Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής
Εξετάσεις στη Αστροφυσική Πλάσματος, 22 Φεβρουαρίου 2017
Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες, Καλή επιτυχία

## Θέμα 1$^{\text{o}}$:

Ο Ηλιακός Άνεμος στην απόσταση της Γης (1 AU) έχει ταχύτητα 400 km/s, θερμοκρασία $10^5$ K και αποτελείται κυρίως από πρωτόνια και ηλεκτρόνια με αριθμητική πυκνότητα 3 cm$^{-3}$.
(α) Θεωρώντας τον άνεμο σφαιρικά συμμετρικό, πόση μάζα ανά χρόνο απάγει από τον Ήλιο και σε πόσο χρόνο ο Ήλιος θα έχανε όλη τη μάζα του λόγω του ανέμου αυτού;
(β) Δείξτε ότι η ενεργός διατομή των κρούσεων Coulomb είναι $\sigma \approx \dfrac{\pi e^4}{k_{\mathrm{B}}^2 T^2}$.
(γ) Υπολογίστε τη μέση ελεύθερη διαδρομή των κρούσεων Coulomb για τον ηλιακό άνεμο στην απόσταση της Γης και κρίνετε αν είναι σημαντικές.
Δίνονται στο σύστημα μονάδων cgs: $k_{\mathrm{B}} = 1.38 \times 10^{-16}$, $e = 4.8 \times 10^{-10}$, $m_p = 1.67 \times 10^{-24}$, $1 \text{ AU} = 1.5 \times 10^{13}$, $M_\odot = 2 \times 10^{33}$.

## Θέμα 2$^{\text{o}}$:

Έστω μαγνητισμένο, στατικό, ισοτροπικό πλάσμα, με μαγνητικό πεδίο $\vec{B} = B(x)\hat{y}$. Το πλάσμα ισορροπεί αν η πίεσή του $P(x)$ ικανοποιεί την εξίσωση $-\vec{\nabla} P + \dfrac{1}{c}\vec{J} \times \vec{B} = 0$.
(α) Αιτιολογήστε γιατί η εξίσωση ισορροπίας του πλάσματος είναι ισοδύναμη με $P + \dfrac{B^2}{8\pi} = \text{σταθερά}$.
(β) Δείξτε ότι οι ταχύτητες των φορτίων παράλληλα και κάθετα στο μαγνητικό πεδίο ικανοποιούν τις $\sum_\sigma m_\sigma n_\sigma < v_{\parallel\sigma}^2 > = P\,, \quad \sum_\sigma m_\sigma n_\sigma < v_{\perp\sigma}^2 > = 2P\,.$
(γ) Δείξτε ότι η ολίσθηση λόγω ανομοιογένειας του πεδίου $\vec{v}_{\vec{\nabla} B,\sigma} = -\dfrac{c m_\sigma v_{\perp\sigma}^2 \vec{\nabla} B \times \vec{B}}{2 q_\sigma B^3}$ δημιουργεί ρεύμα $\vec{J}_{\vec{\nabla} B} = -\dfrac{cP}{B^2}\dfrac{dB}{dx}\hat{z}$.
(δ) Υπάρχει και άλλη συνιστώσα του ρεύματος που οφείλεται στη μαγνήτιση που δημιουργούν οι κινήσεις Larmor. Δείξτε ότι η μαγνήτιση αυτή είναι $\vec{M} = -\dfrac{P}{B}\hat{y}$ και υπολογίστε το αντίστοιχο ρεύμα $\vec{J}_M = c\vec{\nabla} \times \vec{M}$.
(ε) Δείξτε ότι ο νόμος Ampère $\vec{J} = \dfrac{c}{4\pi}\vec{\nabla} \times \vec{B}$ με $\vec{J} = \vec{J}_{\vec{\nabla} B} + \vec{J}_M$ είναι ισοδύναμος με την εξίσωση ισορροπίας του πλάσματος.

## Θέμα 3$^{\text{o}}$:

Θεωρήστε μία απομονωμένη κυλινδρικά συμμετρική στήλη πλάσματος ακτίνας $\alpha$ την οποία διαπερνά ένα μαγνητικό πεδίο $B_o\hat{z}$ ($B_o = \text{σταθ.}$), σε κυλινδρικές συντεταγμένες $(z, r, \phi)$, η οποία ευρίσκεται σε μαγνητοστατική ισορροπία. Η θερμική πίεση του πλάσματος είναι

$$P(r) = P_o\left(1 - \frac{r}{\alpha}\right)\,.$$

(α) Γράψτε την εξίσωση της μαγνητοστατικής ισορροπίας η οποία προσδιορίζει το αζιμουθιακό μαγνητικό πεδίο $B_\phi(r)$ για την προηγούμενη θερμική πίεση του πλάσματος.
(β) Επιλύοντας την προηγούμενη εξίσωση, υπολογίστε την έκφραση του αζιμουθιακού μαγνητικού πεδίου $B_\phi(r)$, συναρτήσει των $P_o$ και $\alpha$, στην περιοχή της στήλης $0 \le r \le \alpha$.
(γ) Υπολογίστε το ρεύμα $I(r)$ που διαρρέει τη στήλη.
Δίδεται ο Νόμος του Ampére για κυλινδρικά συμμετρικά συστήματα, $\dfrac{4\pi}{c}J_z = \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}(rB_\phi)$, όπου $J_z$ η πυκνότητα του ρεύματος στην διεύθυνση $\hat{z}$.