Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής
Εξετάσεις στη Αστροφυσική Πλάσματος, 20-6-2017 - Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες
Διδάσκοντες Ν. Βλαχάκης και Κ. Τσίγκανος - Καλή επιτυχία

Ονοματεπώνυμο: ______________________________, ΑΜ: ______________

Έχω παραδώσει τις ομάδες ασκήσεων: $1^{\eta}$ ☐ $2^{\eta}$ ☐ $3^{\eta}$ ☐ $4^{\eta}$ ☐ και $5^{\eta}$ ☐ $6^{\eta}$ ☐ $7^{\eta}$ ☐

## Θέμα $1^{\text{ο}}$:

(α) Τι σημαίνουν σε ένα πλάσμα οι ανισότητες
($\alpha_1$) $\dfrac{\lambda_{\text{Debye}}}{r_0} \gg 1$ όπου $\dfrac{e^2}{r_0} = k_B T$ και ($\alpha_2$) $\dfrac{e^2}{n^{-1/3}} \ll k_B T$; Σχετίζεται η πρώτη με την $N_{\text{Debye}} \gg 1$;
(β) Κατατάξτε τα μήκη $\lambda_{\text{Debye}}$, $L$, $r_0$, $n^{-1/3}$ σε ένα ιδεατό πλάσμα διάστασης $L$.
(γ) Υπολογίστε τα παραπάνω μήκη για το πλάσμα της ιονόσφαιρας η οποία εκτείνεται από 100 ως 1000 km πάνω από την επιφάνεια της Γης ($n = 10^5$ cm$^{-3}$, $T = 1000$°K).

## Θέμα $2^{\text{ο}}$:

(α) Γράψτε (δείξτε πως προκύπτει) την εξίσωση δυναμό. Σχολιάστε τους τρεις όρους της και αναφέρατε τι περιγράφει η εξίσωση αυτή αν ένας από τους τρεις όρους είναι αμελητέος (τρεις περιπτώσεις).
(β) Το πλάσμα ενός δίσκου προσαύξησης γύρω από ένα άστρο μάζας $M$ κινείται με ταχύτητα

$$\vec{V} = -\frac{3\nu}{2\varpi}\hat{\varpi} + \sqrt{\frac{GM}{\varpi}}\hat{\phi}\,,$$

όπου $\nu$ σταθερά.
Ο δίσκος διαπερνάται από στάσιμο (χρονοανεξάρτητο) μαγνητικό πεδίο

$$\vec{B} = B_0 \left(\frac{\varpi}{\varpi_0}\right)^{-a} \hat{z}\,,$$

όπου $B_0$, $\varpi_0$ και $a$ σταθερές.
Ποιος είναι ο (σταθερός) συντελεστής μαγνητικής διάχυσης;

## Θέμα $3^{\text{ο}}$:

Ένα άστρο μάζας Μ ευρίσκεται εντός ενός ομογενούς διαστρικού αερίου το οποίο και προσροφά προς την επιφάνειά του με χρονοανεξάρτητο ρυθμό και σφαιρικά συμμετρικά τρόπο έτσι ώστε όλες οι φυσικές ποσότητες του φαινομένου να εξαρτώνται μόνο από τη σφαιρική απόσταση $r$ από το αστρικό κέντρο. Υποθέτουμε ότι υπάρχει μια πολυτροπική σχέση ανάμεσα στην πίεση και την πυκνότητα του αερίου ($\bar{P} = K\bar{\rho}^{\gamma}$) και έστω $V_{s\infty}$ η ταχύτητα του ήχου στο περιβάλλον μακρινό αέριο το οποίο έχει ομογενή πυκνότητα $\bar{\rho}_{\infty}$. Έστω $r_B = GM/V_{s\infty}^2$ το χαρακτηριστικό μήκος του συστήματος. Θέλουμε να μελετήσουμε το φαινόμενο αυτό της βαρυτικής προσρόφησης του αερίου από το άστρο, χρησιμοποιώντας τις βασικές εξισώσεις της μαγνητο-υδροδυναμικής, όπως ακριβώς μελετήσαμε και το αντίστροφο φαινόμενο του ηλιακού ανέμου.

1. Από τις εξισώσεις διατήρησης ορμής και μάζας παράγετε την εξίσωση διατήρησης της ολικής ενέργειας κατά μήκος μιας ακτινικής γραμμής ροής (εξίσωση Bernoulli), παρόμοια με το αντίστροφο πρόβλημα του Ηλιακού Ανέμου. Συγκεκριμένα, αφού χρησιμοποιήσετε γιά την απόσταση, πυκνότητα, πίεση, θερμοκρασία και αδιάστατη ταχύτητα τα αντίστοιχα αδιάστατα μεγέθη $R$, $\rho$, $P$, $T$, $M_o$ και $M$:

$$R = \frac{r}{r_B}\,, \rho = \frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}_{\infty}}\,,\ P = \frac{\bar{P}}{\bar{P}_{\infty}} = \rho^{\gamma}\,,\ \frac{V_s^2}{V_{s\infty}^2} = \rho^{\gamma-1}\,,\ M_o^2 = \frac{V^2}{V_{s\infty}^2}\,,\ M^2 = \frac{V^2}{V_s^2} = \frac{M_0^2}{\rho^{\gamma-1}}\,, \tag{1}$$

με $M$ τον αριθμό Mach και $M_o$ την αδιάστατη ταχύτητα σε μονάδες την ταχύτητα του ήχου στο άπειρο, ολοκληρώστε τις εξισώσεις διατήρησης της μάζας και της ορμής για να παράγετε την ακόλουθη αδιάστατη ροή μάζας $\mu$ και την αδιάστατη ολική ενέργεια της ροής ανά μονάδα μάζας $E$:

$$\mu = \rho\, M_o R^2\,, \qquad \frac{M_o^2}{2} - \frac{1}{R} + \frac{\rho^{\gamma-1}}{\gamma-1} = \frac{\bar{E}}{V_{s\infty}^2} = E\,. \tag{2}$$

2. Επειδή στο άπειρο $V=0$, $M_o=0$ και $\rho=1$, προσδιορίστε την σταθερά E, και δείξτε ότι η εξίσωση διατήρησης της ολικής ενέργειας κατά μήκος μιας ακτινικής γραμμής ροής (εξίσωση Bernoulli) είναι:

$$\frac{M_o^2}{2} - \frac{1}{R} + \frac{\rho^{\gamma-1}-1}{\gamma-1} = 0\,,\ \text{ή}\,,\quad \frac{M_o^2}{2} - \frac{1}{R} + \frac{1}{\gamma-1}\left[\left(\frac{\mu}{M_o R^2}\right)^{\gamma-1} - 1\right] = 0\,. \tag{3}$$

3. Συνδυάζοντας τις εξισώσεις διατήρησης μάζας και ορμής, και ακολουθώντας ακριβώς την ίδια βήματα που ακολουθήσαμε για να παράγουμε την εξίσωση Mach του HA, δείξτε την ακόλουθη διαφορική εξίσωση Bondi (αντίστοιχη της εξίσωσης Mach για την περίπτωση του Ηλιακού Ανέμου):

$$\frac{1}{M_o^2}\frac{\mathrm{d}M_o^2}{\mathrm{d}R} = \frac{2}{R}\frac{2-\dfrac{1}{R}\dfrac{1}{\rho^{\gamma-1}}}{\dfrac{M_o^2}{\rho^{\gamma-1}}-1} = \frac{2}{R}\frac{2-\dfrac{1}{R}\dfrac{M^2}{M_o^2}}{M^2-1}. \tag{4}$$

4. Από την ανωτέρω εξίσωση Bondi, Εξ. (4) υπολογίστε στο κρίσιμο σημείο $M=1$, $r=r_c$, όπου η προσρόφηση γίνεται υπερηχητική, την κρίσιμη απόσταση $r_c$ και την ταχύτητα του ήχου εκεί, $V_s(r_c)$.

5. Δείξτε ότι ο ρυθμός με τον οποίο προσροφά μάζα το άστρο είναι,

$$\dot{M} = \pi r_B^2 \bar{\rho}_\infty V_{s\infty}\left(\frac{2}{5-3\gamma}\right)^{\dfrac{5-3\gamma}{2(\gamma-1)}}$$

Υπόδειξη: υπολογίστε την $\dot{M}$ απο το ολοκλήρωμα της ροής της μάζας στο κρίσιμο σημείο όπου έχετε ήδη υπολογίσει τις τιμές των $M(r_c)$ και $r_c$, στο ερώτημα 4, χρησιμοποιώντας επίσης και την τιμή της κρίσιμης πυκνότητας $\rho_c$ από το ολοκλήρωμα *Bernoulli*, Εξ. (3).

6. Θεωρείστε μια λύση προσρόφησης τύπου "αύρας", δλδ μια λύση της οποίας η ταχύτητα σε μικρές αποστάσεις από το άστρο είναι πολύ μικρή. Δείξτε ότι η πυκνότητα σε μια τέτοια λύση είναι

$$\rho_{\text{breeze}} = \frac{\bar{\rho}_{\text{breeze}}}{\bar{\rho}_\infty} = \left[1 + \frac{(\gamma-1)}{R}\right]^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

Υπολογίστε αυτό το λόγο κοντά στην επιφάνεια ενός άστρου όπως ο Ήλιος, το οποίο ευρίσκεται εντός μεσοαστρικού υλικού με πυκνότητα $1/cm^3$ και θερμοκρασία $T=100K$, αν $\gamma=1.1$. Εξηγείστε γιατί μια τέτοια λύση τύπου "αύρας" δεν είναι φυσικά αποδεκτή και επομένως η προσρόφηση περιγράφεται μόνο από μια λύση η οποία διέρχεται από το κρίσιμο σημείο.

## ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

$$\vec{J} = \frac{c}{4\pi}\vec{\nabla}\times\vec{B}, \quad \vec{J} = \sigma\left(\vec{E} + \frac{\vec{V}}{c}\times\vec{B}\right), \quad \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\times\vec{E}, \quad \eta = \frac{c^2}{4\pi\sigma},$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{a} = \left(\frac{1}{\varpi}\frac{\partial a_z}{\partial\phi} - \frac{\partial a_\phi}{\partial z}\right)\hat{\varpi} + \left(\frac{\partial a_\varpi}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial\varpi}\right)\hat{\phi} + \frac{1}{\varpi}\left[\frac{\partial(\varpi a_\phi)}{\partial\varpi} - \frac{\partial a_\varpi}{\partial\phi}\right]\hat{z},$$
$$\nabla^2\vec{a} = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{a}\right) - \vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{a}\right).$$

Τιμές φυσικών σταθερών στο σύστημα Γκάους (cgs): $c = 3\times10^{10}$, $G = 6.67\times10^{-8}$, $m_e = 9.1\times10^{-28}$, $e = 4.8\times10^{-10}$, $1\ \mathrm{eV} = 1.6\times10^{-12}$, $m_p = 1.67\times10^{-24}$, $k_\mathrm{B} = 1.38\times10^{-16}$, $yr = 3.1\times10^{7}$, $1\ \mathrm{AU} = 1.5\times10^{13}$, $M_\odot = 2\times10^{33}$, $R_\odot = 6.96\times10^{10}$.