Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής
Εξετάσεις στη Αστροφυσική Πλάσματος, 15 Σεπτεμβρίου 2017
Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες, Καλή επιτυχία

Ονοματεπώνυμο: ____, ΑΜ: _______________

Έχω παραδώσει τις ομάδες ασκήσεων: 1^{η} ☐ 2^{η} ☐ 3^{η} ☐ 4^{η} ☐ και 5^{η} ☐ 6^{η} ☐ 7^{η} ☐

Θέμα 1^{o}:

Σε αρκετά καλή προσέγγιση το μαγνητικό πεδίο της Γης μπορεί να θεωρηθεί διπολικό με συνιστώσες $B_r = -\dfrac{2\mu \sin\lambda}{r^3}$ και $B_\lambda = \dfrac{\mu\cos\lambda}{r^3}$, όπου λ είναι το γεωμαγνητικό πλάτος και μ η διπολική ροπή.

(α) Δείξτε ότι κάθε δυναμική γραμμή του πεδίου περιγράφεται από την εξίσωση $r = R_e \cos^2\lambda$, όπου R_e είναι η μέγιστη απόσταση της γραμμής από το κέντρο της Γης (στο ισημερινό επίπεδο $\lambda = 0$).

(β) Ένα φορτίο είναι παγιδευμένο στην Γήινη μαγνητόσφαιρα και κινείται μεταξύ των πλατών $\pm\lambda_r$.

(β_1) Περιγράψτε πως μεταβάλλεται η γωνία κλίσης του (γωνία μεταξύ ταχύτητας και μαγνητικού πεδίου) καθώς το φορτίο κινείται από το ισημερινό επίπεδο ($\lambda = 0$) μέχρι το μέγιστο πλάτος λ_r.

(β_2) Αν $\lambda_r = 45^\circ$ ποια είναι η γωνία κλίσης του φορτίου όταν περνά από το ισημερινό επίπεδο;

Θέμα 2^{o}:

Μια κυλινδρικά συμμετρική στήλη πλάσματος ακτίνας R βρίσκεται σε μαγνητοστατική ισορροπία. Η στήλη διαπερνάται από μαγνητικό πεδίο $\vec{B} = B_z(\varpi)\hat{z} + B_\phi(\varpi)\hat{\phi}$, σε κυλινδρικές συντεταγμένες (z, ϖ, ϕ), ενώ η θερμική πίεση του πλάσματος είναι $P(\varpi)$.

(α) Γράψτε την εξίσωση της μαγνητοστατικής ισορροπίας η οποία συνδέει τις συναρτήσεις $B_z(\varpi)$, $B_\phi(\varpi)$ και $P(\varpi)$.

(β) Έστω ότι δεν υπάρχει αζιμουθιακό μαγνητικό πεδίο και $B_z(\varpi) = B_0 \sin\left(\dfrac{\pi\varpi}{2R}\right)$, όπου $B_0 =$ σταθερά.

(β_1) Ποια η μαγνητική δύναμη και ποια τα μέρη της που αντιστοιχούν στην μαγνητική πίεση και τάση;

(β_2) Υπολογίστε την θερμική πίεση, γνωρίζοντας ότι μηδενίζεται για $\varpi = R$.

Θέμα 3^{o}:

Έστω ότι από την επιφάνεια του Ήλιου εκρέει πλάσμα μέσα από ένα σωλήνα ροής, ο οποίος στην περιοχή που μας ενδιαφέρει να τον μελετήσουμε έχει τον άξονά του κατακόρυφο, διατομή $A(z)$ και μικρή ακτίνα σε σχέση με την ακτίνα του Ήλιου. Η ροή είναι στάσιμη με $\vec{V} = V(z)\hat{z}$ και το πλάσμα είναι ισόθερμο. Η βαρύτητα στις διαστάσεις της ροής μπορεί να θεωρηθεί επίσης ομογενής $\vec{g} = -g\hat{z}$.

Στο επίπεδο $z = 0$ η πυκνότητα είναι ρ_0 και η ταχύτητα $V_0 \ll c$, όπου $c = \sqrt{P/\rho}$ η ταχύτητα ήχου του ισόθερμου πλάσματος (η οποία θεωρείται γνωστή σταθερά).

(α) Από την διατήρηση της μάζας βρείτε πως μεταβάλλεται η πυκνότητα του πλάσματος $\rho(z)$ συναρτήσει της ταχύτητας.

(β) Χρησιμοποιώντας και την εξίσωση ορμής βρείτε τη διαφορική εξίσωση που καθορίζει την ταχύτητα $V(z)$.

(γ) Αν στη βάση του σωλήνα $z = z_o$ η ροή είναι υποηχητική ($V < c$), υπάρχει κάποιο ύψος $z = z_c$ όπου η ροή γίνεται υπερηχητική ($V > c$) για δεδομένη διατομή $A(z)$; Σχολιάστε τυχόν ομοιότητες ή διαφορές με τον ισόθερμο άνεμο Parker, ως προς το αν είναι δυνατόν η ροή να γίνει υπερηχητική.

(δ) Πώς πρέπει να μεταβάλλεται η διατομή του σωλήνα $A(z)$ έτσι ώστε η ροή να επιταχύνεται συνεχώς;

(ε) Βρείτε πως αυξάνεται η ταχύτητα με την απόσταση, όσο παραμένει ισχυρά υποηχητική, δηλ. όσο ισχύει $V \ll c$, αν $A(z) =$ σταθερά.

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

$$\rho\frac{d\vec{V}}{dt} = \rho\vec{g} - \vec{\nabla}P + \frac{\vec{J}\times\vec{B}}{c}, \quad \vec{J} = \frac{c}{4\pi}\vec{\nabla}\times\vec{B}, \quad \vec{\nabla}\times\vec{a} = \left(\frac{1}{\varpi}\frac{\partial a_z}{\partial\phi} - \frac{\partial a_\phi}{\partial z}\right)\hat{\varpi} + \left(\frac{\partial a_\varpi}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial\varpi}\right)\hat{\phi} + \frac{1}{\varpi}\left[\frac{\partial(\varpi a_\phi)}{\partial\varpi} - \frac{\partial a_\varpi}{\partial\phi}\right]\hat{z}.$$