Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής
Εξετάσεις στην Αστροφυσική Πλάσματος, 6 Ιουνίου 2018
Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες, Καλή επιτυχία (★ = bonus ερωτήματα)

Ονοματεπώνυμο: ____, AM: ________________

Έχω παραδώσει ομάδες ασκήσεων 1^{η} ☐ 2^{η} ☐ 3^{η} ☐ 4^{η} ☐ 5^{η} ☐ στον κ. Τσίγκανο ☐

Θέμα 1^{o}:

Ηλεκτρόνιο (μάζας m_e και φορτίου $-e$) κινείται μέσα στο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο $\vec{B} = B_0 e^{y/y_0}\hat{z}$, $\vec{E}_0 = E_{0x}\hat{x} + E_{0y}\hat{y}$, δηλ. το μαγνητικό πεδίο είναι χωρικά μεταβαλλόμενο ενώ το ηλεκτρικό είναι κάθετο στο μαγνητικό, σταθερό και ισχύει $|\vec{E}_0| \ll B_0$.
Αρχικά το ηλεκτρόνιο βρίσκεται στην αρχή των αξόνων και έχει ταχύτητα $v_0\hat{y}$.
(α) Για ποια y_0 μπορούμε να περιγράψουμε την κίνηση σαν επαλληλία Larmor και ολισθήσεων;
(β) Ποια είναι η ολίσθηση λόγω του ηλεκτρικού πεδίου;
(γ) Δείξτε ότι η ολίσθηση λόγω ανομοιογένειας του μαγνητικού πεδίου είναι $\dfrac{v_0^2}{2\omega_0 y_0}\hat{x}$, όπου $\omega_0 = \dfrac{eB_0}{m_e c}$.
(δ) Για ποιο $\vec{E}_0$ οι ολισθήσεις αλληλοαναιρούνται;
★ (ε) Αν στο παραπάνω πεδίο κινούνται πολλά ηλεκτρόνια και πρωτόνια με αριθμητική πυκνότητα $n_e = n_p = n$ των οποίων οι ταχύτητες ακολουθούν Maxwellian κατανομές θερμοκρασίας $T_e = T_p = T$, ποιο το ρεύμα που δημιουργούν οι ολισθήσεις;

Θέμα 2^{o}:

Μια στήλη πλάσματος ακτίνας R διαρρέεται από ρεύμα σταθερής πυκνότητας J παράλληλης στον άξονά της.
(α) Ποιο το αζιμουθιακό μαγνητικό πεδίο B_ϕ στο εσωτερικό της στήλης και ποιο στον κενό χώρο έξω από την στήλη;
(β) Ποια η θερμική πίεση αν η στήλη βρίσκεται σε μαγνητοστατική ισορροπία; (Η πυκνότητα και η πίεση μηδενίζονται στην ακτίνα της στήλης.)
(γ) Δείξτε ότι η πίεση στον άξονα είναι διπλάσια από την μαγνητική πίεση στην ακτίνα R.
(δ) Δείξτε ότι η μέση θερμική πίεση είναι ίση με την μαγνητική πίεση στην ακτίνα R.
(ε) Πως μια τέτοια στήλη συνδέεται με το πρόβλημα της σύντηξης και γιατί δεν μπορεί να το λύσει;

Θέμα 3^{o}:

Θεωρείστε ένα αστέρα μάζας $\mathcal{M}_\star$ που περιβάλλεται από ένα ισόθερμο θερμό στέμμα στο οποίο η ταχύτητα του ήχου είναι V_s. Το στέμμα εκτονώνεται σε ένα ακτινικό άνεμο με ταχύτητα $V(r)$ όπου r είναι η απόσταση από το κέντρο του αστέρα.
(α) Δείξτε ότι υπάρχει μια χαρακτηριστική απόσταση από το κέντρο του αστέρα r_c (το κρίσιμο σημείο), όπου η ταχύτητα του ανέμου ισούται με την ταχύτητα του ήχου $V = V_s$ και η κλίση της ταχύτητας σε αυτή την απόσταση είναι:

$$\left(\frac{dV}{dr}\right)_c = \pm \frac{2V_s^3}{G\mathcal{M}_\star}\,.$$

(β) Δείξτε ότι η ενεργειακή εξίσωση του ανέμου μπορεί να γραφεί:

$$M e^{-\frac{M^2}{2}} = B\frac{e^{-\frac{\lambda}{R}}}{R^2}\,,$$

όπου $M \equiv V/V_s$, R η ακτίνα σε μονάδες αστρικής ακτίνας $r_\star$, $R \equiv \dfrac{r}{r_\star}$, $\lambda = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{V_{\rm esc}}{V_s}\right)^2 = \dfrac{G\,\mathcal{M}_\star\, m}{2\, r_\star\, k_{\rm B}\, T_\star}$ και B μία σταθερά. Υπολογίστε τη σταθερά αυτή B για τη λύση που περνά από το κρίσιμο σημείο $R = R_c$, $M = 1$.
(γ) Δείξτε ότι ο ρυθμός απώλειας μάζας από το άστρο $\dot{\mathcal{M}} = 4\pi r^2 \rho V$ είναι:

$$\dot{\mathcal{M}} = \pi r_\star^2 \rho_\star V_s \lambda^2 e^{\frac{3}{2}-\lambda+\frac{M_\star^2}{2}} \simeq \pi r_\star^2 \rho_\star V_s \lambda^2 e^{\frac{3}{2}-\lambda}\,,$$

και στην τελευταία προσέγγιση θεωρήσαμε ότι η ταχύτητα του ανέμου στη βάση $V_\star$ είναι πολύ μικρή, $V_\star << V_s$.
(δ) Θεωρώντας ότι η πυκνότητα στη βάση του αστρικού ανέμου από τον Ήλιο και τον ερυθρό υπεργίγαντα Betelgese είναι $\rho_\star \simeq 10^{-14}$ gr/cm^3, υπολογίστε το ρυθμό απώλειας μάζας από
(δ_1) τον Ήλιο όπου $\lambda_\star = \lambda_\odot \simeq 10$
(δ_2) τον ερυθρό υπεργίγαντα Betelgese με ακτίνα χίλιες φορές μεγαλύτερη αυτής του Ήλιου, $R_\star \simeq 1000 R_\odot$, θερμοκρασία ψυχρότερη, $T_\star \simeq 10^4\ K$, και μάζα δεκαπλάσια αυτής του Ήλιου, $\mathcal{M}_\star \simeq 10\mathcal{M}_\odot$.
(ε) Υπολογίστε την ασυμπτωτική ταχύτητα του ηλιακού ανέμου και του αστρικού ανέμου από τον υπεργίγαντα Betelgese.
(στ) Από αυτό το αποτέλεσμα, τι συμπεραίνετε για την απώλεια μάζας και την ασυμπτωτική ταχύτητα για ανέμους από ερυθρούς γίγαντες σε σχέση με τις αντίστοιχες ποσότητες για τον ηλιακό άνεμο;

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

$$\rho\frac{d\vec{V}}{dt} = -\vec{\nabla}P + \frac{1}{c}\vec{J}\times\vec{B}, \qquad \vec{J} = \frac{c}{4\pi}\vec{\nabla}\times\vec{B}.$$

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial \varpi}\hat{\varpi} + \frac{1}{\varpi}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\phi} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}, \qquad \vec{\nabla}\times\vec{a} = \left(\frac{1}{\varpi}\frac{\partial a_z}{\partial \phi} - \frac{\partial a_\phi}{\partial z}\right)\hat{\varpi} + \left(\frac{\partial a_\varpi}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial \varpi}\right)\hat{\phi} + \frac{1}{\varpi}\left[\frac{\partial(\varpi a_\phi)}{\partial \varpi} - \frac{\partial a_\varpi}{\partial \phi}\right]\hat{z}.$$

Τιμές φυσικών σταθερών στο σύστημα Γκάους (cgs): $c = 3\times10^{10}$, $G = 6.67\times10^{-8}$, $m_e = 9.1\times10^{-28}$, $e = 4.8\times10^{-10}$, $m_p = 1.67\times10^{-24}$, $k_{\rm B} = 1.38\times10^{-16}$, $yr = 3.1\times10^{7}$, 1 AU $= 1.5\times10^{13}$, $M_\odot = 2\times10^{33}$, $R_\odot = 6.96\times10^{10}$.