Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής
Εξετάσεις στην Αστροφυσική Πλάσματος, 5 Ιουνίου 2019
Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες, Καλή επιτυχία (★ = bonus ερωτήματα)

Ονοματεπώνυμο: ______________________________, ΑΜ: ______________

Έχω παραδώσει εργασίες: ΝΑΙ ☐ ΟΧΙ ☐

Θέμα 1ο:

Ο Ηλιακός άνεμος στην απόσταση της Γης έχει ταχύτητα $\vec{V} = 400$ km s$^{-1}\,\hat{r}$, αποτελείται κυρίως από πρωτόνια και ηλεκτρόνια με αριθμητική πυκνότητα 5 cm^{-3} και θερμοκρασία 10^5 K, ενώ το μαγνητικό του πεδίο είναι $\vec{B} = 10^{-5}$ G $(\hat{r} - \hat{\phi})$.

(α) Υπολογίστε την ελάχιστη απόσταση προσέγγισης φορτίων, το μήκος Debye και την παράμετρο πλάσματος.

(β) Εκτιμήστε την μέση ελεύθερη διαδρομή και κρίνετε αν οι κρούσεις Coulomb είναι σημαντικές.

(γ) Βρείτε όλες τις πιέσεις, δηλ. την δυναμική, την θερμική και την μαγνητική.

(δ) Βρείτε την $\vec{E} \times \vec{B}$ ολίσθηση και δείξτε ότι ισούται με την συνιστώσα της $\vec{V}$ κάθετα στο $\vec{B}$.

★ (ε) Αιτιολογήστε γιατί η γωνία μεταξύ $\vec{B}$ και $\hat{r}$ στην απόσταση της Γης είναι $\sim 45^o$.

Θέμα 2ο:

Το φύλλο ρεύματος Harris δημιουργείται από πληθυσμούς ηλεκτρονίων/πρωτονίων με ίσες αριθμητικές πυκνότητες και αντίθετες μέσες ταχύτητες, που περιγράφονται από τις συναρτήσεις κατανομής

$$f_\sigma = F(x)\left(\frac{m_\sigma}{2\pi k_{\rm B}T}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{m_\sigma\left(\vec{v}-\vec{u}_\sigma\right)^2}{2k_{\rm B}T}\right],$$

με $\vec{u}_\sigma = u_0\hat{y}$ και $-u_0\hat{y}$ για ηλεκτρόνια και πρωτόνια, αντίστοιχα (u_0 και T είναι θετικές σταθερές).

(α) Βρείτε τις αριθμητικές πυκνότητες και δείξτε ότι το συνολικό ρεύμα είναι $\vec{J} = -2eu_0F(x)\hat{y}$.

(β) Βρείτε την ολική θερμική πίεση P.

(γ) Το ρεύμα αντιστοιχεί σε μαγνητικό πεδίο $\vec{B} = B(x)\hat{z}$. Βρείτε την σχέση μεταξύ των συναρτήσεων $B(x)$ και $F(x)$ που πηγάζει από τον νόμο Ampère.

(δ) Δείξτε ότι η εξίσωση Vlasov (χωρίς κρούσεις) για κίνηση στο μαγνητικό πεδίο $\vec{B} = B(x)\hat{z}$ οδηγεί σε μια δεύτερη σχέση μεταξύ των συναρτήσεων $B(x)$ και $F(x)$ και τελικά στην σταθερότητα της ολικής πίεσης.

★ (ε) Δείξτε ότι η λύση των παραπάνω εξισώσεων για το μαγνητικό πεδίο, η οποία μηδενίζεται στο $x = 0$ (δηλ. αντιστοιχεί σε φύλλο ρεύματος στο επίπεδο $x = 0$), είναι $B(x) = B_0\tanh(x/L)$ και ότι το πάχος του φύλλου ρεύματος είναι $\sim \dfrac{c}{u_0}\lambda_{\rm D}$.

Θέμα 3ο:

Έστω ότι από την επιφάνεια του Ήλιου εκρέει πλάσμα μέσα σε ένα μαγνητικό σωλήνα, ο οποίος στην περιοχή που μας ενδιαφέρει να τον μελετήσουμε είναι κατακόρυφος, κυλινδρικός και με μικρή ακτίνα σε σχέση με την ακτίνα του Ήλιου. Η ροή είναι στάσιμη με $\vec{V} = V(z)\hat{z}$, το πλάσμα ισόθερμο, ενώ το μαγνητικό πεδίο είναι ομογενές $\vec{B} = B_0\hat{z}$. Η βαρύτητα στις διαστάσεις της ροής μπορεί να θεωρηθεί επίσης ομογενής $\vec{g} = -g\hat{z}$.

Στο επίπεδο $z = 0$ η πυκνότητα είναι ρ_0 και η ταχύτητα $V_0 \ll C_s$, όπου $C_s = \sqrt{P/\rho}$ η ταχύτητα ήχου του ισόθερμου πλάσματος (η οποία θεωρείται γνωστή σταθερά).

(α) Από την διατήρηση μάζας βρείτε πως μεταβάλλεται η πυκνότητα του πλάσματος $\rho(z)$ συναρτήσει της ταχύτητας.

(β) Χρησιμοποιώντας και την εξίσωση ορμής βρείτε την διαφορική εξίσωση που καθορίζει την $V(z)$.

(γ) Σχολιάστε τυχόν ομοιότητες ή διαφορές με τον ισόθερμο άνεμο Parker, ως προς το αν είναι δυνατόν η ροή να γίνει υπερηχητική.

(δ) Βρείτε πως αυξάνεται η ταχύτητα με την απόσταση, όσο παραμένει ισχυρά υποηχητική, δηλ. όσο ισχύει $V \ll C_s$.

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

$$\rho\frac{d\vec{V}}{dt} = -\vec{\nabla}P + \frac{\vec{J}\times\vec{B}}{c} + \rho\vec{g}, \quad \vec{J} = \frac{c}{4\pi}\vec{\nabla}\times\vec{B}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2}d\xi = \sqrt{\pi}, \quad \int_{-\infty}^{\infty}\xi^2 e^{-\xi^2}d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = (\vec{a}\cdot\vec{c})\,\vec{b} - (\vec{b}\cdot\vec{c})\,\vec{a}$.

Η λύση της $\dfrac{dB}{dx} = a^2 - b^2B^2$ με a, b σταθερές είναι $B = \dfrac{a}{b}\dfrac{\mathcal{D}e^{abx} - e^{-abx}}{\mathcal{D}e^{abx} + e^{-abx}}$ ($\mathcal{D}$ = σταθερά ολοκλήρωσης).

Τιμές φυσικών σταθερών στο σύστημα cgs: $m_e = 9.1\times10^{-28}$, $m_p = 1.67\times10^{-24}$, $c = 3\times10^{10}$, $k_{\rm B} = 1.38\times10^{-16}$, $e = 4.8\times10^{-10}$, 1 AU $= 1.5\times10^{13}$, $\Omega_\odot = 2.8\times10^{-6}$.

ΛΥΣΕΙΣ:

Θέμα 1^{ο}:

(α) $r_o = e^2/kT = 1.67\times 10^{-8}$, $\lambda_D = \sqrt{kT/4\pi ne^2} = 976$, $\Lambda = \lambda_D/r_o = 4\pi n\lambda_D^3 = 6\times 10^{10}$
(β) $\ell = \dfrac{1}{n\sigma} = \dfrac{1}{n\pi r_o^2} = 2.3\times 10^{14} \sim 10AU$ άρα δεν παίζουν ρόλο οι κρούσεις
(γ) $nm_pV^2 = 1.3\times 10^{-8}$, $P = 2nkT = 1.4\times 10^{-10}$, $B^2/8\pi = 10^{-10}/4\pi$
(δ) $\vec{E} = -\vec{V}\times\vec{B}/c = -V_rB_\phi/c\hat{z}$ και η ολίσθηση είναι $c\vec{E}\times\vec{B}/B^2 = -(\vec{V}\times\vec{B})\times\vec{B}/B^2 = \vec{V} - (\vec{V}\cdot\vec{B})/B^2 = \vec{V}_\perp$
(ε) $B_\phi/B_r = -r\Omega_\odot/V \sim -1$

Θέμα 2^{ο}:

(α) $n_\sigma = F(x)\left[\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dv\sqrt{\dfrac{m_\sigma}{2\pi k_\mathrm{B}T}}}{\exp\left(\dfrac{m_\sigma v^2}{2k_\mathrm{B}T}\right)}\right]^3 = F(x)$.
Η μέση ταχύτητα κάθε πληθυσμού είναι $\vec{u}_\sigma$, οπότε το ρεύμα είναι $\vec{J} = \displaystyle\sum_\sigma n_\sigma q_\sigma\vec{u}_\sigma = -2eu_0F(x)\hat{y}$.
(β) Οι συναρτήσεις κατανομής είναι ισοτροπικές στο σύστημα του κάθε ρευστού, οπότε η θερμική πίεση είναι βαθμωτή. Λόγω της Maxwellian εξάρτησης ως προς τις ταχύτητες είναι $P_\sigma = n_\sigma k_\mathrm{B}T$.
Το ίδιο βέβαια προκύπτει και από $P_{\sigma\,ij} = \langle n_\sigma m_\sigma v_i'v_j'\rangle$ με $\vec{v}\,' = \vec{v} - \vec{u}_\sigma$, δηλ. με άμεση ολοκλήρωση η οποία δίνει $P_{\sigma\,ij} = \iiint m_\sigma v_i'v_j'f_\sigma d^3v' = n_\sigma k_\mathrm{B}T\delta_{ij}$.
Άρα $P = \displaystyle\sum_\sigma n_\sigma k_\mathrm{B}T = 2k_\mathrm{B}TF(x)$.
(γ) $\vec{\nabla}\times\vec{B} = -B'\hat{y}$ άρα ο νόμος Ampère δίνει $\dfrac{4\pi}{c}\vec{J} = \vec{\nabla}\times\vec{B} \Leftrightarrow F = \dfrac{c}{8\pi eu_0}B'$.
(δ) $\vec{\nabla}f_\sigma = \dfrac{F'}{F}f_\sigma\hat{x}$, $\vec{\nabla}_{\vec{v}}f_\sigma = -f_\sigma\dfrac{m_\sigma}{k_\mathrm{B}T}(\vec{v}-\vec{u}_\sigma)$,
$\vec{v}\cdot\vec{\nabla}f_\sigma + \dfrac{q_\sigma}{m_\sigma}\left(\dfrac{\vec{v}}{c}\times\vec{B}\right)\cdot\vec{\nabla}_{\vec{v}}f_\sigma = v_xf_\sigma\left(\dfrac{F'}{F} + \dfrac{eu_0B}{k_\mathrm{B}Tc}\right)$,
οπότε η Vlasov δίνει $\dfrac{F'}{F} = -\dfrac{eu_0B}{k_\mathrm{B}Tc}$.
Η ολική πίεση είναι $P + \dfrac{B^2}{8\pi} = 2k_\mathrm{B}TF(x) + \dfrac{B^2}{8\pi} =$ σταθερά, αφού η παράγωγός της $2k_\mathrm{B}TF' + \dfrac{BB'}{4\pi}$ μηδενίζεται λόγω των σχέσεων $F = \dfrac{c}{8\pi eu_0}B'$ και $\dfrac{F'}{F} = -\dfrac{eu_0B}{k_\mathrm{B}Tc}$.
Η σταθερότητα της ολικής πίεσης είναι ισοδύναμη με την εξίσωση ισορροπίας $0 = -\vec{\nabla}P + \dfrac{\vec{\nabla}\times\vec{B}}{4\pi}\times\vec{B}$, η οποία βέβαια ικανοποιείται αφού προκύπτει από την εξίσωση Vlasov.

(ε) Η σχέση $P + \dfrac{B^2}{8\pi} = C$ με $P = 2k_\mathrm{B}TF(x)$ και $F = \dfrac{c}{8\pi eu_0}B'$ δίνει $B' = \dfrac{4\pi eu_0C}{ck_\mathrm{B}T} - \dfrac{eu_0}{2ck_\mathrm{B}T}B^2$. Σύμφωνα με την υπόδειξη έχει λύση $B = \dfrac{a}{b}\dfrac{\mathcal{D}e^{abx} - e^{-abx}}{\mathcal{D}e^{abx} + e^{-abx}}$ με $a = \sqrt{\dfrac{4\pi eu_0C}{ck_\mathrm{B}T}}$ και $b = \sqrt{\dfrac{eu_0}{2ck_\mathrm{B}T}}$. Η συνθήκη $B(x=0) = 0$ δίνει την σταθερά ολοκλήρωσης $\mathcal{D} = 1$, άρα η λύση γράφεται $B(x) = B_0\tanh(x/L)$ με $B_0 = \dfrac{a}{b} = \sqrt{8\pi C}$ και $L = \dfrac{1}{ab} = \dfrac{2ck_\mathrm{B}T}{eu_0B_0}$.
Η αριθμητική πυκνότητα είναι $n_\sigma = F = \dfrac{c}{8\pi eu_0}B' = \dfrac{cB_0}{8\pi eu_0L\cosh^2(x/L)}$ και το μήκος Debye $\lambda_\mathrm{D} = \sqrt{\dfrac{k_\mathrm{B}T}{4\pi n_\sigma e^2}} = \sqrt{\dfrac{2k_\mathrm{B}Tu_0L}{ecB_0}}\cosh(x/L) = \dfrac{u_0}{c}L\cosh(x/L)$, οπότε το μήκος L συνδέεται με το μήκος Debye στο κέντρο του φύλλου $L \sim \dfrac{c}{u_0}\lambda_\mathrm{D}$.

Θέμα 3^{ο}:

(α) $\rho V = \rho_0V_0$
(β) $\rho VdV/dz = -C_s^2d\rho/dz - \rho g$ και αφού $\rho \propto 1/V$ προκύπτει $VdV/dz = (C_s^2/V)dV/dz - g \Leftrightarrow \dfrac{dV}{dz} = \dfrac{gV}{C_s^2 - V^2}$.
(γ) Δεν μηδενίζεται ο αριθμητής οπότε δεν μπορεί να γίνει υπερηχητική η ροή.
(δ) $\dfrac{dV}{dz} \approx \dfrac{gV}{C_s^2} \Leftrightarrow V \approx V_0e^{gz/C_s^2}$.
Ουσιαστικά προκύπτει από το αποτέλεσμα της υδροστατικής ισορροπίας $\rho \approx \rho_0e^{-gz/C_s^2}$ με $V = V_0\rho_0/\rho$.