Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής
Εξετάσεις στην Αστροφυσική Πλάσματος, 24 Ιουλίου 2020
Διάρκεια εξέτασης $1\frac{1}{2}$ ώρες, Καλή επιτυχία (★ = bonus ερωτήματα)

Ονοματεπώνυμο: ______________________________, ΑΜ: ____________

Έχω παραδώσει εργασίες: ΝΑΙ ☐ ΟΧΙ ☐

Έστω πλάσμα ηλεκτρονίων-πρωτονίων πυκνότητας n και θερμοκρασίας T.
(1) Η ενεργός διατομή των κρούσεων Coulomb είναι

$$\sigma \approx \boxed{}\ \mathrm{cm}^2 \left(\frac{T}{10^6\ ^{\mathrm{o}}\mathrm{K}}\right)^{\boxed{}}.$$

Συμπληρώστε με αριθμούς τα κενά θεωρώντας δεδομένη την σχέση $\sigma = (8\ln\Lambda)\,\sigma_{\mathrm{large}}$.
(2) Ποια η μέση ελεύθερη διαδρομή και ποια η συχνότητα των κρούσεων;
(3) Ποια η ηλεκτρική αγωγιμότητα σ_{E} συναρτήσει της θερμοκρασίας;
★ (4) Δείξτε ότι ο συντελεστής διάχυσης του μαγνητικού πεδίου είναι

$$\eta \approx 10^4\ \frac{\mathrm{cm}^2}{\mathrm{s}} \left(\frac{T}{10^6\ ^{\mathrm{o}}\mathrm{K}}\right)^{-3/2}.$$

Οι ηλιακές κηλίδες έχουν τυπικές διαστάσεις 10^9 cm, θερμοκρασία $\sim 4000\ ^{\mathrm{o}}\mathrm{K}$ ενώ κινούνται με τυπικές ταχύτητες 10^5 cm/s.
(5) Ποια εξίσωση περιγράφει την χρονική μεταβολή του μαγνητικού τους πεδίου;
(6) Ποια η χρονική κλίμακα κίνησης των κηλίδων και ποια η χρονική κλίμακα διάχυσης του μαγνητικού τους πεδίου; Τι συμπεραίνετε από την σύγκριση των δύο χρονικών κλιμάκων;

Για ένα γραμμικό μαγνητικό πεδίο μηδενικής δύναμης ισχύει $\vec{\nabla}\times\vec{B} = \alpha\vec{B}$ με σταθερό α.
(7) Υπό ποιες προϋποθέσεις το

$$B_x = C_1\cos(kx)e^{-\gamma y}, \quad B_y = -C_2\sin(kx)e^{-\gamma y}, \quad B_z = -C_3\cos(kx)e^{-\gamma y}$$

είναι τέτοιο πεδίο; (Οι C_1, C_2, C_3, k, γ είναι θετικές σταθερές.)
(8) Σχεδιάστε τις προβολές των δυναμικών του γραμμών στο επίπεδο x–z.
★ (9) Όμοια στο επίπεδο x–y για $-\pi/2k < x < \pi/2k$.

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ (δεν χρειάζονται όλα)

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\vec{J}\times\vec{B}}{c\rho} - \frac{\vec{\nabla}P}{\rho} + \vec{g}, \quad \vec{J} = \frac{c\vec{\nabla}\times\vec{B}}{4\pi}, \quad \frac{\vec{J}}{\sigma} = \vec{E} + \frac{\vec{V}\times\vec{B}}{c}, \quad \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\times\vec{E},$$

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}\right) - \nabla^2\vec{B}.$$

Τιμές φυσικών σταθερών στο σύστημα μονάδων cgs: $c = 3\times10^{10}$, $G = 6.67\times10^{-8}$, $m_e = 9.1\times10^{-28}$, $e = 4.8\times10^{-10}$, $1\ \mathrm{eV} = 1.6\times10^{-12}$, $m_p = 1.67\times10^{-24}$, $k_{\mathrm{B}} = 1.38\times10^{-16}$, $yr = 3.1\times10^7$, $1\ \mathrm{AU} = 1.5\times10^{13}$, $M_\odot = 2\times10^{33}$, $R_\odot = 6.96\times10^{10}$.

Όπου χρειάζεται θεωρήστε $\ln\Lambda = 20$.

<u>ΛΥΣΕΙΣ:</u>

(1) Ακτίνα ελάχιστης προσέγγισης $\dfrac{e^2}{r_0} \approx m_e v^2 \Leftrightarrow r_0 \approx \dfrac{e^2}{m_e v^2}$, όπου $v \approx \sqrt{3k_{\mathrm{B}}T/m_e}$, $\sigma_{\text{large}} \approx \pi r_0^2 \approx \dfrac{\pi e^4}{9k_{\mathrm{B}}^2T^2}$, άρα $\sigma = (8\ln\Lambda)\,\sigma_{\text{large}} \approx (8\ln\Lambda)\,\dfrac{\pi e^4}{9k_{\mathrm{B}}^2T^2}$. Αντικαθιστώντας τις τιμές των σταθερών στο cgs, $\ln\Lambda = 20$ και $T = 10^6 \left(\dfrac{T}{10^6\ {}^{\mathrm{o}}\mathrm{K}}\right)$ βρίσκουμε $\sigma \approx 10^{-16}\,\mathrm{cm}^2 \left(\dfrac{T}{10^6\ {}^{\mathrm{o}}\mathrm{K}}\right)^{-2}$.

(2) Από $n\lambda\sigma = 1$ η μέση ελεύθερη διαδρομή είναι $\lambda = \dfrac{1}{n\sigma}$.
Η συχνότητα των κρούσεων είναι το αντίστροφο του χρόνου μεταξύ των κρούσεων $\tau = \lambda/v$, δηλ. $\nu_c = v/\lambda = n\sigma v$. Αντικαθιστώντας $\sigma \approx (8\ln\Lambda)\,\dfrac{\pi e^4}{9k_{\mathrm{B}}^2T^2}$ και $v \approx \sqrt{3k_{\mathrm{B}}T/m_e}$ προκύπτει $\nu_c \approx 10^2 n T^{-3/2}$cgs.

(3) Αν υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο τα ηλεκτρόνια αποκτούν μέση ταχύτητα U στην διεύθυνση του πεδίου και η δύναμη eE ισούται με τον ρυθμό μεταβολής ορμής λόγω κρούσεων $m_e\dfrac{U-0}{\tau} = m_e U \nu_c$. Άρα $eE = m_e U\nu_c \Leftrightarrow U = eE/m_e\nu_c$ και το ρεύμα είναι $J = neU = ne^2E/m_e\nu_c = \sigma_{\mathrm{E}}E$ με $\sigma_{\mathrm{E}} = \dfrac{ne^2}{m_e\nu_c} \approx 10^{15}\left(\dfrac{T}{10^6\ {}^{\mathrm{o}}\mathrm{K}}\right)^{3/2}\ \mathrm{s}^{-1}$.

(4) Ο συντελεστής διάχυσης του μαγνητικού πεδίου είναι $\eta = \dfrac{c^2}{4\pi\sigma_{\mathrm{E}}} \approx 10^4\,\dfrac{\mathrm{cm}^2}{\mathrm{s}}\left(\dfrac{T}{10^6\ {}^{\mathrm{o}}\mathrm{K}}\right)^{-3/2}$.

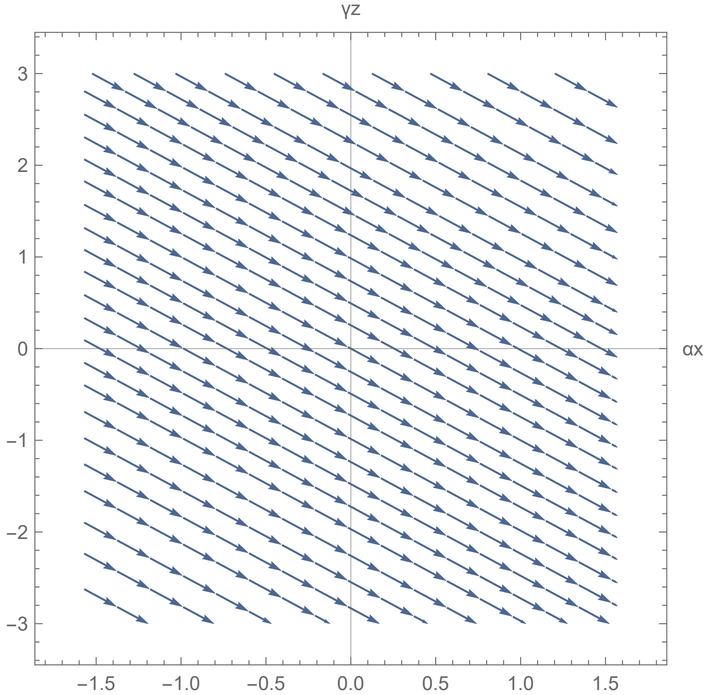
(5) Η εξίσωση δυναμό $\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla}\times\left(\vec{V}\times\vec{B}\right) + \eta\nabla^2\vec{B}$ που προκύπτει από τον νόμο Faraday $\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\times\vec{E}$ σε συνδυασμό με τους νόμους Ohm $\vec{E} = \dfrac{\vec{J}}{\sigma_{\mathrm{E}}} - \dfrac{\vec{V}\times\vec{B}}{c}$ και Ampére $\vec{J} = \dfrac{c\vec{\nabla}\times\vec{B}}{4\pi}$. (Χρησιμοποιήθηκε η ταυτότητα $\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}\right) - \nabla^2\vec{B}$, ενώ ο συντελεστής διάχυσης ορίστηκε σαν $\eta = \dfrac{c^2}{4\pi\sigma_{\mathrm{E}}}$.)

(6) Αφού οι ηλιακές κηλίδες έχουν τυπικές διαστάσεις $L \sim 10^9$ cm και τυπικές ταχύτητες $U \sim 10^5$ cm/s, η χρονική κλίμακα κίνησής τους είναι $\tau_U = L/U \sim 10^4$ s.
Η χρονική κλίμακα διάχυσης του μαγνητικού τους πεδίου είναι ο χρόνος στον οποίο ο όρος διάχυσης στην εξίσωση δυναμό αλλάζει το πεδίο κατά B. Είναι $\tau_\eta \sim L^2/\eta$ (όπως προκύπτει από την διαστατική εξίσωση των όρων $\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ και $\eta\nabla^2\vec{B}$ της εξίσωσης του δυναμό, δηλ. $B/\tau_\eta \sim \eta B/L^2$). Η αντικατάσταση δίνει $\tau_\eta \sim 10^{17}$ s (χρησιμοποιώντας τον συντελεστή η από το ερώτημα 4 για $T = 4000\ {}^{\mathrm{o}}$K).
Αφού $\tau_\eta \gg \tau_U$ η διάχυση είναι αμελητέα.

(7) Η σχέση $\vec{\nabla}\times\vec{B} = \alpha\vec{B} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ C_1\cos(kx)e^{-\gamma y} & -C_2\sin(kx)e^{-\gamma y} & -C_3\cos(kx)e^{-\gamma y} \end{vmatrix} =$
$\alpha C_1\cos(kx)e^{-\gamma y}\hat{x} - \alpha C_2\sin(kx)e^{-\gamma y}\hat{y} - \alpha C_3\cos(kx)e^{-\gamma y}\hat{z}$ δίνει ανά συνιστώσα τις $C_1 = \dfrac{\gamma}{\alpha}C_3$, $C_2 = \dfrac{k}{\alpha}C_3$, $kC_2 - \gamma C_1 = \alpha C_3$ (η τελευταία, σε συνδυασμό με τις δύο πρώτες για την μη-τετριμμένη περίπτωση $C_3 \neq 0$, γράφεται $\alpha^2 = k^2 - \gamma^2$).

(8) Οι προβολές των δυναμικών του γραμμών στο επίπεδο x–z έχουν εξίσωση $\dfrac{dx}{B_x} = \dfrac{dz}{B_z} \Leftrightarrow$

$\frac{dz}{dx} = -\frac{C_3}{C_1} = -\frac{\alpha}{\gamma}$, δηλ. είναι ευθείες $z + \frac{\alpha}{\gamma}x =$ σταθερά. Γράφονται και $z = z_0 - \frac{\alpha}{\gamma}x$ όπου z_0 η τιμή του z για $x = 0$ (διαφορετική για διαφορετικές γραμμές).



(9) Στο επίπεδο x–y όμοια $\frac{dx}{B_x} = \frac{dy}{B_y} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{C_2 \sin(kx)}{C_1 \cos(kx)} = -\frac{k \sin(kx)}{\gamma \cos(kx)} \Leftrightarrow y = \frac{1}{\gamma} \ln|\cos(kx)| +$ σταθερά. Για $-\pi/2k < x < \pi/2k$ το $\cos(kx) > 0$ οπότε το απόλυτο μέσα στο λογάριθμο δεν χρειάζεται. Γράφονται και $y = y_0 + \frac{1}{\gamma}\ln[\cos(kx)]$ όπου y_0 η τιμή του y για $x = 0$ (διαφορετική για διαφορετικές γραμμές).

Η εξίσωση των γραμμών γράφεται και σαν $\cos(kx)e^{-\gamma y} =$ σταθερό, δηλ. $B_z(x, y) =$ σταθερό.