Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής
Εξετάσεις στη Φυσική Πλάσματος, 8 Οκτωβρίου 2014
Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες, Καλή επιτυχία

Ονοματεπώνυμο: ______________________________________, ΑΜ: ____________

Έχω παραδώσει ομάδες ασκήσεων 1^{η} ☐ 2^{η} ☐ 3^{η} ☐ 4^{η} ☐ 5^{η} ☐ στον κ. Τσίγκανο ☐

Θέμα 1^{o}:

(α) Σωμάτια μάζας m και φορτίου q κινούνται σε σταθερό μαγνητικό πεδίο $\vec{B} = B_0\hat{z}$ και σταθερό πεδίο δύναμης $\vec{F} = F\hat{x}$. Περιγράψτε την κίνηση.
(β) Έστω φορτία κινούνται σε σταθερό μαγνητικό πεδίο $\vec{B} = B_0\hat{z}$ και χωρικά ανομοιογενές ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E} = E_0\cos(kx)\hat{x}$, το οποίο αλλάζει αργά στην έκταση της τροχιάς Larmor, δηλ. $kr_{\rm L} \ll 1$.
(β_1) Δείξτε ότι η μέση δύναμη από το ηλεκτρικό πεδίο είναι $\vec{F} = qE_0\,(1 - k^2r_{\rm L}^2/4)\cos(k\overline{x})\hat{x}$, όπου $\overline{x}$ η μέση τιμή του x.
Υπόδειξη: Αιτιολογήστε γιατί αν αγνοήσουμε την ανομοιογένεια του ηλεκτρικού πεδίου είναι $x(t) = \overline{x} + r_{\rm L}\sin(\omega_{\rm L}t)$ και βρείτε το $\overline{\cos\left[k\overline{x} + kr_{\rm L}\sin(\omega_{\rm L}t)\right]}$.
(β_2) Ποια η ολίσθηση λόγω του παραπάνω ανομοιογενούς ηλεκτρικού πεδίου;
(γ – bonus ερώτημα) Δείξτε ότι στη γενική περίπτωση κίνησης σε ομογενές $\vec{B}$ και αργά χωρικά μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}(\vec{r})\perp\vec{B}$ (κάθετο στο $\vec{B}$) η ολίσθηση είναι $\vec{v}_{\vec{E}} = c\left(1 + \dfrac{1}{4}r_{\rm L}^2\nabla^2\right)\dfrac{\vec{E}\times\vec{B}}{B^2}$.

Θέμα 2^{o}:

Σε ένα μοντέλο Ηλιακών μαγνητικών βρόχων το μαγνητικό πεδίο έχει τις συνιστώσες
$B_x = B_o e^{-kz}\cos(kx)\,, \qquad B_z = -B_o e^{-kz}\sin(kx)$,
με $|x| < \pi/(2k) << r_o\,,\ z > 0$, όπου r_o η ηλιακή ακτίνα.
(α) Το συγκεκριμένο μοντέλο του μαγνητικού πεδίου, διατηρεί την μαγνητική ροή ;
(β) Βρείτε την εξίσωση μιας μαγνητικής γραμμής στο επίπεδο $x - z$ και σχεδιάστε την.
(γ) Υπολογίστε την πυκνότητα $\vec{J}$ του ηλεκτρικού ρεύματος που παράγει αυτό το μαγνητικό πεδίο.
(δ) Αν οι βρόχοι αυτοί είναι ισόθερμοι, υπολογίστε πως μεταβάλλεται με το ύψος z η πυκνότητα του πλάσματος που περιέχουν, κατά μήκος των.

Θέμα 3^{o}:

Η ατμόσφαιρα (Στέμμα) ενός άστρου αποτελείται από πλήρως ιονισμένο υδρογόνο και είναι στατική. Θέλουμε να υπολογίσουμε την πίεση της ατμόσφαιρας σε μεγάλες αποστάσεις $R = r/r_o >> 1$ από την φωτόσφαιρά του, όπου r_o είναι η ακτίνα του άστρου, δλδ, η ακτίνα της φωτόσφαιρας.
(α) Γράψτε την εξίσωση δυναμικής ισορροπίας για την πίεση σε απόσταση R υποθέτοντας ότι η ατμόσφαιρα είναι ισόθερμη. Δίδεται η σταθερά

$$\lambda = \frac{GM_\odot m_p}{2k_{\rm B}T_o r_o} = 10.$$

(β) Λύνοντας αυτή την εξίσωση, υπολογίστε το λόγο της πίεσης στην απόσταση R προς την πίεση P_o στη φωτόσφαιρα, $P(R)/P_o$. Με τι ισούται αυτός ο λόγος όταν $R \longrightarrow \infty$; Μπορεί να είναι σε δυναμική ισορροπία αυτή η ατμόσφαιρα με την μεσοαστρική ύλη (ISM) στην απόσταση $R_{\rm ISM} = 20.000$, δεδομένου ότι $P(R_{\rm ISM})/P_o \approx 10^{-10}$;
(γ) Υποθέτουμε στη συνέχεια ότι η ατμόσφαιρα είναι πολυτροπική με πολυτροπικό δείκτη γ, δλδ, $P = K\rho^\gamma$. Γράψτε πάλι την εξίσωση στατικής δυναμικής ισορροπίας και ολοκληρώστε την για να υπολογίσετε το λόγο $P(R)/P_o$ συναρτήσει του R και των σταθερών $\lambda = GM_\odot m_p/(2\gamma k_{\rm B}T_o r_o) = 10$ και γ.
(δ) Υπολογίστε το λόγο $P(R \longrightarrow \infty)/P_o$:
(δ_1) για μια αδιαβατική (<u>μη θερμαινόμενη</u>) ατμόσφαιρα, δλδ, όταν $\gamma = 5/3$,
(δ_2) για μια <u>ήπια θερμαινόμενη</u> ατμόσφαιρα, δλδ, όταν $1.1 < \gamma < 5/3$,
(δ_3) την <u>οριακά θερμαινόμενη</u> ατμόσφαιρα όπου $\gamma = 1 + \dfrac{1}{\lambda} = 1.1$ και τέλος
(δ_4) για μια <u>εντατικά θερμαινόμενη</u> ατμόσφαιρα, δλδ, όταν $1 < \gamma < 1.1$.
(ε) Συνοψίστε τα ανωτέρω συμπεράσματά σας για το κατά πόσο μια στατική αστρική ατμόσφαιρα μπορεί να είναι σε δυναμική ισορροπία με την μεσοαστρική ύλη (ISM) στην απόσταση $R_{\rm ISM}$, δεδομένου ότι $P(R_{\rm ISM})/P_o \approx 10^{-10}$.

<u>ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ</u>

$$\rho\frac{d\vec{V}}{dt} = -\vec{\nabla}P + \frac{1}{c}\vec{J}\times\vec{B} + \rho\vec{g}, \qquad \vec{J} = \frac{c}{4\pi}\vec{\nabla}\times\vec{B},$$

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b, \qquad \cos\epsilon \approx 1 - \frac{\epsilon^2}{2} + \mathcal{O}(\epsilon^4), \qquad \sin\epsilon \approx \epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^3).$$