Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής
Εξετάσεις στη Φυσική Πλάσματος, 16 Ιουλίου 2012
Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες
Καλή επιτυχία

Ονοματεπώνυμο: ____, ΑΜ: _ _ _ _ _ _ _ _

Εκκρεμεί παράδοση εργασίας: ΝΑΙ ☐ ΟΧΙ ☐ (Αν ΝΑΙ ο βαθμός θα περαστεί τον Οκτώβριο.)

Έχω παραδώσει ομάδες ασκήσεων 1η ☐ 2η ☐ 3η ☐ 4η ☐ στον κ. Τσίγκανο ☐

Θέμα 1ο:

Σωμάτια έχουν κατανομή

$$f(\vec{r},\vec{v},t) = A\ \exp\left[-\frac{m(v_x^2+v_y^2)}{2k_{\rm B}T}\right]\ \delta(v_z)\,.$$

(α) Βρείτε την αριθμητική πυκνότητα n.

(β) Βρείτε τη μέση ταχύτητα, τον τανυστή της πίεσης και τη μέση κινητική ενέργεια σαν συναρτήσεις των n και T. Σχολιάστε τα αποτελέσματα σε σχέση με το τι περιγράφει η δεδομένη κατανομή.

(γ) Έστω αφήνουμε ένα πλήθος σωματίων με αυτή την κατανομή ταχυτήτων στο σημείο $(x=0, y=0, z=0)$ μαγνητικού πεδίου

$$\vec{B}=\begin{cases} B_0\ \hat{x}\,, & x\le 0\\ B_0\ \hat{x}+B_0\sqrt{\dfrac{1}{\sin^4\lambda}-1}\ \sin\dfrac{\pi x}{L}\ \hat{y}\,, & 0\le x\le L\\ B_0\ \hat{x}\,, & x\ge L\end{cases}$$

Ποιο ποσοστό των σωματίων θα φτάσει στην περιοχή $x>L$;

Θέμα 2ο:

(α) Δείξτε ότι η μαγνητική δύναμη ανά μονάδα όγκου μπορεί να θεωρηθεί άθροισμα δύο όρων που σχετίζονται με τη μαγνητική τάση και τη μαγνητική πίεση,

$$\frac{1}{c}\vec{J}\times\vec{B}=\frac{1}{4\pi}\left(\vec{B}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{B}-\vec{\nabla}\left(\frac{B^2}{8\pi}\right).$$

(β) Έστω μια κυλινδρική στήλη μαγνητικά παγιδευμένου πλάσματος ακτίνας ϖ_0. Το πλάσμα της στήλης είναι στατικό, έχει πίεση $P=P(\varpi)$, και βρίσκεται σε ισορροπία με μαγνητικό πεδίο $\vec{B}=B_z\hat{z}+B_\phi(\varpi)\hat{\phi}$ (η συνιστώσα B_z παράλληλα στον άξονα της στήλης είναι ομογενής). Γράψτε την εξίσωση που περιγράφει την ισορροπία (το πλάσμα έχει μηδενική μέση ταχύτητα).

(γ) Αν η πίεση μεταβάλλεται σαν $P=P_0\left(1-\dfrac{\varpi}{\varpi_0}\right)$ δείξτε ότι το μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό του σωλήνα πρέπει να ικανοποιεί την $\dfrac{B_\phi^2}{8\pi}=\dfrac{P_0\varpi}{3\varpi_0}$.

Θέμα 3ο:

Θεωρείστε ότι ο ηλιακός άνεμος αποτελείται από ισόθερμο πλάσμα θερμοκρασίας T_o, όπου η ταχύτητα του ήχου είναι V_s. Χρησιμοποιώντας τις αδιάστατες μεταβλητές $M=V_r/V_s$, $R=r/r_o$ και συναρτήσει της παραμέτρου $\lambda=\dfrac{GMm}{2r_ok_{\rm B}T_o}$:

(α) Γράψτε τις εξισώσεις που περιγράφουν την διατήρηση μάζας και ορμής. Συνδυάζοντας τις εξισώσεις αυτές εξάγετε την εξίσωση που περιγράφει τη διατήρηση της συνολικής ενέργειας.

(β) Υπολογίστε την ταχύτητα $V_r(R)$ του ανέμου σε μεγάλες αποστάσεις από τον Ήλιο, $R\gg 1$.

(γ) Υπάρχει κάποιο όριο στη θερμοκρασία T_o για να υπάρχει επιτάχυνση του ανέμου από το r_o;

(δ) Επαναλάβατε το (α) όταν ισχύει η πολυτροπική εξίσωση $P=K\rho^\gamma$ μεταξύ πίεσης – πυκνότητας και υπολογίστε την τερματική ταχύτητα V_∞ του ανέμου στην περίπτωση αυτή.

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-a\xi^2)\ d\xi=\frac{\pi^{1/2}}{a^{1/2}}\,,\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\xi^2\exp(-a\xi^2)\ d\xi=\frac{\pi^{1/2}}{2a^{3/2}}$$

$$\vec{\nabla}\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=\vec{a}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{b}\right)+\vec{b}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{a}\right)+\left(\vec{a}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{b}+\left(\vec{b}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{a}$$

$$\vec{\nabla}f=\frac{\partial f}{\partial\varpi}\hat{\varpi}+\frac{1}{\varpi}\frac{\partial f}{\partial\phi}\hat{\phi}+\frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}\,,\quad \vec{\nabla}\times\vec{a}=\left(\frac{1}{\varpi}\frac{\partial a_z}{\partial\phi}-\frac{\partial a_\phi}{\partial z}\right)\hat{\varpi}+\left(\frac{\partial a_\varpi}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial\varpi}\right)\hat{\phi}+\frac{1}{\varpi}\left(\frac{\partial(\varpi a_\phi)}{\partial\varpi}-\frac{\partial a_\varpi}{\partial\phi}\right)\hat{z}$$

$$\left(\vec{a}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{b}=\left(a_\varpi\frac{\partial b_z}{\partial\varpi}+a_z\frac{\partial b_z}{\partial z}+\frac{a_\phi}{\varpi}\frac{\partial b_z}{\partial\phi}\right)\hat{z}+\left(a_\varpi\frac{\partial b_\varpi}{\partial\varpi}+a_z\frac{\partial b_\varpi}{\partial z}+\frac{a_\phi}{\varpi}\frac{\partial b_\varpi}{\partial\phi}-\frac{a_\phi b_\phi}{\varpi}\right)\hat{\varpi}+\left(a_\varpi\frac{\partial b_\phi}{\partial\varpi}+a_z\frac{\partial b_\phi}{\partial z}+\frac{a_\phi}{\varpi}\frac{\partial b_\phi}{\partial\phi}+\frac{a_\phi b_\varpi}{\varpi}\right)\hat{\phi}$$

$$y'+\frac{2}{x}y=a\Leftrightarrow y=\frac{a}{3}x+\frac{C}{x^2}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0\,,\quad \vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\,,\quad \vec{\nabla}\times\vec{B}=\frac{4\pi}{c}\vec{J}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\,,\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E}=4\pi\delta$$