Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής
Εξετάσεις στα Αστροφυσικά Ρευστά, 7 Ιουνίου 2022
Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες, Καλή επιτυχία (★ = bonus ερωτήματα)

Ονοματεπώνυμο: ____________________, ΑΜ: __________

Έχω παραδώσει εργασίες: ΝΑΙ ☐ ΟΧΙ ☐

**Θέμα 1ο** (3 μονάδες):

Θέλουμε να μελετήσουμε τον άνεμο από ένα άστρο με μάζα $M = 1.2 \times 10^{33}$ g και ακτίνα $R = 7.2 \times 10^{10}$ cm, του οποίου η κορόνα αποτελείται από ηλεκτρόνια–πρωτόνια με αριθμητική πυκνότητα $n_o = 10^8$ cm$^{-3}$ και θερμοκρασία $T_o = 2 \times 10^6$ K. Θεωρήστε τον άνεμο πολυτροπικό με δείκτη $\gamma = 7/5$ και ότι ισχύουν όλες οι υποθέσεις του αντίστοιχου μοντέλου του Parker.
(α) Γράψτε τις εξισώσεις διατήρησης μάζας και ορμής για τον άνεμο αυτό.
(β) Γράψτε τα δύο αντίστοιχα ολοκληρώματα που εκφράζουν τον ρυθμό απώλειας μάζας $\dot{M}$ και τη ροή ενέργειας ανά ροή μάζας $E$ (Bernoulli).
(γ) Υπολογίστε την ταχύτητα ήχου στη βάση $c_{so}$ και την τιμή της αδιάστατης σταθεράς $\lambda = \dfrac{GM}{Rc_{so}^2}$.
Κατόπιν υπολογίστε την σταθερά $E$ θεωρώντας ότι στη βάση του ανέμου η συνεισφορά της μακροσκοπικής κινητικής ενέργειας είναι αμελητέα.
(δ) Υπολογίστε την ταχύτητα του ανέμου $u_\infty$ σε πολύ μεγάλες αποστάσεις (όταν δηλαδή η ακτινική απόσταση τείνει στο άπειρο και η πυκνότητα μηδενίζεται).
★ (ε) Δείξτε ότι η ταχύτητα $u_c$ και η απόσταση $r_c$ στο ηχητικό κρίσιμο σημείο συνδέονται με ποσότητες στη βάση μέσω των σχέσεων $u_c^2 = \dfrac{4}{\lambda^2} u_o c_{so}$ και $r_c = \dfrac{GM}{2u_c^2}$.
(στ) Εφαρμόζοντας το ολοκλήρωμα Bernoulli στο ηχητικό κρίσιμο σημείο βρείτε την $u_c$ και κατόπιν βρείτε την ταχύτητα $u_o$.
(ζ) Βρείτε τον ρυθμό απώλειας μάζας $\dot{M}$.

**Θέμα 2ο** (2.5 μονάδες):

Για το πλάσμα της κορόνας του άστρου του προηγούμενου θέματος υπολογίστε
(α) το μήκος ελεύθερης διαδρομής $\ell$ των κρούσεων Coulomb,
(β) το συντελεστή ηλεκτρικής αγωγιμότητας $\sigma_E$,
(γ) το συντελεστή θερμικής αγωγιμότητας $\kappa$,
★ (δ) το συντελεστή κινηματικού ιξώδους $\nu$.
Για τα (β), (γ), (δ) βρείτε πρώτα τις σχέσεις που δίνουν τα $\sigma_E$, $\kappa$, $\nu$ συνδέοντάς τα με τις κρούσεις και κάνοντας τάξης μεγέθους υπολογισμούς.

**Θέμα 3ο** (2.5 μονάδες):

(α) Σχολιάστε τι εκφράζει κάθε όρος στην εξίσωση ενέργειας για το σύστημα πλάσμα–ηλεκτρομαγνητικό πεδίο $\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\rho u^2}{2} + \rho e + \dfrac{E^2+B^2}{8\pi}\right) + \boldsymbol{\nabla}\cdot\left[\dfrac{\rho u^2}{2}\boldsymbol{u} + \rho e \boldsymbol{u} + P\boldsymbol{u} - \boldsymbol{\sigma}'\cdot\boldsymbol{u} - \kappa\boldsymbol{\nabla}T + \dfrac{c}{4\pi}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}\right] = \rho q + \rho \boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{u}$.
(β) Σχολιάστε ποιοι όροι παραλείπονται όταν ισχύουν οι εξισώσεις Euler στα πλαίσια της ιδεατής μαγνητοϋδροδυναμικής.
(γ) Ποια εξίσωση δίνει τη χρονική εξέλιξη του μαγνητικού πεδίου στα πλαίσια της ιδεατής μαγνητοϋδροδυναμικής και τι σημαίνει;

**Θέμα 4ο** (2 μονάδες):

Μία στήλη πλάσματος ακτίνας $R$ σε μαγνητοστατική ισορροπία περιβάλλεται από κενό και έχει μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B} = B_0\left(1 - e^{-\lambda\varpi^2}\right)\hat{z}$, όπου $B_0$ και $\lambda$ σταθερές (δεν υπάρχει $\hat{\phi}$ συνιστώσα). Ποια είναι η πίεση στον άξονά της;
Βρείτε πρώτα την κατανομή πίεσης στο εσωτερικό της στήλης, αν είναι εφικτό χωρίς να χρησιμοποιήσετε τύπους για κλίση, απόκλιση, στροβιλισμό από το τυπολόγιο.

## ΛΥΣΕΙΣ:

Θέμα 1$^o$:

$\boldsymbol{u} = u(r)\hat{r}$, $\rho = \rho(r)$, $P = Q\rho^\gamma$, $\boldsymbol{g} = -\frac{GM}{r^2}\hat{r}$.

(α) $\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{u}) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\rho u) = 0$.

$(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u} = -\frac{\boldsymbol{\nabla}P}{\rho} + \boldsymbol{g} \Leftrightarrow u\frac{du}{dr} = -\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dr} - \frac{GM}{r^2}$.

(β) $4\pi r^2\rho u = \dot{M}$, $\frac{u^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{P}{\rho} - \frac{GM}{r} = E$.

(γ) $c_{so} = \sqrt{\gamma P_o/\rho_o}$ με $\rho_o = n_o m_p$ και $P_o = 2n_o k_\mathrm{B}T_o$, άρα $c_{so} = \sqrt{2\gamma k_\mathrm{B}T_o/m_p} = 215$ km/s.

$\lambda = \frac{GM}{Rc_{so}^2} = 2.4$.

Εφαρμόζοντας το ολοκλήρωμα Bernoulli στη βάση, αντικαθιστώντας $\gamma P/\rho = c_s^2$ και διώχνοντας τον όρο $\frac{u_o^2}{2}$, βρίσκουμε $E = \frac{1}{\gamma-1}c_{so}^2 - \frac{GM}{R} = \frac{5}{2}c_{so}^2 - 2.4c_{so}^2 = 4.5\times10^{13}$ cm$^2$/s$^2$.

(δ) Εφαρμόζοντας το ολοκλήρωμα Bernoulli στο άπειρο, διώχνοντας το βαρυτικό δυναμικό (αφού $-\frac{GM}{r} \to 0$ για $r\to\infty$) και την ενθαλπία (αφού $\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{P}{\rho} = \frac{\gamma Q\rho^{\gamma-1}}{\gamma-1} \to 0$ για $\rho\to 0$), βρίσκουμε $\frac{u_\infty^2}{2} = E \Leftrightarrow u_\infty = \sqrt{2E}$. Αντικαθιστώντας την $E$ από το προηγούμενο ερώτημα βρίσκουμε $u_\infty = 95$ km/s.

(ε) Στο ηχητικό κρίσιμο σημείο η έκφραση της $\frac{du}{dr}$ είναι $\frac{0}{0}$. Πρέπει να βρούμε λοιπόν την διαφορική εξίσωση που δίνει την ταχύτητα. Ένας τρόπος να γίνει αυτό είναι να αντικαταστήσουμε στην εξίσωση ορμής $-\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dr} = -\frac{c_s^2}{\rho}\frac{d\rho}{dr} = -c_s^2\frac{d\ln\rho}{dr} = c_s^2\frac{d\ln(r^2u)}{dr} = c_s^2\left(\frac{2}{r}+\frac{1}{u}\frac{du}{dr}\right)$ αφού $\ln\rho = \ln(\frac{\dot{M}}{4\pi r^2 u})$, οπότε βρίσκουμε $u\frac{du}{dr} = c_s^2\left(\frac{2}{r}+\frac{1}{u}\frac{du}{dr}\right) - \frac{GM}{r^2} \Leftrightarrow \frac{du}{dr} = \frac{u}{r}\frac{2c_s^2 - GM/r}{u^2-c_s^2}$, όπου $c_s^2 = \gamma P/\rho = \gamma Q\rho^{\gamma-1} = \gamma Q\left(\frac{\dot{M}}{4\pi r^2 u}\right)^{\gamma-1}$.

Ένας άλλος τρόπος είναι να γράψουμε το ολοκλήρωμα Bernoulli σαν $\frac{u^2}{2} + \frac{\gamma Q}{\gamma-1}\left(\frac{\dot{M}}{4\pi r^2 u}\right)^{\gamma-1} - \frac{GM}{r} = E$, αντικαθιστώντας δηλ. $\frac{P}{\rho} = Q\rho^{\gamma-1}$ και $\rho = \frac{\dot{M}}{4\pi r^2 u}$, και κατόπιν να παραγωγίσουμε.

Στο κρίσιμο σημείο ισχύουν λοιπόν $u_c = c_{sc}$ και $2u_c^2 = GM/r_c \Leftrightarrow r_c = \frac{GM}{2u_c^2}$.

Η πρώτη, με $c_s^2 \propto \rho^{\gamma-1} \propto \left(\frac{1}{r^2u}\right)^{2/5}$, οπότε $\frac{c_{sc}^2}{c_{so}^2} = \left(\frac{R^2u_o}{r_c^2u_c}\right)^{2/5}$, δίνει $u_c = c_{so}\left(\frac{R^2u_o}{r_c^2u_c}\right)^{1/5}$. Αντικαθιστώντας $r_c = \frac{GM}{2u_c^2}$ προκύπτει η ζητούμενη $u_c^2 = \frac{4}{\lambda^2}u_oc_{so}$.

(στ) Το ολοκλήρωμα Bernoulli στο ηχητικό κρίσιμο σημείο, αντικαθιστώντας $u = u_c$, $\gamma P/\rho = u_c^2$, $r = GM/2u_c^2$ και $\gamma = 7/5$, δίνει $E = \frac{u_c^2}{2} + \frac{5u_c^2}{2} - 2u_c^2 = u_c^2$, άρα $u_c = \sqrt{E} = 67$ km/s.

Το ηχητικό σημείο βρίσκεται σε απόσταση $r_c = \frac{GM}{2u_c^2} = 8.9\times10^{11}$ cm.

Η σχέση που βρέθηκε στο ερώτημα (ε) δίνει την $u_o = \frac{\lambda^2u_c^2}{4c_{so}} = 30$ km/s.

Πράγματι η μακροσκοπική κινητική ενέργεια είναι αμελητέα αφού η ταχύτητα είναι ισχυρά υποηχητική, με $u_o/c_{so} = 0.14$.

(ζ) Εφαρμόζοντας το ολοκλήρωμα $\dot{M} = 4\pi r^2\rho u$ στη βάση της ροής βρίσκουμε $\dot{M} = 4\pi R^2 n_o m_p u_o = 3.3\times10^{13}$ g/s $= 5\times10^{-13}M_\odot$/yr.

Θέμα 2$^o$:

(α) $\frac{e^2}{b_{\pi/2}} = k_\mathrm{B}T \Leftrightarrow b_{\pi/2} = \frac{e^2}{k_\mathrm{B}T}$,

$\sigma_\mathrm{large} = \pi b_{\pi/2}^2 = \frac{\pi e^4}{k_\mathrm{B}^2T^2}$, $\Lambda = \frac{\lambda_D}{b_{\pi/2}} = \sqrt{\frac{k_\mathrm{B}^3T^3}{8\pi ne^6}}$,

$\sigma = 8\sigma_\mathrm{large}\ln\Lambda = 4\times10^{-16}$ cm $^2$

και $\ell = \frac{1}{n\sigma} = \frac{k_\mathrm{B}^2T^2}{8\pi ne^4\ln\sqrt{\frac{k_\mathrm{B}^3T^3}{8\pi ne^6}}} = 3\times10^7$ cm.

(β) Υπό την επίδραση ηλεκτρικού πεδίου $\boldsymbol{E}$ τα ηλεκτρόνια αποκτούν ταχύτητα $\boldsymbol{u}$ (στο σύστημα που τα πρωτόνια έχουν μηδενική μέση ταχύτητα) και δημιουργούν ρεύμα $\boldsymbol{J} = -ne\boldsymbol{u}$.

Από την εξίσωση ορμής τους $0 = -e\boldsymbol{E} - \frac{m_e\boldsymbol{u}-0}{\tau_{ei}}$, όπου $\tau_{ei} = \frac{\ell}{u_{Te}}$ ο χρόνος μεταξύ των κρούσεων ηλεκτρονίων με πρωτόνια, με $u_{Te} = \sqrt{3k_\mathrm{B}T/m_e}$ τη θερμική ταχύτητα των ηλεκτρονίων, βρίσκουμε $\boldsymbol{J} = -ne\boldsymbol{u} = \frac{ne^2\tau_{ei}}{m_e}\boldsymbol{E} = \sigma_E\boldsymbol{E}$, δηλ. $\sigma_E = \frac{k_\mathrm{B}^{3/2}T^{3/2}}{8\pi e^2\sqrt{3m_e}\ln\sqrt{\frac{k_\mathrm{B}^3T^3}{8\pi ne^6}}} \approx 10^{15}$ s$^{-1}$.

(γ) Όταν η θερμοκρασία αλλάζει με τη θέση,

π.χ. είναι $T(x)$, λόγω των κρούσεων υπάρχει ροή θερμότητας που είναι ίση με το γινόμενο της ροής ηλεκτρονίων $nu_{Te}$ (η ροή των πρωτονίων είναι πολύ μικρότερη) επί την μεταβολή ενέργειας κάθε σωματίου $k_{\rm B}\varDelta T = k_{\rm B}\ell \frac{dT}{dx}$, δηλ. είναι $nu_{Te}k_{\rm B}\ell\frac{dT}{dx}$, ή διανυσματικά στη γενικότερη περίπτωση $-\kappa\boldsymbol{\nabla}T$ με $\kappa = nu_{Te}\ell k_{\rm B} = \frac{u_{Te}k_{\rm B}}{\sigma} \approx 4\times 10^8$ erg cm$^{-1}$ K$^{-1}$ s$^{-1}$.
(Συγκριτικά με τους άλλους όρους ροής ενέργειας στον άνεμο του συγκεκριμένου άστρου είναι $\frac{\kappa|\nabla T|}{\rho u E} \sim \frac{4\pi\kappa r T}{\dot{M}E} \sim 0.03\frac{r}{R}\frac{T}{T_o}$, άρα η θερμική αγωγιμότητα δεν είναι σημαντική.)
(δ) Όταν υπάρχει κλίση της ταχύτητας στην κάθετη κατεύθυνση ως προς αυτή, π.χ. είναι $\boldsymbol{u} = u_x(y)\hat{x}$, μέσω των κρούσεων υπάρχει διάχυση στην $\hat{y}$ κατεύθυνση της $\hat{x}$ ορμής των πρωτονίων (τα οποία μεταφέρουν πρακτικά την ορμή – τα ηλεκτρόνια έχουν πολύ μικρότερη μάζα και ακολουθούν την κίνηση των πρωτονίων λόγω των κρούσεων Coulomb). Η αντίστοιχη ροή ορμής ισούται με το γινόμενο της ροής πρωτονίων $nu_{Tp}$ (λόγω θερμικών κινήσεων στην $\hat{y}$ κατεύθυνση) επί τη μεταβολή ορμής κάθε σωματίου $m_p\varDelta u_x\hat{x} = m_p\ell\frac{du_x}{dy}\hat{x}$, δηλ. είναι $nm_p\nu\frac{du_x}{dy}\hat{x}$ με συντελεστή κινηματικού ιξώδους $\nu = u_{Tp}\ell = \frac{\sqrt{3k_{\rm B}^5T^5/m_p}}{8\pi ne^4\ln\sqrt{\frac{k_{\rm B}^3T^3}{8\pi ne^6}}}$. Η αριθμητική τιμή είναι $\nu \approx 6\times 10^{14}$ cm$^2$ s$^{-1}$. (Ο αριθμός Reynolds είναι $Re = \frac{ur}{\nu} \approx 350\frac{R}{r}\left(\frac{T_o}{T}\right)^{5/2}$, άρα το ιξώδες πρακτικά δεν επηρεάζει τη δυναμική του ανέμου.)

Θέμα 3$^{\rm o}$:

(α) Η παρένθεση μέσα στη χρονική παράγωγο είναι η ολική πυκνότητα ενέργειας. Κατά σειρά έχουμε τις συνεισφορές από την μακροσκοπική κινητική ενέργεια, την μικροσκοπική κινητική (εσωτερική) λόγω των θερμικών κινήσεων και την ενέργεια του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου.
Η παρένθεση μέσα στην κλίση είναι η ολική ροή ενέργειας. Κατά σειρά έχουμε τις συνεισφορές από την μακροσκοπική κινητική ενέργεια, την μικροσκοπική κινητική (εσωτερική) ανά όγκο $\rho e$ η οποία μαζί με την πίεση αποτελούν την ενθαλπία ανά όγκο, την συνεισφορά από τον τανυστή ιξώδους $\boldsymbol{\sigma}'$, τη ροή θερμότητας λόγω θερμικής αγωγιμότητας $-\kappa\boldsymbol{\nabla}T$ και τη ροή του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου (διάνυσμα Poynting).
Στο δεξιό μέλος έχουμε δύο πηγές/καταβόθρες, λόγω εξωτερικής πηγής θέρμανσης/ψύξης που προσθέτει/αφαιρεί ενέργεια ανά χρόνο ανά μάζα $q$ και λόγω της ισχύος της δύναμης από το βαρυτικό πεδίο.
(β) Όταν ισχύουν οι εξισώσεις Euler η κατανομή ταχυτήτων είναι ισοτροπική και δεν υπάρχουν οι όροι ιξώδους και ροής θερμότητας. Στα πλαίσια της ιδεατής μαγνητοϋδροδυναμικής ισχύει $\boldsymbol{E} = -\frac{\boldsymbol{u}}{c}\times\boldsymbol{B}$ (νόμος Ohm για άπειρη αγωγιμότητα), οπότε το ηλεκτρικό πεδίο είναι πολύ μικρότερο του μαγνητικού και η πυκνότητα ενέργειας του πεδίου είναι $B^2/8\pi$.
Το διάνυσμα Poynting είναι $\frac{c}{4\pi}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B} = -\frac{\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}}{4\pi}\times\boldsymbol{B}$.
(γ) Ο νόμος Faraday σε συνδυασμό με το νόμο Ohm δίνει $\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} = -c\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} = \boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B})$, σχέση που ισοδυναμεί με τη διατήρηση της μαγνητικής ροής που περνά από βρόχους που κινούνται με το πλάσμα (κάθε σημείο τους έχει την ταχύτητα του πλάσματος $\boldsymbol{u}$ στο σημείο αυτό).

Θέμα 4$^{\rm o}$:

Η πυκνότητα δύναμης από το μαγνητικό πεδίο είναι $-\boldsymbol{\nabla}(B^2/8\pi)$ – δεν υπάρχει τάση αφού οι δυναμικές γραμμές είναι ευθείες (έτσι αποφεύγουμε να χρησιμοποιήσουμε το τυπολόγιο για να υπολογίσουμε την πυκνότητα δύναμης μέσω του ρεύματος ή της σχέσης $(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{B}/4\pi$).
Άρα η εξίσωση μαγνητοστατικής ισορροπίας γράφεται $0 = -\nabla(P + B^2/8\pi)$ και ολοκληρώνεται σε $P + B^2/8\pi = C =$ σταθερά, δηλ. η κατανομή πίεσης είναι $P = C - \frac{B_0^2}{8\pi}\left(1 - e^{-\lambda\varpi^2}\right)^2$.
Η απαίτηση $P|_{\varpi=R} = 0$ δίνει την τιμή της σταθεράς $C = \frac{B_0^2}{8\pi}\left(1 - e^{-\lambda R^2}\right)^2$.
Η πίεση στον άξονα είναι $P|_{\varpi=0} = C$.