Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής
Εξετάσεις στην Αστροφυσική Πλάσματος, 23 Ιουνίου 2021
Διάρκεια εξέτασης $1\frac{1}{2}$ ώρες, Καλή επιτυχία ($\bigstar$ = bonus ερωτήματα)

Ονοματεπώνυμο: ______________________________, ΑΜ: ______________

Έχω παραδώσει εργασίες: ΝΑΙ ☐ ΟΧΙ ☐

(1) Φορτίο κινείται σε πεδίο $\vec{B} = B(\varpi)\hat{\phi}$. Ποια η ολίσθηση $\vec{v}_{\mathcal{R}}$ λόγω της καμπυλότητας των γραμμών του μαγνητικού πεδίου και ποια η $\vec{v}_{\vec{\nabla}B}$ λόγω της αλλαγής του μέτρου του;

$\bigstar$ (2) Ποιο είναι το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ στο σύστημα που κινείται με $\vec{v}_{\mathcal{R}}$; Δείξτε ότι η δύναμη $q\vec{E}$ είναι αυτή που χρειάζεται για να ακολουθεί το φορτίο μία συγκεκριμένη δυναμική γραμμή του μαγνητικού πεδίου.

(3) Έστω έχουμε πολλά ίδια φορτία με ισοτροπική κατανομή ταχυτήτων. Αιτιολογήστε γιατί ισχύει $\langle v_\perp^2 \rangle = 2\langle v_\parallel^2 \rangle$, όπου $\vec{v}_\parallel$ και $\vec{v}_\perp$ οι συνιστώσες της ταχύτητας παράλληλα και κάθετα στο μαγνητικό πεδίο, αντίστοιχα. Για τι είδους πεδίο $\vec{B} = B(\varpi)\hat{\phi}$ οι ολισθήσεις $\vec{v}_{\mathcal{R}}$ και $\vec{v}_{\vec{\nabla}B}$ αλληλοαναιρούνται κατά μέσο όρο;

(4) Μία στατική στήλη πλάσματος ακτίνας R έχει μαγνητικό πεδίο $\vec{B} = B_0 \dfrac{\varpi}{R}\hat{\phi}$ (με B_0 σταθερά). Ποιες οι συνεισφορές στην πυκνότητα μαγνητικής δύναμης που αντιστοιχούν στην μαγνητική πίεση και τάση;

(5) Ποια η διαφορά θερμικής πίεσης μεταξύ του άξονα και της επιφάνειας της προηγούμενης στήλης;

(6) Αν η αγωγιμότητα του πλάσματος της στήλης είναι σ, πως θα αλλάξει η κατανομή του μαγνητικού πεδίου με το χρόνο; Θεωρήστε ότι στην επιφάνεια της στήλης το πεδίο διατηρείται συνεχώς $B_0\hat{\phi}$.

$\bigstar$ (7) Έξω από την προηγούμενη στήλη υπάρχει ομογενές στατικό πλάσμα με μαγνητικό πεδίο $\vec{B} = B_0 \dfrac{R}{\varpi}\hat{\phi}$. Τα δύο πλάσματα βρίσκονται σε επαφή και το πεδίο στη διαχωριστική τώρα δεν διατηρείται σταθερό (σε αντίθεση με την προηγούμενη περίπτωση). Αν η αγωγιμότητα του πλάσματος τόσο μέσα στη στήλη όσο και έξω από αυτή είναι σ θα αλλάξει το μαγνητικό πεδίο με το χρόνο;

(8) Δείξτε ότι η εξίσωση Bernoulli για μια μονοδιάστατη ροή συμπιεστού ρευστού, χρησιμοποιώντας την ταχύτητα ήχου C_s και την τιμή της στο ηχητικό σημείο $C_{s\star}$, γράφεται $\dfrac{V^2}{2} + \dfrac{C_s^2}{\gamma - 1} = \dfrac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} C_{s\star}^2$.

(9) Δείξτε ότι σε ένα ωστικό κύμα ισχύει $V_1 V_2 = C_{s\star}^2$.
Θεωρήστε ότι οι ταχύτητες είναι κάθετες στην ασυνέχεια.

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ (δεν χρειάζονται όλα)

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\vec{J}\times\vec{B}}{c\rho} - \frac{\vec{\nabla}P}{\rho} + \vec{g}, \qquad \vec{J} = \frac{c}{4\pi}\vec{\nabla}\times\vec{B}, \qquad \frac{\vec{J}}{\sigma} = \vec{E} + \frac{\vec{V}\times\vec{B}}{c}, \qquad \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\times\vec{E},$$

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}\right) - \nabla^2\vec{B}, \qquad (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a},$$

$$\vec{X} = q\vec{E}\,, -\mu\vec{\nabla}B\,, \frac{mv_\parallel^2}{\mathcal{R}}\hat{\mathcal{R}}, \qquad r = \frac{\gamma+1}{\gamma - 1 + 2/M_1^2},$$

$$\vec{\nabla}f = \frac{\partial f}{\partial\varpi}\hat{\varpi} + \frac{1}{\varpi}\frac{\partial f}{\partial\phi}\hat{\phi} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}, \qquad \vec{\nabla}\times\vec{u} = \left(\frac{1}{\varpi}\frac{\partial u_z}{\partial\phi} - \frac{\partial u_\phi}{\partial z}\right)\hat{\varpi} + \left(\frac{\partial u_\varpi}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial\varpi}\right)\hat{\phi} + \frac{1}{\varpi}\left[\frac{\partial(\varpi u_\phi)}{\partial\varpi} - \frac{\partial u_\varpi}{\partial\phi}\right]\hat{z},$$

$$\nabla^2\vec{u} = \left(\vec{\nabla}^2 u_\varpi - \frac{u_\varpi}{\varpi^2} - \frac{2}{\varpi^2}\frac{\partial u_\phi}{\partial\phi}\right)\hat{\varpi} + \left(\vec{\nabla}^2 u_\phi + \frac{2}{\varpi^2}\frac{\partial u_\varpi}{\partial\phi} - \frac{u_\phi}{\varpi^2}\right)\hat{\phi} + \vec{\nabla}^2 u_z\hat{z}, \qquad \vec{\nabla}^2 f = \frac{1}{\varpi}\frac{\partial}{\partial\varpi}\left(\varpi\frac{\partial f}{\partial\varpi}\right) + \frac{1}{\varpi^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

ΛΥΣΕΙΣ:

(1) $\vec{v}_{\mathcal{R}} = c\dfrac{\vec{X}\times\vec{B}}{qB^2}$ με $\vec{X}$ τη φυγόκεντρο, δηλ. $\vec{X} = \dfrac{mv_\parallel^2}{\varpi}\hat{\varpi}$ και $\vec{v}_{\mathcal{R}} = \dfrac{cmv_\parallel^2}{q\varpi B}\hat{z}$.
$\vec{v}_{\vec{\nabla}B} = c\dfrac{\vec{X}\times\vec{B}}{qB^2}$ με $\vec{X} = -\mu\vec{\nabla}B = -\dfrac{mv_\perp^2/2}{B}\dfrac{dB}{d\varpi}\hat{\varpi}$, δηλ. $\vec{v}_{\vec{\nabla}B} = -\dfrac{cmv_\perp^2}{2qB^2}\dfrac{dB}{d\varpi}\hat{z}$.

(2) $\vec{E} = \vec{v}_{\mathcal{R}}\times\vec{B}/c$. Η δύναμη $q\vec{E} = q\dfrac{\vec{v}_{\mathcal{R}}}{c}\times\vec{B} = \dfrac{mv_\parallel^2\hat{\varpi}\times\vec{B}}{\varpi B^2}\times\vec{B} = -\dfrac{mv_\parallel^2}{\varpi}\hat{\varpi}$ είναι η κεντρομόλος που κρατά το φορτίο στην ίδια δυναμική γραμμή του $\vec{B}$.

(3) Λόγω της ισοτροπικής κατανομής η μέση τιμή του τετραγώνου της συνιστώσας της ταχύτητας σε οποιαδήποτε κατεύθυνση είναι το ένα τρίτο της $\langle\vec{v}^2\rangle = v_{\rm rms}^2$. Άρα $\langle v_\parallel^2\rangle = v_{\rm rms}^2/3$ και $\langle v_\perp^2\rangle = 2v_{\rm rms}^2/3$ αφού κάθετα στο πεδίο έχουμε δύο συνιστώσες.
Οι ολισθήσεις $\vec{v}_{\mathcal{R}}$ και $\vec{v}_{\vec{\nabla}B}$ αλληλοαναιρούνται κατά μέσο όρο αν $\dfrac{cm\langle v_\parallel^2\rangle}{q\varpi B} - \dfrac{cm\langle v_\perp^2\rangle}{2qB^2}\dfrac{dB}{d\varpi} = 0$. Αντικαθιστώντας $\langle v_\perp^2\rangle = 2\langle v_\parallel^2\rangle$ προκύπτει $\dfrac{dB}{B} = \dfrac{d\varpi}{\varpi} \Leftrightarrow B\propto\varpi$.
Αυτό το πεδίο αντιστοιχεί σε τοπικά σταθερή μέση τιμή $\langle J\rangle = I/\pi\varpi^2$ (διότι ο ολοκληρωτικός νόμος Ampére δίνει $2\pi\varpi B = \dfrac{4\pi}{c}\langle J\rangle\pi\varpi^2$). Στη γενική περίπτωση οι ολισθήσεις δημιουργούν ρεύμα $\vec{J}_d = -\dfrac{c\varpi P}{B^2}\dfrac{d(B/\varpi)}{d\varpi}\hat{z} = -\dfrac{2\pi\varpi P}{B^2}\dfrac{d\langle J\rangle}{d\varpi}\hat{z}$, όπου $P = \dfrac{nmv_{\rm rms}^2}{3}$. Αν το $\langle J\rangle$ ελαττώνεται με την απόσταση οι ολισθήσεις τείνουν να το αυξήσουν και αντίστροφα. (Συμπεριλαμβάνοντας και το ρεύμα μαγνήτισης $\vec{J}_m = c\vec{\nabla}\times(n\vec{\mu})$ όπου $n\vec{\mu} = -\dfrac{nm\langle v_\perp^2\rangle}{2B^2}\vec{B} = -\dfrac{P}{B}\hat{\phi}$, προκύπτει $0 = \dfrac{(\vec{J}_d+\vec{J}_m)\times\vec{B}}{c} - \vec{\nabla}P$.)

(4) Στη μαγνητική πίεση αντιστοιχεί το $-\vec{\nabla}\left(\dfrac{B^2}{8\pi}\right) = -\dfrac{B_0^2\varpi}{4\pi R^2}\hat{\varpi}$ και στη μαγνητική τάση το $\dfrac{B^2}{4\pi\mathcal{R}}\hat{n} = -\dfrac{B_0^2\varpi}{4\pi R^2}\hat{\varpi}$, διότι $\mathcal{R} = \varpi$ και $\hat{n} = -\hat{\varpi}$.
Το ίδιο από $\dfrac{\vec{J}\times\vec{B}}{c}$ με $\vec{J} = \dfrac{c}{4\pi}\vec{\nabla}\times\vec{B} = \dfrac{c}{4\pi\varpi}\dfrac{d(\varpi B)}{d\varpi}\hat{z} = \dfrac{cB_0}{2\pi R}\hat{z}$, οπότε $\dfrac{\vec{J}\times\vec{B}}{c} = -\dfrac{B_0^2\varpi}{2\pi R^2}\hat{\varpi}$. Στην πίεση αντιστοιχεί το $-\vec{\nabla}\left(\dfrac{B^2}{8\pi}\right) = -\dfrac{B_0^2\varpi}{4\pi R^2}\hat{\varpi}$ και στην τάση το υπόλοιπο.

(5) $0 = \dfrac{\vec{J}\times\vec{B}}{c} - \vec{\nabla}P \Leftrightarrow \vec{\nabla}P = -\dfrac{B_0^2\varpi}{2\pi R^2}\hat{\varpi} \Leftrightarrow P = P_0 - \dfrac{B_0^2\varpi^2}{4\pi R^2}$ όπου P_0 η πίεση στον άξονα. Η πίεση στην επιφάνεια είναι $P_0 - \dfrac{B_0^2}{4\pi}$ και η ζητούμενη διαφορά είναι $\dfrac{B_0^2}{4\pi}$.

(6) $\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\dfrac{c}{\sigma}\vec{\nabla}\times\vec{J}$ αφού $\vec{E} = \dfrac{\vec{J}}{\sigma}$. Είναι $B\propto\varpi$ και $\vec{J} =$ σταθερά, δηλ. ισχύει $\vec{\nabla}\times\vec{J} = 0$ άρα το πεδίο δεν αλλάζει στο εσωτερικό της στήλης.
Το ίδιο προκύπτει και μέσω της $\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \eta\nabla^2\vec{B}$ διότι $\nabla^2(\varpi\hat{\phi}) = 0$.
Στα όρια επίσης δεν αλλάζει (στον άξονα το αζιμουθιακό πεδίο είναι μηδενικό ώστε το ρεύμα να είναι πεπερασμένο και στην επιφάνεια δίνεται ότι μένει σταθερό). Επομένως το πεδίο μένει ίδιο σε κάθε χρόνο.

(7) Έξω από τη στήλη $B\propto 1/\varpi$, $\vec{J} = 0$ και $\vec{\nabla}\times\vec{J} = 0$ άρα το πεδίο δεν αλλάζει (όπως και στο εσωτερικό της στήλης). Όμως στο όριο το ρεύμα είναι ασυνεχές επομένως στο όριο το πεδίο θα αρχίσει να αλλάζει. Η αλλαγή αυτή θα μεταφερθεί τελικά σε όλο το χώρο (επίσης το πλάσμα θα κινηθεί γιατί η μαγνητική δύναμη θα αλλάξει).
Είναι $\vec{J} = \dfrac{cB_0}{2\pi R}H(R-\varpi)\hat{z}$ επομένως $\vec{\nabla}\times\vec{J} = -\dfrac{\partial J_z}{\partial\varpi}\hat{\phi} = \dfrac{cB_0}{2\pi R}\delta(\varpi-R)\hat{\phi}$ και $\left.\dfrac{\partial B}{\partial t}\right|_{t=0} = -\dfrac{c^2B_0}{2\pi\sigma R}\delta(\varpi-R)$.

(8) Λόγω της $C_s = \sqrt{\dfrac{\gamma P}{\rho}}$ η Bernoulli $\dfrac{V^2}{2} + \dfrac{\gamma}{\gamma-1}\dfrac{P}{\rho} =$ σταθερά γράφεται $\dfrac{V^2}{2} + \dfrac{C_s^2}{\gamma-1} =$ σταθερά. Η σταθερά υπολογίζεται στο ηχητικό σημείο όπου $V = C_s = C_{s\star}$ και προκύπτει $\dfrac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}C_{s\star}^2$.

(9) $V_1V_2 = \dfrac{V_1^2}{r}$ διότι $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{\rho_2}{\rho_1} = r$. Αντικαθιστώντας το λόγο συμπίεσης $r = \dfrac{\gamma+1}{\gamma-1+2/M_1^2}$ και $M_1 = \dfrac{V_1}{C_{s1}}$ προκύπτει $V_1V_2 = \dfrac{(\gamma-1)V_1^2+2C_{s1}^2}{\gamma+1}$, έκφραση που ισούται με $C_{s\star}^2$ χρησιμοποιώντας την Bernoulli στο μέρος 1 (τα $C_{s\star}$ είναι ίδια στα δύο μέρη αφού η ροή ενέργειας προς τη ροή μάζας $\dfrac{V^2}{2} + \dfrac{C_s^2}{\gamma-1}$ είναι ίδια στα δύο μέρη).