Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής
Εξετάσεις στην Αστροφυσική Πλάσματος, 13 Σεπτεμβρίου 2019
Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες, Καλή επιτυχία (★ = bonus ερωτήματα)

Ονοματεπώνυμο: ______________________________, ΑΜ: ______________

Έχω παραδώσει εργασίες: ΝΑΙ ☐ ΟΧΙ ☐

Θέμα 1ο:

Ανάμεσα σε δύο παράλληλες πλάκες μεγάλης επιφάνειας A που βρίσκονται στις θέσεις $x = \pm L$ υπάρχει πλάσμα ηλεκτρονίων/πρωτονίων πυκνότητας n_0 και θερμοκρασίας T. Κάποια στιγμή φορτίζουμε τις πλάκες σε δυναμικά $\pm\Phi_0$, όπου $e|\Phi_0| \ll k_{\rm B}T$. Σύντομα αποκαθίσταται ισορροπία και το δυναμικό μέσα στο πλάσμα είναι $\Phi(x)$ με $e|\Phi| \ll k_{\rm B}T$.

(α) Δείξτε ότι οι συναρτήσεις κατανομής

$$f_\sigma = n_0 \left(\frac{m_\sigma}{2\pi k_{\rm B}T}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{m_\sigma \vec{v}^2/2 + q_\sigma \Phi(x)}{k_{\rm B}T}\right]$$

ικανοποιούν την εξίσωση Vlasov (χωρίς κρούσεις) με ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E} = -\dfrac{d\Phi}{dx}\hat{x}$.

(β) Βρείτε τις αριθμητικές πυκνότητες των ηλεκτρονίων και των πρωτονίων συναρτήσει του $\Phi(x)$.

(γ) Επιλύοντας τον νόμο Poisson δείξτε ότι το δυναμικό στο χώρο μεταξύ των πλακών είναι

$$\Phi(x) = \frac{\Phi_0}{\sinh(L/\lambda)}\sinh(x/\lambda)$$

με κατάλληλο λ το οποίο και να βρείτε.

(δ) Σχεδιάστε την λύση αν ισχύει $L \gg \lambda$ και σχολιάστε την φυσική σημασία του λ.

Υπόδειξη: Η λύση γράφεται και σαν επαλληλία εκθετικών $\Phi(x) = \Phi_0 \dfrac{e^{-(L-x)/\lambda} - e^{-(L+x)/\lambda}}{1 - e^{-2L/\lambda}}$. Σκεφτείτε που δεν είναι πρακτικά μηδέν ο κάθε όρος.

★ (ε) Βρείτε την πίεση και δείξτε ότι η κλίση της εξουδετερώνει την πυκνότητα δύναμης του ηλεκτρικού πεδίου, ή ισοδύναμα $P - E^2/8\pi =$ σταθερά.

★ (στ) Ποια η χωρητικότητα του πυκνωτή;

Θέμα 2ο:

Έστω στατική στήλη πλάσματος με μαγνητικό πεδίο $\vec{B} = B_\phi(\varpi)\hat{\phi}$ και θερμική πίεση $P = P(\varpi)$.

(α) Δείξτε ότι για δεδομένη πίεση το μαγνητικό πεδίο δίνεται από την σχέση $\dfrac{\varpi^2 B_\phi^2}{8\pi} = -\displaystyle\int_0^\varpi \varpi^2 \frac{dP}{d\varpi} d\varpi$.

(β) Έστω $P = P_0 e^{-\varpi^2/R^2}$, όπου P_0 και R σταθερές τις οποίες μπορείτε να θέσετε μονάδες για απλούστευση.
Ποιο είναι στην περίπτωση αυτή το μαγνητικό πεδίο B_ϕ και ποιο το αντίστοιχο ρεύμα $\vec{J}$;

(γ) Ποιο το ρεύμα που οφείλεται στην ολίσθηση λόγω καμπυλότητας δυναμικών γραμμών του $\vec{B}$;

★ (δ) Ποιες άλλες ολισθήσεις υπάρχουν; (Απλή αναφορά, όχι υπολογισμός.) Θα είναι το συνολικό ρεύμα των ολισθήσεων ίσο με αυτό που βρήκατε στο ερώτημα (β);

Θέμα 3ο:

Θέλουμε να μελετήσουμε πως τροποποιούνται τα κύματα Alfvén λόγω του ιξώδους, όταν δηλ. η εξίσωση ορμής είναι

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \left(\vec{V}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{V} = -\frac{\vec{\nabla}P}{\rho} + \frac{(\vec{\nabla}\times\vec{B})\times\vec{B}}{4\pi\rho} + $$
$$+ \nu\nabla^2\vec{V} + \left(\frac{\nu}{3} + \nu_\tau\right)\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{V})$$

όπου ν και ν_τ οι συντελεστές κινηματικού ιξώδους.

(α) Δείξτε ότι η νέα σχέση διασποράς είναι

$$k^2 = \frac{\omega^2}{V_A^2\cos^2\theta - i\nu\omega}$$

ακολουθώντας τα επόμενα βήματα:
Θεωρήστε ομογενή και στάσιμη αδιατάρακτη κατάσταση ρ_0, P_0, $\vec{V}_0 = 0$, $\vec{B}_0 = B_0\hat{z}$, προσθέστε διαταραχές $\rho_1 = 0$, $P_1 = 0$, $\vec{V}_1 = V_1\hat{y}$, $\vec{B}_1$ της μορφής $e^{-i\omega t + i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ με $\vec{k} = k\cos\theta\hat{z} + k\sin\theta\hat{x}$ και γραμμικοποιήστε τις εξισώσεις.
(Η ηλεκτρική αγωγιμότητα θεωρείται άπειρη.)

(β) Δείξτε ότι για «μικρό» ιξώδες προκύπτει η λύση

$$k \approx \frac{\omega}{V_A\cos\theta} + i\frac{\nu\omega^2}{2V_A^3\cos^3\theta}$$

και ότι σημαίνει εξασθένηση των κυμάτων σε κάποιο τυπικό μήκος το οποίο να βρείτε.
Τι σημαίνει «μικρό» ιξώδες για την διάδοση κυμάτων Alfvén;

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

$$\nabla^2\Phi = -4\pi\delta, \quad \vec{J} = \frac{c}{4\pi}\vec{\nabla}\times\vec{B}, \quad \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -c\vec{\nabla}\times\vec{E}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2}d\xi = \sqrt{\pi}, \quad \int_{-\infty}^{\infty}\xi^2 e^{-\xi^2}d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

$$\int_0^\xi \xi^3 e^{-\xi^2}d\xi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(\xi^2+1)e^{-\xi^2}, \quad (1+\epsilon)^n \approx 1 + n\epsilon \text{ για } |\epsilon| \ll 1.$$

Σε κυλινδρικές συντεταγμένες $\vec{\nabla}\times\vec{a} = \left(\dfrac{1}{\varpi}\dfrac{\partial a_z}{\partial\phi} - \dfrac{\partial a_\phi}{\partial z}\right)\hat{\varpi} + \left(\dfrac{\partial a_\varpi}{\partial z} - \dfrac{\partial a_z}{\partial\varpi}\right)\hat{\phi} + \dfrac{1}{\varpi}\left[\dfrac{\partial(\varpi a_\phi)}{\partial\varpi} - \dfrac{\partial a_\varpi}{\partial\phi}\right]\hat{z}$.