύτητα u_s προς τα αριστερά και θα χωρίζει την στατική περιοχή κοντά στο Β από την υπερηχητική ροή αριστερά. Στο σύστημα του κύματος οι ταχύτητες των δύο μερών θα είναι $u_1 = u + u_s$ αριστερά και $u_2 = u_s$ δεξιά (και οι δύο με φορά προς τα δεξιά). Ισχύει $\frac{u_1}{u_2} = r$, δηλ. $\frac{u+u_s}{u_s} = \frac{\gamma+1}{\gamma-1+2/M_1^2}$ με τον αριθμό Mach $M_1 = \frac{u_1}{c_{s1}} = \frac{u+u_s}{c_{s1}}$.

(β$_1$) Αν $M_1 \gg 1$ και $\gamma = \frac{5}{3}$ είναι $r = 4$ οπότε $\frac{u+u_s}{u_s} = 4 \Leftrightarrow u_s = \frac{u}{3} = 10^7$ cm/s. . Το κύμα θα φτάσει στο Α μετά από χρόνο $\frac{L}{u_s}$, δηλ. σε ένα δευτερόλεπτο.

(β$_2$) Αν η ροή δεν είναι ισχυρά υπερηχητική η σχέση που δίνει την ταχύτητα του κύματος είναι $\frac{u+u_s}{u_s} = \frac{\gamma+1}{\gamma - 1 + \frac{2c_{s1}^2}{(u+u_s)^2}}$. Γράφεται σαν τριώνυμο $(u+u_s)^2 - \frac{\gamma+1}{2}u(u+u_s) - c_{s1}^2 = 0$. Η θετική λύση είναι $u_s = -\frac{3-\gamma}{4}u + \sqrt{\left(\frac{\gamma+1}{4}u\right)^2 + c_{s1}^2} = 2.6 \times 10^7$ cm/s και ο χρόνος $\frac{L}{u_s} = 0.38$ s.