

---

# ΦΥΣΙΚΗ ΠΛΑΣΜΑΤΟΣ

---



# Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4. Βασικές έννοιες της Μαγνητοϋδροδυναμικής . . . . .	7
4.1 Εισαγωγή . . . . .	7
4.2 Αλληλεπίδραση Μαγνητορευστών . . . . .	8
4.3 Εξισώσεις κίνησης σε πλάσμα μεγάλης ηλεκτρικής αγωγιμότητας (Μαγνητοϋδροδυναμική) . . . . .	9
4.4 Περιγραφή του πλάσματος ως κοινού ρευστού . . . . .	10
4.5 Οι Τέσσερις υποθέσεις της Μαγνητοϋδροδυναμικής . . . . .	11
4.6 ΜΥΔ Προσεγγίσεις . . . . .	13
4.7 Οι συνιστώσες της μαγνητικής δύναμης <i>Lorentz</i> . . . . .	14
4.8 Ταχύτητα Alfvén . . . . .	14
4.9 Μαγνητική πίεση . . . . .	16
4.10 Μαγνητική Ανωση . . . . .	17
4.11 Αστάθεια Parker . . . . .	18
4.12 Πάγωμα των μαγνητικών γραμμών στο πλάσμα . . . . .	19
4.13 Επιφάνειες Μαγνητικής Ροής . . . . .	20
4.14 Ο νόμος ισοπεριστροφής των μαγνητικών επιφανειών . . . . .	21
4.15 Στήλη μαγνητικά παγιδευμένου πλάσματος . . . . .	22
4.16 Πρόβλημα 1 . . . . .	24

4.17	Ευστάθεια μιάς στήλης μαγνητικά παγιδευμένου πλάσματος . . . . .	24
4.18	Μαγνητικό πεδίο μηδενικής μαγνητικής δύναμης	26
4.19	Πρόβλημα 2 . . . . .	27
4.20	Η Εξίσωση του Δυναμό . . . . .	27
4.21	Ένα απλό παράδειγμα Δυναμό . . . . .	29
4.22	Διάχυση Μαγνητικών Γραμμών . . . . .	29
4.23	Πρόβλημα 3 . . . . .	29
4.24	Πρόβλημα 4 . . . . .	30
4.25	Πρόβλημα 5 . . . . .	30
4.26	Θέρμανση του Ηλιακού Στέμματος σε λεπτά φύλλα ρεύματος . . . . .	31
4.27	Μαγνητική Επανασύνδεση . . . . .	32
4.28	Μερικά ηλιακά μαγνητικά φαινόμενα . . . . .	34
	4.28.1 Η περιγραφή και κατανόηση των Ηλι- ακών Προεξοχών. . . . .	35
4.29	Πρόβλημα 6 . . . . .	36

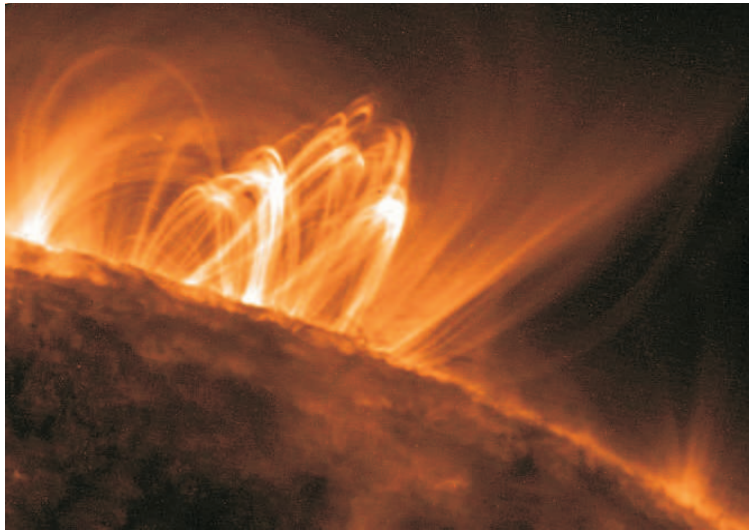
# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

---

## Βασικές έννοιες της Μαγνητουδροδυναμικής

---

### 4.1 Εισαγωγή



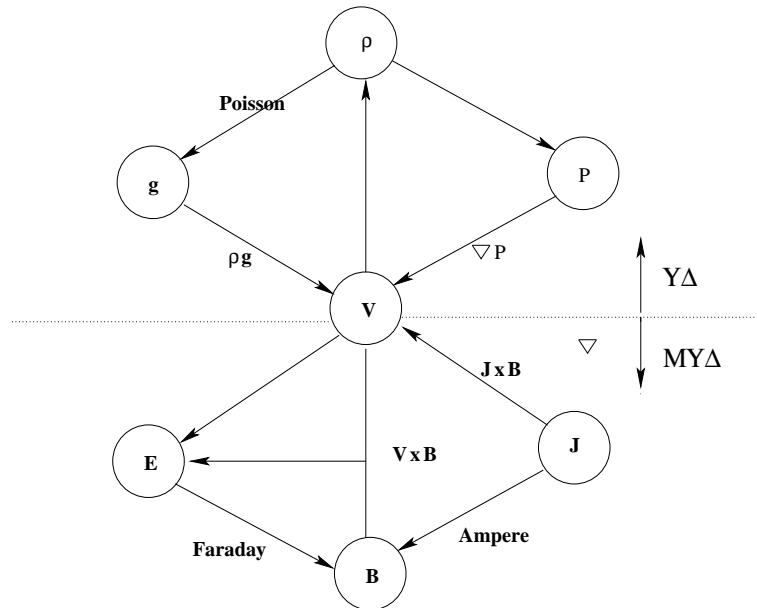
Σχ. 4.1 Ηλιακοί στεμματικοί βρόχοι.

Στο προηγούμενο Κεφάλαιο 3, αποδείξαμε τις εξισώσεις της Μαγνητουδροδυναμικής που περιγράφουν τη μακροσκοπική φυσική της δυναμικής του πλάσματος θεωρώντας το σαν ένα μαγνητισμένο ρευστό. Σε αυτό το Κεφάλαιο θα συζητήσουμε βασικές έννοιες της Μαγνητουδροδυναμικής, όπως η μαγνητική πίεση, τα κύματα

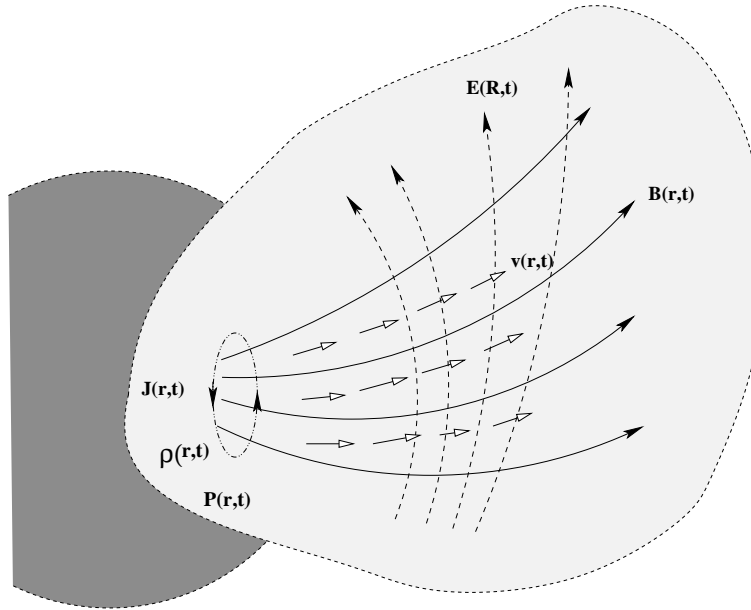
Alfvén, η μαγνητική άνωση, η αστάθεια Parker του γαλαξιακού μαγνητικού πεδίου, το πάγωμα των μαγνητικών γραμμών στο πλάσμα, οι μαγνητικές επιφάνειες, η ισοπεριστροφή μαγνητικών επιφανειών, το μαγνητικό πεδίο ως φορέας στροφορμής και το μαγνητικό φρενάρισμα, το μαγνητικά παγιδευμένο πλάσμα και οι αστάθειές του, το δυναμό και οι μηχανισμοί που παράγουν μαγνητικά πεδία, η θέρμανση πλάσματος υψηλής θερμοκρασίας, η μαγνητική επανασύνδεση, αλλά και απλά μοντέλα μαγνητουδροδυναμικών δομών, όπως αυτά των προεξοχών στην ηλιακή ατμόσφαιρα. Η κατανόηση αυτών των βασικών εννοιών είναι κρίσιμη για μια κατανόηση της φυσικής των αστροφυσικών πλασμάτων.

### 4.2 Αλληλεπίδραση Μαγνητορευστών

Στο ακόλουθο διάγραμμα φαίνεται σχηματικά πως αλληλεπιδρούν τα διάφορα πεδία (ηλεκτρικό, μαγνητικό, βαρυτητικό, κλπ), είτε σε ουδέτερο αέριο (υδροδυναμική), είτε σε πλάσμα (μαγνητουδροδυναμική).



Σχ. 4.2 Σχηματικό διάγραμμα της αλληλεπίδρασης μαγνητορευστών



Σχ. 4.3 Σχηματική αλληλεπίδραση μαγνητορευστών

### 4.3 Εξισώσεις κίνησης σε πλάσμα μεγάλης ηλεκτρικής αγωγιμότητας (Μαγνητοϋδροδυναμική)

Όταν έχουμε πλάσμα υψηλής θερμοκρασίας, οπότε και η ηλεκτρική αγωγιμότητα είναι πολύ μεγάλη, το σύστημα των εξισώσεων που περιγράφει τις αλληλεπιδράσεις είναι :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\delta \simeq 0 \quad (\text{Νόμος Gauss})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{όχι μαγνητικά μονόπολα})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{Νόμος Faraday})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \simeq \frac{4\pi}{c} \vec{J} \quad (\text{Νόμος Ampere})$$

$$\vec{J} = \underbrace{\sigma_E}_{\infty} \underbrace{\left( \vec{E} + \frac{\vec{V}}{c} \times \vec{B} \right)}_0 \quad (\text{Νόμος του Ohm})$$

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -\vec{\nabla}P + \frac{\vec{J} \times \vec{B}}{c} - \rho \vec{g} \quad (\text{Νόμος του Newton})$$

με τον συμβολισμό :

- $\vec{E}(\vec{r}, t)$  ηλεκτρικό πεδίο στο πλάσμα
- $\vec{B}(\vec{r}, t)$  μαγνητικό πεδίο στο πλάσμα
- $\rho(\vec{r}, t)$  πυκνότητα μάζας του πλάσματος
- $\delta(\vec{r}, t)$  πυκνότητα φορτίων του πλάσματος
- $\vec{J}(\vec{r}, t)$  πυκνότητα ηλεκτρικού ρεύματος στο πλάσμα
- $\vec{V}(\vec{r}, t)$  ταχύτητα πλάσματος
- $\sigma_E$  ηλεκτρική αγωγιμότητα
- $\vec{P}(\vec{r}, t)$  πίεση
- $\vec{g}$  επιτάχυνση βαρύτητας

#### 4.4 Περιγραφή του πλάσματος ως κοινού ρευστού

Σε αστροφυσικές συνθήκες συνήθως έχουμε ψηλές θερμοκρασίες και χαμηλές πυκνότητες (σχετικά με αυτές της ατμόσφαιρας της Γης), ενώ έχουμε επίσης την παρουσία ισχυρών μαγνητικών πεδίων. Για παράδειγμα, στο ηλιακό στέμμα,  $T \sim 10^6 K$ ,  $n \sim 10^8 cm^{-3}$ ,  $B \sim 1 Gauss$ . Τότε,

- Το μήκος Debye  $\lambda_D$  είναι:

$$\lambda_D = \left( \frac{kT}{4\pi n e^2} \right)^{1/2} = 7 \left( \frac{T}{n} \right)^{1/2} \simeq 7 \left( \frac{10^6}{10^8} \right)^{1/2} \simeq 0.7 cm.$$

- Η ακτίνα μαγνητοστροφής  $r_L$  για ταχύτητες  $v \sim 200 km/sec$  είναι:

$$r_L = \frac{m v c}{q B} = \frac{(1.6 \times 10^{-24}) \times (1.5 \times 10^7) \times (3 \times 10^{10})}{4.8 \times 10^{-10} \times 1} \simeq 20 m.$$

- Η μέση ελεύθερη διαδρομή  $\lambda$  των ηλεκτρονίων λόγω σχεδιάσεων Coulomb, είναι:

$$\lambda = \frac{m_e^2 v_0^4}{2\pi e^4 n \ln \Lambda} = \frac{9(kT)^2}{2\pi e^4 n \ln \Lambda} \simeq 2.57 \times 10^4 \frac{T^2}{n} cm.$$



Έτσι, αν στο Ηλιακό Στέμμα έχουμε  $T = 10^6$ ,  $n \sim 10^8 \text{ cm}^{-3} \Rightarrow \lambda \sim 2570 \text{ km}$ .  
και η συχνότητα πλάσματος είναι,

$$\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi n e^2}{m_e}}, \quad f_p = 9\sqrt{n} \simeq 10^3 \text{ Hz},$$

$$\omega_L = \frac{qB}{mc} \sim 10^4 \text{ Hz}$$

Σε αυτές τις περιπτώσεις,  $L \gg \lambda \gg r_L \gg \lambda_D$ , οπότε μπορούμε να πάρουμε μέσες τιμές και να αντιμετωπίσουμε το πλάσμα σαν κοινό ρευστό.

## 4.5 Οι Τέσσερις υποθέσεις της Μαγνητοϋδροδυναμικής

- Σε πλάσμα που είναι μακροσκοπικά ουδέτερο σε πρώτη προσέγγιση, έχουμε :

$$\delta = n^+ e^+ + n^- e^- \simeq 0. \quad (1)$$

- Μπορεί όμως να έχουμε ρεύματα  $\vec{J}$  αρκεί η κίνηση των ηλεκτρονίων να γίνεται με μέση ταχύτητα  $\vec{V}^-$  διάφορη της μέση ταχύτητας  $\vec{V}^+$  των ιόντων :

$$\vec{J} = n^+ e^+ \vec{V}^+ + n^- e^- \vec{V}^- = -n^- e^- \vec{V}^+ + n^- e^- \vec{V}^-,$$

και επομένως,

$$\vec{J} = n^- e^- [\vec{V}^- - \vec{V}^+] = n^- e^- \vec{V}'_{\sigma_x},$$

όπου  $V'_{\sigma_x}$  η σχετική ταχύτητα των ηλεκτρονίων ως προς τα ιόντα.

- Η σχετική ταχύτητα  $\vec{V}'_{\sigma_x}$  όμως των ηλεκτρονίων ως προς τα ιόντα είναι συνήθως πολύ μικρή και επομένως, σε πρώτη προσέγγιση, η κίνηση του πλάσματος μπορεί να θεωρηθεί σαν την κίνηση ενός ουδετέρου ρευστού,  $n^+ = n^- = n$  το οποίο λόγω της ηλεκτρικής ουδετερότητας  $e^+ n^+ + n^- e^- = 0$  και επειδή  $m^- \ll m^+$  έχει τις ακόλουθες μακροσκοπικές παραμέτρους

$$\text{Ταχύτητα: } \vec{V} = \frac{n^+ m^+ V^+ + n^- m^- V^-}{n^+ m^+ + n^- m^-} = \frac{m^+ V^+ + m^- V^-}{m^+ + m^-} \simeq V^+, \quad (2)$$

$$\text{Πυκνότητα: } \rho = n^+ m^+ + n^- m^- = n^+ (m^+ + m^-) \simeq n^+ m^+ = nm,$$

$$\text{Πίεση: } P = p^+ + p^- = 2nkT,$$

$$\text{Θερμοκρασία: } T = \frac{T^+ + T^-}{2}.$$

Αυτό απλοποιεί το πρόβλημα, αφού δεν πρέπει να γράψουμε χωριστές εξισώσεις για τα ιόντα και τα ηλεκτρόνια. Δηλαδή υποθέτουμε ότι λόγω κρούσεων οι τρεις συνιστώσες (ιόντα, ηλεκτρόνια, ουδέτερα) συζεύγνυνται και κινούνται με τις μέσες ποσότητες

$(\vec{V}, \rho, P, T)$ .

Στο σύστημα αναφοράς των ιόντων, η εξίσωση κινήσεως των ηλεκτρονίων γράφεται σε πρώτη προσέγγιση,

$$m_e \frac{d\vec{V}'_{\sigma x}}{dt} \approx -e \left[ \vec{E}' + \frac{\vec{V}'_{\sigma x} \times \vec{B}'}{c} \right] - m_e \nu_c \vec{V}'_{\sigma x},$$

όπου  $\nu_c$  η συχνότητα των σχεδιάσεων των ηλεκτρονίων με τα ιόντα και στο σύστημα των κινουμένων ιόντων τα πεδία δηλώνονται με τονούμενα.

Υποθέτοντας ότι η ταχύτητα των ηλεκτρονίων είναι σταθερή,  $V'_{\sigma x} \simeq$  σταθερό, έχουμε ισορροπία μεταξύ της δύναμης Lorentz και της δύναμης τριβής στο σύστημα των κινουμένων ιόντων. Για μη σχετικιστικές ταχύτητες  $V/c \ll 1$ ,

$$\vec{V}'_{\sigma x} \simeq -\frac{e\vec{E}'}{m_e \nu_c},$$

και επομένως, το ρεύμα αγωγιμότητας στο σύστημα των ιόντων είναι

$$\vec{J}' = -en_e \vec{V}'_{\sigma x} = \sigma_E \vec{E}',$$

δηλαδή η ηλεκτρική αγωγιμότητα είναι

$$\sigma_E \simeq \frac{n_e e^2}{m_e \nu_c}. \quad (3)$$

Τέλος, μετασχηματίζοντας τις ποσότητες στο αδρανειακό εργαστηριακό σύστημα, για μη σχετικιστικές ταχύτητες έχουμε,

$$\begin{aligned} \vec{J}' &= \vec{J}, \\ \vec{B}' &\simeq \vec{B}, \\ \vec{E}' &\simeq \left( \vec{E} + \frac{\vec{V}}{c} \times \vec{B} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Οι υποθέσεις (1)–(4) αποτελούν και τις τέσσερες βασικές υποθέσεις της Μαγνητουδροδυναμικής περιγραφής του πλάσματος. Συνήθως:

$$L \gg \lambda_D \quad f \ll f_p,$$

δηλαδή, οι χαρακτηριστικές διαστάσεις του συστήματος είναι πολύ μεγαλύτερες του μήκους Debye  $\lambda_D$

και

οι χαρακτηριστικές συχνότητες πολύ μικρότερες της συχνότητας του πλάσματος  $\omega_p$  (χαρακτηριστικοί χρόνοι μεταβολής πολύ μεγαλύτεροι του  $1/\omega_p$ ). Σε αυτές τις περιπτώσεις μπορούμε να περιγράψουμε το πλάσμα σαν κοινό ρευστό.

## 4.6 ΜΥΔ Προσεγγίσεις

Σε αστροφυσικά πλάσματα ισχύουν συνήθως οι ακόλουθες προσεγγίσεις,

- $V/c \ll 1$ , δηλ., έχουμε μη σχετικιστική κίνηση.

- Το ρεύμα μετατόπισης είναι αμελητέο:  $c\vec{\nabla} \times \vec{B} = 4\pi\vec{J} + \partial\vec{E}/\partial t$

Έστω  $(\ell - \tau)$  οι χαρακτηριστικές κλίμακες χωρικής - χρονικής μεταβολής :

$$c|\vec{\nabla} \times \vec{B}| \simeq \frac{cB}{\ell} = \Theta(1), \quad \tau \simeq \frac{\ell}{V},$$

$$E \sim \frac{V}{c}B \Rightarrow \frac{\partial E}{\partial t} \simeq \frac{VB}{c\tau} = \frac{V^2 B}{c \ell} \simeq \frac{cB}{\ell} \left(\frac{V}{c}\right)^2 = \Theta\left(\frac{V^2}{c^2}\right)$$

- Το ρεύμα πόλωσης είναι επίσης αμελητέο:  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\delta$

$$J_\delta = V\delta = \frac{VE}{\ell} = \frac{cB}{\ell} \left(\frac{V^2}{c^2}\right) = \Theta\left(\frac{V^2}{c^2}\right)$$

- Έχουμε συνήθως πολύ μεγάλη ηλεκτρική αγωγιμότητα:  $\sigma_E \simeq 6 \times 10^6 T^{3/2}/sec$

$$\vec{J} = \sigma_E \left[ \vec{E} + \frac{\vec{V}}{c} \times \vec{B} \right], \quad \sigma_E \rightarrow \infty \Rightarrow \vec{E} + \frac{\vec{V}}{c} \times \vec{B} \simeq 0$$

$$\rightarrow \vec{E} = -\frac{\vec{V}}{c} \times \vec{B}$$

$$\rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \vec{\nabla} \times (\vec{V} \times \vec{B}) = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

- Έχουμε συνήθως επίσης πολύ μεγάλη θερμική αγωγιμότητα:  $\kappa \simeq 6 \times 10^{-6} T^{5/2}$   
(το ηλιακό στέμμα εκτείνεται μέχρι τον μεσοπλανητικό χώρο)

- Έχουμε συνήθως αμελητέο ιζώδες (κυρίως από ιόντα) :  
 $\mu \simeq 10^{-16} T^{5/2} g/cm sec.$

Γιά παράδειγμα, σε πλάσμα θερμοκρασίας  $T \sim 10^6 K$  και πυκνότητας  $N \sim 10^8 cm^{-3}$  έχουμε

ηλεκτρική αγωγιμότητα:  $\sigma_E \simeq 10^{16}/sec$  (γιά το χαλκό,  $\sigma \simeq 10^{17}/sec$ )

θερμική αγωγιμότητα:  $\chi = \frac{\kappa}{c_p} \simeq \frac{6 \times 10^8}{10^9} \sim 0.6 (g/cm sec)$

συντελεστή ιζώδους :  $\mu \simeq 0.1 (g/cm sec)$ .

## 4.7 Οι συνιστώσες της μαγνητικής δύναμης Lorentz

Η μαγνητική δύναμη Lorentz

$$\vec{F}_L = \frac{(\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B}}{4\pi} = -\vec{\nabla} \left( \frac{B^2}{8\pi} \right) + \frac{(\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{B}}{4\pi},$$

έχει δύο όρους. Ο πρώτος αντιστοιχεί στη μαγνητική πίεση,

$$P_M = \frac{B^2}{8\pi}.$$

Ο λόγος της πίεσης του αερίου προς την μαγνητική πίεση ορίζει το  $\beta$  του πλάσματος,

$$\beta = \frac{P}{B^2/8\pi}.$$

Το πλάσμα θεωρείται «κρύο» αν  $\beta \ll 1$ , ενώ για  $\beta \gg 1$ , το πλάσμα θεωρείται «θερμό». Ο δεύτερος όρος μπορεί να διασπαστεί σε δύο όρους, αν ορίσουμε το μοναδιαίο διάνυσμα  $\hat{T}$  που εφάπτεται στη μαγνητική γραμμή,

$$\begin{aligned} \frac{(\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{B}}{4\pi} &= \frac{B}{4\pi} \frac{d(B\hat{T})}{ds} = \frac{B\hat{T}}{4\pi} \frac{dB}{ds} + \frac{B^2}{4\pi} \frac{d\hat{T}}{ds} = \\ &= \hat{T} \frac{d}{ds} \frac{B^2}{8\pi} + \frac{B^2}{4\pi} \kappa \hat{N} = \hat{T} \frac{d}{ds} \frac{B^2}{8\pi} + \frac{B^2}{4\pi R} \hat{N}, \quad \frac{d\hat{T}}{ds} = \kappa \hat{N} = \frac{\hat{N}}{R}, \end{aligned}$$

όπου  $R$  είναι η ακτίνα καμπυλότητας της μαγνητικής γραμμής. Ο πρώτος όρος εξουδετερώνει την δύναμη της βαθμίδας της μαγνητικής πίεσης κατά μήκος του μαγνητικού πεδίου, έτσι ώστε να απομένει μόνον η βαθμίδα της της μαγνητικής πίεσης κάθετα σε αυτό. Ο δεύτερος όρος εμφανίζεται μόνο για καμπυλωμένες μαγνητικές γραμμές και διευθύνεται προς το τοπικό κέντρο καμπυλότητας. Επειδή είναι παρόμοιος με την τάση μιας καμπυλωμένης χορδής, ονομάζεται **μαγνητική τάση**.

## 4.8 Ταχύτητα Alfvén

Τα κύματα Alfvén που διαδίδονται σε ένα μαγνητισμένο πλάσμα με την ταχύτητα Alfvén, αποτελούν το βασικό τρόπο μετάδοσης διαταραχών σε ένα μαγνητισμένο πλάσμα και οφείλονται στη μαγνητική τάση. Ας θεωρήσουμε μια ομογενή κατάσταση ισορροπίας, όπου ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο  $\mathbf{B}_0$  ευρίσκεται σε πλάσμα σταθερής πυκνότητας  $\rho_0$  και πίεσης. Για απλούστευση ας υποθέσουμε ότι το πλάσμα μας είναι ασυμπίεστο,  $d\rho/dt = -\rho\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$ . Ας θεωρήσουμε μιά διαταραχή σε αυτή την αρχική κατάσταση η οποία διαδίδεται με μια μικρή ταχύτητα  $\mathbf{V} = \mathbf{v}_1$  και προκαλεί επίσης μια διαταραχή στο μαγνητικό πεδίο έτσι ώστε το συνολικό πεδίο να είναι,  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1$ .

Την δυναμική της διαταραχής διέπουν οι εξισώσεις της μαγνητουδροδυναμικής,

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}}{4\pi},$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) .$$

Γραμμικοποιώντας αυτές τις εξισώσεις και κρατώντας όρους πρώτης τάξης παίρνουμε :

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} = \frac{(\nabla \times \mathbf{B}_1) \times \mathbf{B}_0}{4\pi} , \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0) , \quad (4.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_1 = 0 .$$

Αναζητούμε λύσεις αυτών των γραμμικοποιημένων εξισώσεων της μορφής  $Ae^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} = Ae^{i(kx+ly+mz-\omega t)}$ , με  $A$  να δηλώνει το σταθερό πλάτος (κάθε μεταβλητή έχει το δικό της σταθερό πλάτος). Έτσι αντικαθιστώντας έχουμε,

$$-4\pi\rho_0\omega\mathbf{v}_1 = (\mathbf{k} \times \mathbf{B}_1) \times \mathbf{B}_0 = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0) \mathbf{B}_1 - (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{B}_1) \mathbf{k}, \quad (4.3)$$

και

$$-\omega\mathbf{B}_1 = \mathbf{k} \times (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0) = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0) \mathbf{v}_1 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1) \mathbf{B}_0 , \quad (4.4)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ταυτότητα  $(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{A}(\vec{B} \cdot \vec{C})$ . Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις,

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_1 = 0 \Rightarrow \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1 = 0 ,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_1 = 0 \Rightarrow \mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_1 = 0 .$$

βλέπουμε ότι οι διαταραχές της ταχύτητας και του μαγνητικού πεδίου,  $\mathbf{v}_1$  και  $\mathbf{B}_1$  είναι κάθετες στο κυματόνισμα της διαταραχής. Στην συνέχεια άς πάρουμε το βαθμωτό γινόμενο της (4.3) με το  $\mathbf{k}$ :

$$\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{B}_1 = 0$$

οπότε:

$$-\rho_0\omega\mathbf{v}_1 = \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0) \mathbf{B}_1}{4\pi}$$

$$-\omega\mathbf{B}_1 = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0) \mathbf{v}_1 .$$

Αυτές οι δύο ομογενείς εξισώσεις έχουν λύση μόνο αν τα  $\omega$  και  $\mathbf{k}$  συνδέονται με την σχέση

$$\omega^2 = \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0)^2}{4\pi\rho_0} , \quad (4.5)$$

ή

$$\omega^2 = |\mathbf{k}|^2 V_A^2 \cos^2 \theta , \quad (4.6)$$

όπου  $\theta$  είναι η γωνία μεταξύ των  $\mathbf{B}_0$  και της κατεύθυνσης του κύματος  $\vec{k}$  και

$$V_A^2 = \frac{\mathbf{B}_0^2}{4\pi\rho_0} , \quad (4.7)$$

όπου  $V_A$  είναι η ταχύτητα Alfvén. Δηλ., αυτά τα κύματα διαδίδονται με την ταχύτητα Alfvén κατά μήκος των δυναμικών γραμμών του μαγνητικού πεδίου με ταχύτητα η

οποία εξαρτάται από την ένταση αυτού του μαγνητικού πεδίου και την πυκνότητα του πλάσματος. Όταν τα κύματα διαδίδονται υπό γωνία  $\theta$  ως προς το πεδίο, η ταχύτητά τους  $\omega/|\mathbf{k}|$  είναι μικρότερη. Στα κύματα Alfvén τα ιόντα κινούνται υπό την επίδραση της δύναμης επαναφοράς της μαγνητικής τάσης των καμπυλωμένων μαγνητικών γραμμών.

- Τα κύματα Alfvén προτάθηκαν για πρώτη φορά από τον Hannes Alfvén το 1942. Το 1970 ο Alfvén έλαβε το βραβείο Nobel «για τη θεμελιώδη εργασία του και ανακαλύψεις στη Μαγνητουδροδυναμική με πολλές εφαρμογές σε διάφορες περιοχές της Φυσικής Πλάσματος». Ο ίδιος το 1950 δημοσιεύει το βιβλίο *Cosmical Electrodynamics* όπου περιγράφει το ρόλο των κυμάτων σε εργαστηριακά και αστροφυσικά πλάσματα.
- Το 1949 ο S. Lundquist παρήγαγε στο εργαστήριο κύματα Alfvén σε μαγνητισμένο πλάσμα υδραργύρου και μέτρησε ότι η ταχύτητα διάδοσής τους ισούται με την ταχύτητα που είχε προτείνει ο Alfvén. Το 1952 τα κύματα ανιχνεύονται σε πειράματα ιονισμένου Ηλίου από τους Winston Bostick και Morton Levine, το 1954 ο Bo Lehnert παράγει κύματα Alfvén σε υγρό Νάτριο και το 1959 ο D. F. Jephcott σε σωλήνες εκκενώσεων.
- Το 1949 ο Fermi χρησιμοποιεί τα κύματα Alfvén στην θεωρία του διάδοσης των κοσμικών ακτίνων.
- Το 1958 ο Eugene Parker μελετά το ρόλο των κυμάτων στη μεσοαστρική ύλη και τον Ηλιακό άνεμο, ενώ το 1973 στο ενδογαλαξιακό μέσο.
- Το 1958 οι Berthold, Harris, Hope ανιχνεύουν τα κύματα στην Ιονόσφαιρα κατά το πείραμα της πυρηνικής έκρηξης Argus, το 1960 οι Coleman, et al. ανακοινώνουν την ανίχνευση κυμάτων από το μαγνητόμετρα των διαστημοσυσκευών Pioneer και Explorer και το ίδιο έτος ο Sugiura εντοπίζει αυτά κύματα στο μαγνητικό πεδίο της Γης. Το 1974 ο Hollweg μελετά αυτά κύματα στο ενδοπλανητικό χώρο και οι Ip και Mendis στην κόμη του κομήτη Kohoutek.
- Το 2007 ο De Pontieu et al. επισημαίνουν ότι τα κύματα Alfvén μπορούν να θερμαίνουν το Ηλιακό Στέμμα και να επιταχύνουν τον Ηλιακό Άνεμο. Το ίδιο έτος, στο τεύχος Δεκεμβρίου του περιοδικού Science δημοσιεύεται συλλογή 10 άρθρων με τις νεώτερες εξελίξεις πάνω στα κύματα Alfvén.

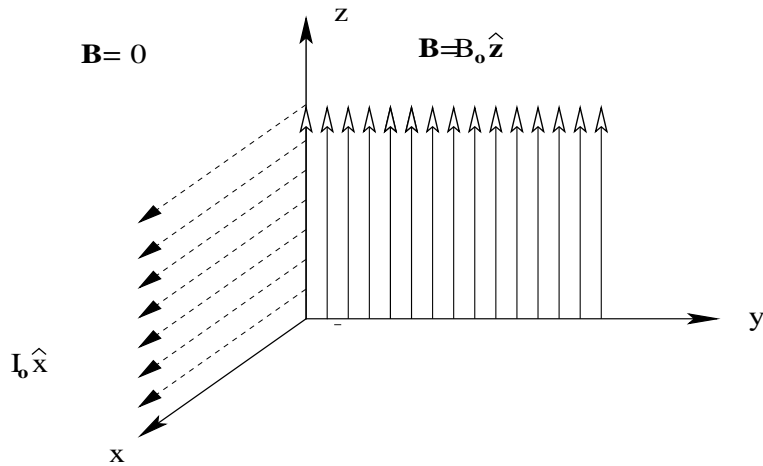
Για ήλιακά κύματα Alfvén δείτε το video: [http :](http://www.space.com/common/media/video/player.php?videoRef)

[//www.space.com/common/media/video/player.php?videoRef](http://www.space.com/common/media/video/player.php?videoRef)  
290807AlfvenWaves

=

## 4.9 Μαγνητική πίεση

Στα επόμενα δίνουμε μία σύντομη φυσική εξήγηση του όρου *μαγνητική πίεση*. Στο σχήμα έχουμε ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο στην κατακόρυφη διεύθυνση  $\hat{z}$  για  $y > 0$ .



**Σχ. 4.4** Υπολογισμός της μαγνητικής πίεσης όταν στο χώρο  $y > 0$  υπάρχει ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο στην κατακόρυφη διεύθυνση  $\hat{z}$ . Αυτό το πεδίο συνδέεται με ένα ρεύμα πυκνότητας  $\vec{J} = J_x \hat{x}$

Το πεδίο αυτό συνδέεται με ένα ρεύμα πυκνότητας  $\vec{J} = J_x \hat{x}$  από το νόμο του Ampere :

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} \Rightarrow \frac{4\pi}{c} J_x = \frac{\partial B_z}{\partial y} \Rightarrow \frac{4\pi}{c} \frac{I_x}{\Delta y \Delta z} = \frac{\Delta B_z}{\Delta y} \Rightarrow \frac{4\pi}{c} \frac{I_x}{\Delta z} = \Delta B_z = B_0.$$

Από το άλλο μέρος, ο νόμος του Laplace μας δίνει τη δύναμη που ασκείται στο πλάσμα:

$$\vec{F} = \frac{\ell \vec{I} \times \vec{B}}{c} \Rightarrow F_y = -\frac{\Delta x I_x B_z}{c} \Rightarrow -\frac{F_y}{\Delta x \Delta z} = \frac{I_x B_z}{c \Delta z} = \frac{B_0^2}{8\pi},$$

όπου αντικαταστήσαμε τη μέση τιμή του  $B_z$  στο επίπεδο  $y = 0$ ,  $B_z = B_0/2$ . Συνεπώς, η δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας (πίεση) είναι,

$$P_M = \frac{B_0^2}{8\pi},$$

δηλ., το μαγνητικό πεδίο ασκεί πίεση  $P_M$  όπως και ένα κοινό αέριο.

Είναι προφανές τότε, ότι στο εσωτερικό ενός Μαγνητικού Σωλήνα Ροής όπως στο επόμενο σχήμα, η πίεση του αερίου είναι μειωμένη.

## 4.10 Μαγνητική Ανωση

Εστω ένας μαγνητικός σωλήνας στο εσωτερικό του Ηλιου. Υποθέτοντας ότι η θερμοκρασία εντός και εκτός του σωλήνα είναι η ίδια, εξισώνοντας την ολική πίεση στα τοιχώματα του σωλήνα παίρνουμε,

$$P_{\text{εσωτ.}} + \frac{B_0^2}{8\pi} = P_{\text{εξωτ.}},$$

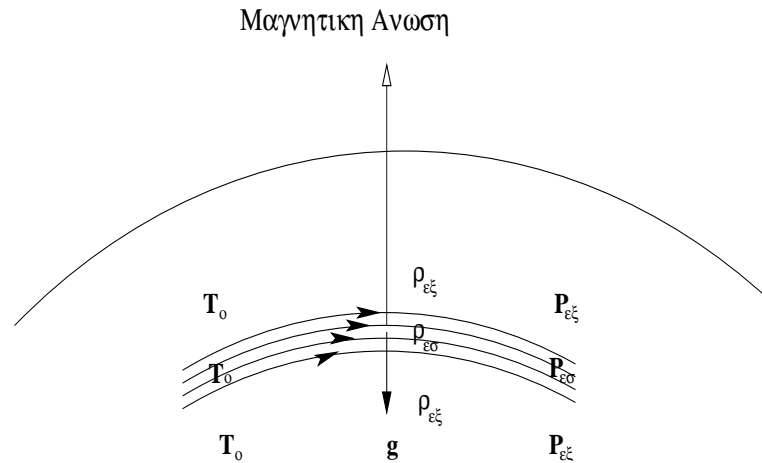
και επομένως,  $P_{εσωτ} < P_{εξωτ}$ . Γιά την καταστατική εξίσωση

$$P = \frac{k}{m} \rho T,$$

με  $T_{εσωτ} = T_{εξωτ} = T_0$  προκύπτει ότι  $\rho_{εσωτ} < \rho_{εξωτ}$ . Έτσι, ο σωλήνας ροής υφίσταται άνωση και ανέρχεται λόγω αυτής στην ηλιακή φωτόσφαιρα, όπως ακριβώς μία φυσαλίδα αέρα ανέρχεται προς την επιφάνεια ενός ενυδρείου, ή μιάς πισίνας.



Σχ. 4.5 Σωλήνας μαγνητικής ροής.



Σχ. 4.6 Μαγνητική άνωση σε σωλήνα μαγνητικής ροής στο εσωτερικό του Ηλιου.

### 4.11 Αστάθεια Parker

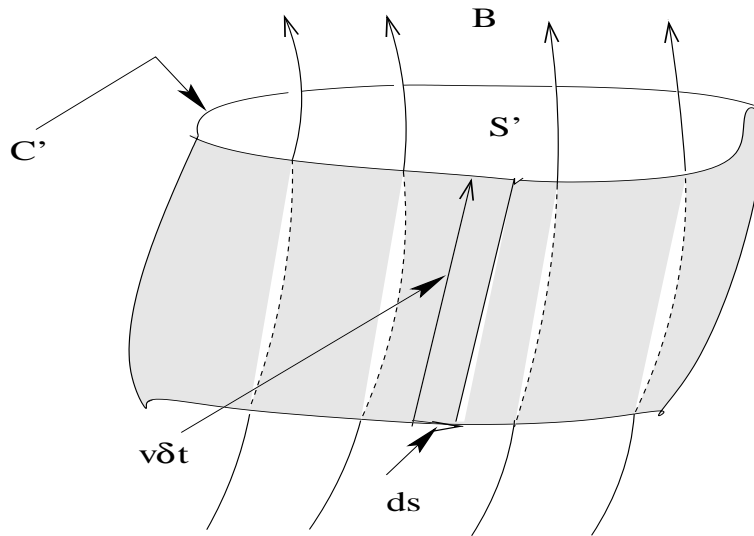
Η αστάθεια Parker (1966) είναι μια άμεση συνέπεια της μαγνητικής άνωσης την οποία υφίσταται πλάσμα εντός ενός σωλήνα μαγνητικής ροής που ευρίσκεται πάνω στο επίπεδο του Γαλαξία.

Ας θεωρήσουμε λοιπόν μια αρχική κατάσταση όπου το μεσοαστρικό μαγνητικό πεδίο είναι ομοιογενές και παράλληλο στο γαλαξιακό δίσκο, ενώ το πλάσμα είναι παγωμένο στο μαγνητικό αυτό πεδίο. Εάν το αρχικό αυτό μαγνητικό πεδίο διαταραχθεί τοπικά,



δημιουργούνται «κοιλιάδες» και «κορυφές», δηλ., η άνωση θα δημιουργήσει βρόχους σχήματος  $\Omega$ . Τότε η βαρύτητα του γαλαξιακού δίσκου εκκενώνει το πλάσμα κατά μήκος των μαγνητικών γραμμών από την κορυφή προς τα «πόδια» των μαγνητικών βρόχων. Αυτό επιτείνει την αστάθεια καθώς ο μαγνητικός σωλήνας γίνεται ακόμα πιο ελαφρύς στην κορυφή του κι επομένως πιο έντονα ανωτικός. Έτσι αναμένεται ο σωλήνας να ανέβει ακόμα ψηλότερα μέχρις ότου οι δυνάμεις της μαγνητικής τάσης ισχυροποιηθούν και αναχαιτίσουν τελικά την μαγνητική άνωση. Λεπτομερείς αριθμητικοί υπολογισμοί έχουν επιβεβαιώσει την αστάθεια αυτή. Ένα αποτέλεσμα της αστάθειας Parker είναι η παρατήρηση της εμφάνισης μεσοαστρικής ύλης σε πυκνώματα και αραιώματα. Τα πυκνώματα αντιστοιχούν στις κοιλιάδες των μαγνητικών γραμμών ενώ τα αραιώματα στις κορυφές. Τα πυκνώματα των κοιλιάδων αποτελούν περιοχές στις οποίες με την βαρυτική αστάθεια Jeans θα δημιουργηθούν νέοι αστέρες.

### 4.12 Πάγωμα των μαγνητικών γραμμών στο πλάσμα



Σχ. 4.7 Πάγωμα των μαγνητικών γραμμών στο πλάσμα.

Έστω  $C$  μια κλειστή καμπύλη στο πλάσμα η οποία είναι το σύνορο μιάς επιφάνειας  $S$ . Μέσα από την  $C$  τη χρονική στιγμή  $t$  διαπερνά ένας αριθμός μαγνητικών γραμμών, δηλ., μιά δεδομένη μαγνητική ροή  $\Phi$ . Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι την  $C$  απαρτίζουν κάποια συγκεκριμένα ιόντα και ηλεκτρόνια. Μετά από χρόνο  $\delta t$  η καμπύλη  $C$  μετακινείται από το κινούμενο πλάσμα σε μιά νέα θέση  $C'$  όπου εκεί περικλείει την επιφάνεια  $S'$ . Θέλουμε να υπολογίσουμε αν στο χρονικό διάστημα  $\delta t$  μεταβλήθηκε η μαγνητική ροή μέσα από την  $S$ , δηλ., αν η ροή μέσα από την  $S'$  είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη της αρχικής ροής από την  $S$ . Έτσι,

$$\text{Η αρχική ροή από την } S \text{ είναι: } \Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S},$$

$$\text{Η μεταβολή της ροής είναι : } \delta\Phi = \underbrace{\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \cdot \delta t}_{\delta\Phi_1} + \underbrace{\int_C (\vec{V} \delta t) \times d\vec{\ell} \cdot \vec{B}}_{\delta\Phi_2},$$

όπου η μεταβολή της ροής  $\delta\Phi_1$  οφείλεται μόνο στη μεταβολή της ροής λόγω της χρονικής μεταβολής του πεδίου  $\vec{B}$  (αύξησης ή ελάττωσης), ενώ η μεταβολή της ροής  $\delta\Phi_2$  οφείλεται στην κίνηση του πλάσματος μέσα στο διάστημα  $\delta t$  από την αρχική  $C$  στην τελική  $C'$  (δηλαδή, η  $\delta\Phi_2$  οφείλεται στο αν μαγνητικές γραμμές τέμνουν την παράπλευρη επιφάνεια και επομένως διέφυγε ή εισήλθε ροή μέσω αυτής της επιφάνειας στην νέα θέση  $C'$  σε σχέση με την αρχική  $C$ ).

Αλλά,

$$(\vec{V} \times d\vec{\ell}) \cdot \vec{B} \delta t = (\vec{B} \times \vec{V}) \cdot d\vec{\ell} \delta t = -(\vec{V} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} \delta t.$$

Επειδή,

$$\delta\Phi_2 = - \int_C (\vec{V} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} \delta t \stackrel{\text{Stokes}}{=} - \iint_{\vec{S}} \vec{\nabla} \times (\vec{V} \times \vec{B}) \cdot d\vec{S} \delta t,$$

έχουμε ότι

$$\frac{\delta\Phi}{\delta t} = \iint_{\vec{S}} \left[ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{\nabla} \times (\vec{V} \times \vec{B}) \right] \cdot d\vec{S} = 0,$$

λόγω της σχέσης,

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times (\vec{V} \times \vec{B}).$$

Με απλά λόγια αυτό το αποτέλεσμα μας λέγει ότι οι μαγνητικές γραμμές κινούνται μαζί με το πλάσμα ή όπως χαρακτηριστικά λέμε είναι «παγωμένες πάνω στο πλάσμα». Το μαγνητικό πεδίο μπορεί να θεωρηθεί ως ένα παραμορφώσιμο πλαστικό υλικό το οποίο κάμπτεται, παραμορφώνεται, συστρέφεται, κλπ., ακολουθώντας της κίνηση του πλάσματος. Αυτή η συμπεριφορά του μαγνητικού πεδίου στην Αστροφυσική είναι αντίθετη αυτής στο εργαστήριο όπου το μαγνητικό πεδίο έχει μια παθητική συμπεριφορά ανταποκρινόμενο στα ηλεκτρικά ρεύματα που εμείς μπορούμε να επιβάλουμε και να ρυθμίσουμε κατά βούληση. Στην Αστροφυσική το μαγνητικό πεδίο φαίνεται να έχει τη δική του ξεχωριστή προσωπικότητα.

### 4.13 Επιφάνειες Μαγνητικής Ροής

Σε ένα σύστημα κυλινδρικών συντεταγμένων  $(z, r, \phi)$  ένα αξονικά συμμετρικό μαγνητικό πεδίο  $\vec{B}(r, z)$  μπορεί να γραφεί συναρτήσει ενός διανυσματικού δυναμικού ως εξής:

$$\vec{B}(r, z) = \vec{\nabla} \times \left( \frac{A(r, z) \hat{\phi}}{r} \right) + \vec{B}_\phi(r, z) \hat{\phi} = \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} \hat{z} - \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial z} \hat{r} + B_\phi \hat{\phi}.$$

Η συνάρτηση  $A(r, z) = \text{σταθ.}$  ορίζει μια καμπύλη στο μεσημβρινό επίπεδο  $\phi = \text{σταθ.}$  Το πολοειδές μαγνητικό πεδίο  $\vec{B}_p = B_z \hat{z} + B_r \hat{r}$  είναι παράλληλο κι εφάπτεται

της μαγνητικής αυτής γραμμής  $A(r, z) = \text{σταθ.}$  διότι:

$$\frac{B_r}{dr} = \frac{B_z}{dz} \Rightarrow drB_z - dzB_r = 0 \Rightarrow dr\frac{\partial A}{\partial r} + dz\frac{\partial A}{\partial z} = dA(r, z) = 0 [A(r, z) = \text{σταθερό}].$$

Περιστρέφοντας αυτή την καμπύλη  $A = \text{σταθ.}$  γύρω από τον άξονα των  $z$  παράγουμε μια επιφάνεια. Το ολικό μαγνητικό πεδίο,

$$\vec{B}(r, z) = \vec{B}_\rho(r, z)\hat{\rho} + \vec{B}_\phi(r, z)\hat{\phi},$$

αποτελείται από γραμμές που περιελίσσονται γύρω από την επιφάνεια  $A(r, z) = \text{σταθ.}$  στον 3-διάστατο χώρο. Η μαγνητική ροή  $F_B$  που διέρχεται από μια τυχούσα τομή της 3-διάστατης αυτής επιφάνειας είναι,

$$F_B = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{\nabla} \times \left( \frac{A}{r} \hat{\phi} \right) \cdot d\vec{S} = \int_C A d\phi = 2\pi A_{\gamma\rho},$$

μέσω του θεωρήματος του Stokes, όπου  $A_{\gamma\rho}$  η σταθερή τιμή του  $A$  πάνω στη γραμμή ροής, η οποία περικλείει την επιφάνεια. Επομένως, σε ένα αξονικά συμμετρικό μαγνητικό πεδίο η τιμή της συνάρτησης  $2\pi A$  μας δίνει την μαγνητική ροή που διέρχεται από ένα μαγνητικό σωλήνα που σχηματίζεται περιστρέφοντας την συνάρτηση  $A = \text{σταθ.}$  γύρω από τον άξονα  $z$ .

## 4.14 Ο νόμος ισοπεριστροφής των μαγνητικών επιφανειών

Ας θεωρήσουμε ένα μαγνητισμένο πλάσμα πολύ υψηλής ηλεκτρικής αγωγιμότητας που περιστρέφεται αξιμουθιακά με ταχύτητα  $\vec{v} = \Omega(r, z)r\hat{\phi}$  και έχει μαγνητικό πεδίο σε κυλινδρικές συντεταγμένες,

$$\vec{B}(r, z) = \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} \hat{z} - \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} \hat{r} + B_\phi \hat{\phi}.$$

Σε ένα τέτοιο χρόνο-ανεξάρτητο μαγνητικό πεδίο, από το νόμο του Faraday η στροφή του επαγόμενου ηλεκτρικού πεδίου είναι μηδέν,

$$\vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B}) = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \eta \nabla^2 \vec{B} = 0.$$

Αντικαθιστώντας στην  $\phi$ -συνιστώσα της στροφής του γινομένου  $\vec{v} \times \vec{B}$ ,

$$\frac{\partial}{\partial z} v_\phi B_z + \frac{\partial}{\partial r} v_\phi B_r = 0,$$

τις προηγούμενες εκφράσεις του μαγνητικού πεδίου συναρτήσει της συνάρτησης  $A(r, z)$  έχουμε,

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \Omega \frac{\partial A}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left( \Omega \frac{\partial A}{\partial z} \right) = 0,$$

ή,

$$\frac{\partial \Omega}{\partial z} \frac{\partial A}{\partial r} - \frac{\partial \Omega}{\partial r} \frac{\partial A}{\partial z} = 0,$$

που είναι η Ιακωβιανή των συναρτήσεων  $\Omega$ ,  $A$  ως προς τις μεταβλητές  $(r, z)$ . Η γενική λύση της εξίσωσης αυτής είναι  $\Omega = f(A)$ , όπου  $f$  είναι τυχούσα συνάρτηση. Αυτό σημαίνει ότι κάθε μαγνητική επιφάνεια  $A(r, z) = \text{σταθ.}$  περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα  $\Omega$ . Έτσι, η συνθήκη του παγώματος ρευστού-μαγνητικού πεδίου απαιτεί οι μαγνητικές επιφάνειες να περιστρέφονται σαν στερεά σώματα, σε κάθε χρόνο ανεξάρτητη κατάσταση.

Εάν η γωνιακή ταχύτητα  $\Omega$  ήταν μεταβλητή πάνω σε μία μαγνητική γραμμή  $A(r, z) = \text{σταθ.}$ , τότε οι πολοειδείς μαγνητικές γραμμές θα τεντωνόντουσαν στις περιοχές που έχουν μεγαλύτερο  $\Omega$  με αποτέλεσμα την παραγωγή τορροειδούς μαγνητικού πεδίου, όπως στην περίπτωση του ηλιακού δυναμό, και δεν θα είχαμε μια χρονοανεξάρτητη κατάσταση, Όταν το μαγνητικό πεδίο ενισχύεται, όπως στο ηλιακό δυναμό, αυτό σημαίνει ότι η μαγνητική ενέργεια αυξάνει λόγω του έργου που επιτελεί σε αυτό η κίνηση του πλάσματος. Όταν όμως το μαγνητικό πεδίο γίνει αρκούντως ισχυρό, τότε οι μαγνητικές δυνάμεις αντιστέκονται σε περισσότερη παραμόρφωσή τους από το ρευστό. Τότε το μαγνητικό πεδίο θα επιβάλλει στο πλάσμα την στερεά περιστροφή που απαιτεί ο νόμος της ισοπεριστροφής.

Μια συνέπεια του νόμου της ισοπεριστροφής είναι το μαγνητικό φρενάρισμα. Ας υποθέσουμε ότι ένα νεφέλωμα ακτίνας  $r = a$  περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα  $\Omega$ . Εκτός του νεφελώματος αυτού υπάρχει πλάσμα που περιστρέφεται με μικρότερη γωνιακή ταχύτητα αλλά είναι συνδεδεμένο με τις ίδιες μαγνητικές γραμμές του χώρου  $r < a$ . Τότε, οι μαγνητικές τάσεις θα προσπαθήσουν να επιταχύνουν και το εξωτερικό πλάσμα στην ίδια γωνιακή ταχύτητα  $\Omega$ . Λόγω όμως της διατήρησης της στροφορμής αυτό θα έχει ως αποτέλεσμα την ελάττωση της γωνιακής ταχύτητας του κεντρικού νεφελώματος. Αυτό ονομάζεται *μαγνητικό φρενάρισμα* και είναι ένας τρόπος εξήγησης του δεδομένου ότι ενώ τα νεαρά άστρα περιστρέφονται πολύ γρήγορα, όταν φθάσουν στην ηλικία του Ήλιου περιστρέφονται πολύ αργότερα λόγω του μαγνητικού φρεναρίσματος που προέρχεται από την μαγνητική σύνδεση των νέων άστρων με το νεφέλωμα από το οποίο προήλθαν. Έτσι, το μαγνητικό πεδίο παίζει και το ρόλο του μεταφορέα στροφορμής από μια περιοχή του χώρου σε μια άλλη με την οποία υπάρχει μαγνητική σύνδεση.

## 4.15 Στήλη μαγνητικά παγιδευμένου πλάσματος

Ας δούμε πως μπορούμε να έχουμε μια κυλινδρική στήλη πλάσματος όπου το μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί ένα ηλεκτρικό ρεύμα κατά μήκος του άξονα του κυλίνδρου περιορίζει το πλάσμα σε κάποια ακτίνα  $a$  σε ισορροπία με την εσωτερική πίεσή του  $P$ . Σε κυλινδρικές συντεταγμένες  $(z, r, \phi)$ , η σωληνοειδής συνθήκη του μαγνητικού πεδίου

$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$  γράφεται,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rB_r)}{\partial r} + \frac{\partial B_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\phi}{\partial \phi} = 0.$$

Υποθέτοντας ότι δεν έχουμε μεταβολή του μαγνητικού πεδίου στις διευθύνσεις  $\phi$  και  $z$ ,  $\partial/\partial\phi = \partial/\partial z = 0$ , και εφόσον το πεδίο είναι πεπερασμένο στον άξονα  $r = 0$ , έχουμε  $B_r = 0$ ,  $B_z = B_z(r)$ ,  $B_\phi = B_\phi(r)$ . Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις αυτές στη συνθήκη Μαγνητοστατικής ισορροπίας

$$-\vec{\nabla}P + \frac{(\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B}}{4\pi} = 0,$$

έχουμε, αν υποθέσουμε ότι η πίεση εξαρτάται μόνο από το  $r$ ,

$$\frac{d}{dr} \left( P + \frac{B_\phi^2 + B_z^2}{8\pi} \right) + \frac{B_\phi^2}{4\pi r} = 0.$$

Ας υποθέσουμε ότι το μαγνητικό πεδίο  $B_\phi(r)$  παράγεται από ένα ρεύμα πυκνότητας  $J(r)\hat{z}$ . Τότε από την εξίσωση του Ampere έχουμε:

$$\frac{1}{r} \frac{d(rB_\phi)}{dr} = \frac{4\pi J}{c}.$$

Αν το ρεύμα είναι σταθερής πυκνότητας,  $J = \text{σταθ.}$ , τότε,

$$B_\phi = \frac{2\pi}{c} Jr,$$

Αντικαθιστώντας αυτή την έκφραση του  $B_\phi(r)$  στην εξίσωση μαγνητοστατικής ισορροπίας και υποθέτοντας ότι  $B_z = \text{σταθερό}$  έχουμε:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{2\pi}{c^2} J^2 r \implies P(r) = P_0 - \frac{\pi J^2 r^2}{c^2},$$

όπου  $P_0$  είναι η πίεση του πλάσματος στο κέντρο  $r = 0$  της στήλης. Η πίεση ελαττώνεται με την κυλινδρική ακτίνα  $r$  για να εξισορροπήσει από μέσα την προς το κέντρο δύναμη του μαγνητικού πεδίου  $B_\phi(r)$ . Παρατηρούμε επίσης από την έκφραση της πίεσης  $P(r)$  ότι σε κάποια ακτίνα  $\alpha$  η πίεση μηδενίζεται και

$$\alpha^2 = \frac{P_0 c^2}{\pi J^2}.$$

Με αυτό τον τρόπο το μαγνητικό πεδίο περιορίζει το πλάσμα στον κύλινδρο ακτίνας  $\alpha$  με μηδενική πίεση στην πεπερασμένη ακτίνα του κυλίνδρου  $\alpha$ .

Στη γενικότερη περίπτωση όπου  $J = J(r)$  και η στήλη του πλάσματος πάλι εκτείνεται στο διάστημα  $r = 0$  μέχρι  $r = \alpha$ , το συνολικό ρεύμα που διαρρέει τον κύλινδρο είναι

$$I = \int_0^\alpha J(r) 2\pi r dr = \frac{c\alpha}{2} B_\phi(\alpha) \implies B_\phi(\alpha) = \frac{2I}{c\alpha}.$$

Η εξίσωση της μαγνητοστατικής ισορροπίας για  $B_z = \text{σταθ.}$  δίνει,

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( \frac{r^2 B_\phi^2}{8\pi} \right).$$

Η μέση πίεση μέσα στην κυλινδρική στήλη ακτίνας  $r = \alpha$  είναι,

$$\bar{P} = \frac{1}{\pi\alpha^2} \int_0^\alpha P(r) 2\pi r dr = \frac{2}{\alpha^2} \left[ \frac{r^2 P}{2} \right]_0^\alpha - \int_0^\alpha \frac{r^2}{2} \frac{dP}{dr} dr = \frac{B_\phi^2(\alpha)}{8\pi} = \frac{I^2}{2\pi c^2 \alpha^2}.$$

Η σχέση αυτή, που ονομάζεται συνθήκη του *Bennett*, συνδέει τη μέση πίεση  $\bar{P}$  του πλάσματος με το συνολικό ρεύμα  $I$  που απαιτείται να διαρρέει μία στήλη ακτίνας  $\alpha$  έτσι ώστε το σύστημα να ευρίσκεται σε ισορροπία.

## 4.16 Πρόβλημα 1

Σε μια κυλινδρική στήλη πλάσματος, το μαγνητικό πεδίο  $B_r = 0$ ,  $B_z = B_0$ ,  $B_\phi = B_\phi(r)$  παράγεται από ένα ηλεκτρικό ρεύμα που ρέει κατά μήκος του άξονα του κυλίνδρου με επιφανειακή πυκνότητα,

$$J_z = J_o \left( \frac{r}{r_o} \right)^n,$$

όπου τα  $(J_o, r_o, n)$  είναι σταθερές.

- (α) Να υπολογισθεί το παραγόμενο αζιμουθιακό μαγνητικό πεδίο  $B_\phi(r)$ .
- (β) Έστω  $P_0$  η πίεση του πλάσματος στο κέντρο  $r = 0$  της στήλης. Να υπολογισθεί η ακτίνα  $r = \alpha$  όπου η πίεση του πλάσματος  $P(r)$  μηδενίζεται,  $P(\alpha) = 0$ .
- (γ) Να υπολογισθεί το συνολικό ρεύμα  $I$  που διαρρέει τη στήλη και να συσχετισθεί με την τιμή του αζιμουθιακού μαγνητικού πεδίου στην ακτίνα της στήλης,  $B_\phi(\alpha)$ .
- (δ) Αν  $\bar{P}$  είναι η μέση πίεση μέσα στη στήλη, ναδειχθεί ότι ισχύει η συνθήκη του *Bennett*,

$$\bar{P} = \frac{1}{\pi\alpha^2} \int_0^\alpha P(r) 2\pi r dr = \frac{B_\phi^2(\alpha)}{8\pi} = \frac{I^2}{2\pi c^2 \alpha^2},$$

που συνδέει τη μέση πίεση  $\bar{P}$  του πλάσματος με το συνολικό ρεύμα  $I$  που απαιτείται να διαρρέει τη στήλη ακτίνας  $\alpha$  έτσι ώστε το σύστημα να ευρίσκεται σε ισορροπία.

## 4.17 Ευστάθεια μιάς στήλης μαγνητικά παγιδευμένου πλάσματος

Ένα εύλογο ερώτημα σε σχέση με την προηγούμενη ανάλυση όπου ένα αζιμουθιακό μαγνητικό πεδίο περιορίζει το πλάσμα σε στήλη πεπερασμένης ακτίνας, είναι αν αυτή η κατάσταση ισορροπίας είναι ευσταθής. Αν δεν είναι ευσταθείς αυτές οι καταστάσεις

ισορροπίας, τότε προφανώς δεν υπάρχουν στη φύση, το εργαστήριο ή την Αστροφυσική. Επειδή μια λεπτομερής ανάλυση της ευστάθειας αυτών των ισορροπιών είναι αρκετά περίπλοκη, θα αρκεσθούμε εδώ να δείξουμε με απλά φυσικά επιχειρήματα ότι αυτές οι καταστάσεις ισορροπίας είναι ασταθείς.

Συγκεκριμένα, ας θεωρήσουμε μια στήλη πλάσματος με αξιμουθιακό μόνο μαγνητικό πεδίο. Κατ' αρχήν θεωρούμε μία διαταραχή, όπως στο Σχ. Χα, όπου ο άξονας της στήλης δεν είναι πλέον ευθύγραμμος. Τότε, παρατηρούμε ότι στα σημεία που ευρίσκονται στο εσωτερικό του κυρτωμένου άξονα, οι μαγνητικές γραμμές έρχονται πιο κοντά μεταξύ τους, ενώ σε σημεία που ευρίσκονται στην εξωτερική πλευρά του κυρτωμένου άξονα, οι μαγνητικές γραμμές αραιώνουν. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα η ένταση του μαγνητικού πεδίου να είναι ισχυρότερη στα σημεία που είναι εσωτερικά του κυρτωμένου άξονα από ότι ήταν αρχικά. Ομοίως, η ένταση του μαγνητικού πεδίου είναι ασθενέστερη της αρχικής σε σημεία που είναι εξωτερικά του κυρτωμένου άξονα. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα η κύρτωση της διαταραχής να ενισχύεται ακόμη περισσότερο και επομένως όταν δημιουργηθεί αυτή η διαταραχή το σύστημα αποκλίνει όλο και περισσότερο της αρχικής του κατάστασης ισορροπίας. Με άλλα λόγια, όταν εφαρμοσθούν στο πλάσμα αυτού του τύπου οι διαταραχές το οδηγούν όλο και περισσότερο μακριά από την κατάσταση ισορροπίας. Λέμε λοιπόν ότι η στήλη πλάσματος είναι ασταθής σε διαταραχές του τύπου αυτού (kink instability, αστάθεια κύρτωσης). Ο μόνος τρόπος να σταθεροποιήσουμε αυτή την αστάθεια είναι εισάγοντας ένα αξονικό μαγνητικό πεδίο  $B_z$ . Τότε, η τάση του κυρτωμένου  $B_z$  δρα προς το κέντρο καμπυλότητας της κύρτωσης και εξουδετερώνει το αποτέλεσμα της αύξησης του μαγνητικού πεδίου λόγω αύξησης του  $B_\phi$  εσωτερικά της κύρτωσης. Αποδεικνύεται ότι όταν  $B_z \approx B_\phi$  τότε η στήλη είναι ευσταθής.

Ένα απλό παράδειγμα επίδειξης αυτής της αστάθειας γίνεται με ένα ευθύγραμμο, αλλά ελικοειδώς τυλιγμένο, καλώδιο τηλεφώνου. Εάν αυξήσουμε τον αριθμό των περιελίξεων στρίβοντας το ένα άκρο του καλωδίου, ενώ διατηρούμε σταθερό το άλλο άκρο, παρατηρούμε ότι ο άξονας του καλωδίου δεν παραμένει ευθύγραμμος, αλλά δημιουργεί μικρούς βρόχους λόγω ακριβώς της αστάθειας που συζητήσαμε πιο πάνω.

Μια συναφής αστάθεια προέρχεται από διαταραχές της ακτίνας της κυλινδρικής στήλης, κατά μήκος του κυλινδρικού άξονα της στήλης και ονομάζεται αστάθεια «λουκάνικου» (sausage instability). Συγκεκριμένα, αν στενέψει η διατομή του σωλήνα, το αξιμουθιακό πεδίο στο ίδιο  $r$  αυξάνει λόγω της αύξησης του  $J$ . Αυτό συμβαίνει γιατί λόγω του στενέματος της διατομής, το ίδιο ρεύμα  $I$  περνά από μικρότερη επιφάνεια και έτσι το  $J$  αυξάνει. Αποτέλεσμα του αυξημένου  $B_\phi$  είναι η διατομή να μικραίνει ακόμη περισσότερο και το σύστημα να οδηγείται έτσι σε αστάθεια. Και αυτή η αστάθεια σταθεροποιείται από την ύπαρξη αξονικού μαγνητικού πεδίου  $B_z$ . Η συμπίεση της διατομής αυξάνει τοπικά το  $B_z$  του οποίου η αυξημένη πίεση αντισταθμίζεται σε περαιτέρω μείωση της διατομής του σωλήνα, δηλ., αντισταθμίζει την αστάθεια.

## 4.18 Μαγνητικό πεδίο μηδενικής μαγνητικής δύναμης

Σε πολύ αραιά μαγνητισμένα πλάσματα που ευρίσκονται σε ισορροπία, όταν δηλαδή η βαθμίδα της πίεσης του πλάσματος είναι αμελητέα, όπως για παράδειγμα στην ανώτερη ηλιακή ατμόσφαιρα, ισορροπία μπορεί να υπάρξει μόνο όταν η μαγνητική δύναμη μηδενίζεται,

$$\frac{(\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B}}{4\pi} = 0 \implies \vec{\nabla} \times \vec{B} = \lambda(\vec{r})\vec{B},$$

όπου  $\lambda(\vec{r})$  είναι κάποια συνάρτηση των χωρικών συντεταγμένων, Όμως επειδή,

$$0 = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{\nabla} \cdot (\lambda\vec{B}) = \lambda\vec{\nabla} \cdot \vec{B} + \vec{B} \cdot \vec{\nabla}\lambda,$$

συνάγεται ότι η ποσότητα  $\lambda$  πρέπει να είναι σταθερά κατά μήκος των μαγνητικών γραμμών  $\vec{B}$ . Δηλ., αν και η  $\lambda$  μπορεί να έχει διαφορετική τιμή σε διαφορετικές μαγνητικές γραμμές, πρέπει να έχει σταθερή τιμή πάνω σε μια δεδομένη μαγνητική γραμμή.

Η απλούστερη περίπτωση είναι να έχουμε  $\lambda = \text{σταθ.}$  οπότε και το μαγνητικό πεδίο ονομάζεται γραμμικό πεδίο μηδενικής μαγνητικής δύναμης. Σε αυτή την περίπτωση, εάν γράψουμε σε κυλινδρικές συντεταγμένες την εξίσωση ισορροπίας υποθέτοντας ότι δεν έχουμε εξάρτηση του πεδίου από τις  $\phi$  και  $z$ , παίρνουμε,

$$-\frac{dB_z}{dr} = \lambda B_\phi, \quad \frac{1}{r} \frac{d(rB_\phi)}{dr} = \lambda B_z.$$

Οι εξισώσεις αυτές έχουν την ακόλουθη απλή λύση,

$$B_z = B_0 J_0(\lambda r), \quad B_\phi = B_0 J_1(\lambda r),$$

όπου  $J_0$  και  $J_1$  είναι οι πρώτες συναρτήσεις Bessel, μηδενικής και πρώτης τάξεως, για τις οποίες ισχύει

$$J'_0(x) = -J_1(x), \quad xJ'_1(x) + J_1(x) = xJ_0.$$

Αυτή η απλή λύση αποτελεί τον πρώτο όρο σε ανάπτυγμα της γενικής λύσης του γραμμικού πεδίου μηδενικής μαγνητικής δύναμης σε συναρτήσεις Bessel όλων των τάξεων.

Στη γενικότερη περίπτωση που το  $\lambda$  μεταβάλλεται από γραμμή σε γραμμή, έχουμε το μη γραμμικό πεδίο μηδενικής μαγνητικής δύναμης. Εισάγοντας την συνάρτηση  $F(r)$  της ολικής μαγνητικής πίεσης,

$$F(r) = \frac{B_\phi^2 + B_z^2}{8\pi},$$

η εξίσωση μαγνητοστατικής ισορροπίας γράφεται,

$$-\frac{d}{dr} \left( \frac{B_\phi^2 + B_z^2}{8\pi} \right) - \frac{B_\phi^2}{4\pi r} = 0, \quad B_\phi^2 = -4\pi r \frac{dF}{dr}, \quad B_z^2 = 8\pi \left( F + \frac{r}{2} \frac{dF}{dr} \right).$$

Από τη γεννήτρια  $F(r)$  Μπορούμε τότε να υπολογίσουμε τις συνιστώσες  $B_\phi$  και  $B_z$ . Οι περιορισμοί στην συνάρτηση  $F(r)$  είναι ότι πρέπει να είναι μονότονα φθίνουσα (έτσι ώστε  $B_\phi^2 > 0$ ) και επίσης  $2F + r dF/dr > 0$ . Για διάφορες εκφράσεις της γεννήτριας  $F(r)$  μπορούν να κατασκευασθούν διάφορα μαγνητικά πεδία μηδενικής μαγνητικής δύναμης.



## 4.19 Πρόβλημα 2

Θεωρώντας την γεννήτρια συνάρτηση

$$F(r) = \frac{B_0^2/8\pi}{1+r^2/a^2},$$

όπου τα  $B_0$  και  $a$  είναι σταθερές, να υπολογισθούν τα  $B_\phi(r)$ ,  $B_z(r)$  και η συνάρτηση  $\lambda(r)$ .

## 4.20 Η Εξίσωση του Δυναμού

Στα επόμενα θεωρούμε την εξίσωση που περιγράφει την αλληλεπίδραση του μαγνητικού πεδίου με ένα πεδίο ταχυτήτων. Η εξίσωση αυτή ονομάζεται και εξίσωση του δυναμού γιατί χρησιμοποιείται για την εξήγηση της δημιουργίας του μαγνητικού πεδίου εντός ενός κινουμένου πλάσματος (όπως το δυναμό ενός ποδηλάτου). Συνδυάζοντας τις εξισώσεις Faraday, Laplace και Ohm, έχουμε

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{με} \quad \frac{\vec{J}}{\sigma} - \frac{\vec{V}}{c} \times \vec{B} = \vec{E}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}, \\ \Rightarrow \vec{\nabla} \times \left[ \frac{c}{4\pi\sigma} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) - \frac{\vec{V}}{c} \times \vec{B} \right] &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \Rightarrow \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= \vec{\nabla} \times (\vec{V} \times \vec{B}) - \frac{c^2}{4\pi\sigma_E} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}), \end{aligned}$$

Υποθέτοντας στη συνέχεια σταθερή αγωγιμότητα,

$$\eta = \frac{c^2}{4\pi\sigma_E} = \text{σταθερό},$$

και χρησιμοποιώντας την διανυσματική ταυτότητα,

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \vec{\nabla}^2 \vec{B} = -\vec{\nabla}^2 \vec{B},$$

έχουμε

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times (\vec{V} \times \vec{B}) + \eta \nabla^2 \vec{B}.$$

Αυτή η εξίσωση ονομάζεται «εξίσωση του δυναμού». Ας δούμε στη συνέχεια το σχετικό μέγεθος των δύο όρων της στα αριστερά. Έστω,

$$|\vec{\nabla} \times (\vec{V} \times \vec{B})| \simeq \frac{VB}{L}, \quad |\eta \nabla^2 \vec{B}| \sim \frac{c^2 B}{4\pi\sigma_E L^2},$$

ενώ μπορούμε να εισάγουμε και τον μαγνητικό αριθμό Reynolds

$$R_m = \frac{VL}{\eta} = \frac{4\pi\sigma_E VL}{c^2}.$$

Τότε,

$$\text{αν } R_m \gg 1 \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \simeq \vec{\nabla} \times (\vec{V} \times \vec{B}),$$

ενώ αν,

$$R_m \leq 1 \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \simeq \eta \nabla^2 \vec{B}.$$

Στην τελευταία περίπτωση η χρονική εξέλιξη του μαγνητικού πεδίου ακολουθεί το γνωστό νόμο της διάχυσης.

### Παραδείγματα τιμών του μαγνητικού αριθμού Reynolds:

- Ηλιακός Άνεμος:

$$V \sim 400 \text{ km/sec}, L \sim 1 \text{ AU} \sim 10^{13} \text{ cm}, \sigma_E \simeq 10^{14} \text{ sec}^{-1} \Rightarrow R_m \simeq 10^{14}.$$

- Γαλαξιακός δίσκος:

$$V \sim 10 \text{ km/sec}, L \sim 100 \text{ pc} \sim 10^{20} \text{ cm}, \sigma_E \simeq 10^{11} - 10^9 \text{ sec}^{-1} \Rightarrow R_m \simeq 10^{17} - 10^{15}.$$

- Ηλιακή Φωτόσφαιρα:

$$V \sim 1 \text{ km/sec}, L \sim 10^8 \text{ cm}, \sigma_E \simeq 10^{11} - 10^9 \text{ sec}^{-1} \Rightarrow R_m \simeq 10^4 - 10^2.$$

Το ηλεκτρικό πεδίο στο σύστημα αναφοράς του κινούμενου πλάσματος είναι:

$$\vec{E}' = \vec{E} + \frac{\vec{V} \times \vec{B}}{c} \simeq \frac{\vec{J}}{\sigma_E}.$$

Επειδή

$$\frac{J}{\sigma_E} \simeq \frac{c}{4\pi\sigma_E} \frac{B}{L} = \eta \frac{B}{cL},$$

και

$$R_m = \frac{V\ell}{\eta} \Rightarrow \frac{J}{\sigma_E} \simeq \frac{1}{R_m} \left( \frac{V}{c} B \right),$$

έχουμε:

- το  $E'$  είναι μικρότερο από το επαγόμενο ηλεκτρικό πεδίο  $\left(\frac{V}{c}B\right)$  κατά τον παράγοντα  $\frac{1}{R_m}$ .
- Σε πλάσματα υψηλής θερμοκρασίας το ηλεκτρικό πεδίο  $E'$  που αισθάνεται το πλάσμα είναι αμελητέο εν σχέση με το επαγόμενο ηλεκτρικό πεδίο  $\vec{E} = -\frac{\vec{V}}{c} \times \vec{B}$ .

## 4.21 Ένα απλό παράδειγμα Δυναμό

Έστω ότι έχουμε ένα ασθενές αρχικό μαγνητικό πεδίο  $\vec{B} = B_0 \hat{y}$  σε πλάσμα άπειρης ηλεκτρικής αγωγιμότητας  $\sigma_E$ . Έστω επίσης ότι επιβάλλουμε και ένα πεδίο ταχυτήτων το οποίο δρά από τη χρονική στιγμή  $t = 0$  και μετά,

$$\vec{v} = v_0 e^{-\frac{y^2}{y_0^2}} \hat{x}.$$

Τότε,

$$\vec{v} \times \vec{B} = v_0 B_0 e^{-\frac{y^2}{y_0^2}} \hat{z},$$

και

$$\vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B}) = \hat{x} v_0 B_0 \frac{\partial}{\partial y} e^{-\frac{y^2}{y_0^2}} = -\hat{x} v_0 B_0 \frac{2y}{y_0^2} e^{-\frac{y^2}{y_0^2}} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Έτσι δημιουργείται ένα νέο μαγνητικό πεδίο με μέτρο που γραμμικά αυξάνεται με το χρόνο, στη διεύθυνση  $\hat{x}$ ,

$$B_x = -\frac{2v_0 B_0 y t}{y_0^2} e^{-\frac{y^2}{y_0^2}}.$$

Έτσι, από ένα αρχικό ασθενές μαγνητικό πεδίο στη διεύθυνση  $\hat{y}$  παράγεται - κυρίως κοντά στον άξονα  $\hat{y}$  - ένα ισχυρό μαγνητικό πεδίο στην ορθόγωνη διεύθυνση  $\hat{x}$ .

## 4.22 Διάχυση Μαγνητικών Γραμμών

Για καταστάσεις όπου ο μαγνητικός αριθμός Reynolds είναι μικρός, η εξίσωση του δυναμό γίνεται

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \eta \nabla^2 \vec{B}.$$

Έστω  $L$  το χαρακτηριστικό μήκος μεταβολής του  $\vec{B}$  και  $\tau$  ο χαρακτηριστικός χρόνος μεταβολής του. Τότε,

$$\frac{1}{\tau} \simeq \frac{\eta}{L^2} \Rightarrow \tau = \frac{L^2}{\eta} \quad \text{ή,} \quad L^2 = \tau \eta.$$

Για χρόνους  $t \ll \tau$ , τα φαινόμενα της διάχυσης των μαγνητικών γραμμών είναι αμελητέα. Όπως θα δούμε στην επόμενη παράγραφο, τότε ισχύει η ιδέα των παγωμένων στο πλάσμα μαγνητικών γραμμών και οι αγωγοί θεωρούνται τέλειοι.

## 4.23 Πρόβλημα 3

Μπορεί το γήινο μαγνητικό πεδίο να είναι πρωτόγονο, δηλαδή να σχηματίσθηκε πριν το σχηματισμό της Γης;

Ας υπολογίσουμε το χαρακτηριστικό χρόνο διάχυσης του μαγνητικού πεδίου από τον πυρήνα της Γης, όπου έχουμε υγρό Fe και υψηλή αγωγιμότητα,  $\sigma_E \sim 10^{16} \text{ sec}^{-1}$ .

Για  $L \sim 1000 \text{ km}$ ,

$$\tau \simeq \frac{10^{16}}{\eta} = \frac{10^{16}}{10^4} \sim 10^{12} \text{ secs} \leq 10^5 \text{ yrs}.$$

Επομένως, αφού η ηλικία της Γης ( $\sim 10^9 \text{ yrs}$ ) είναι πολύ μεγαλύτερη, ένα πρωτόγονο  $\vec{B}$  θα είχε ήδη διαχυθεί. Το ίδιο συμπέρασμα ισχύει και για τους άλλους πλανήτες που έχουν  $\vec{B}$ . Επομένως, πρέπει το  $\vec{B}$  με κάποιο τρόπο να αναπαράγεται.

## 4.24 Πρόβλημα 4

Θεωρήστε την εξιδανικευμένη κατάσταση όπου ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο  $B_z$  είναι περιορισμένο στην αρχή  $x = \pm\alpha$ . Έστω ότι το πλάτος της περιοχής  $\alpha$  τείνει στο μηδέν ενώ το μέγεθος του  $B_z$  στο άπειρο άλλα η ροή  $\Phi_0 = 2B_z\alpha$  παραμένει σταθερή.

(α) Δείξτε ότι η λύση

$$B_z(x, t) = \frac{\Phi_0}{\sqrt{4\pi\eta t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\eta t}\right)$$

ικανοποιεί την εξίσωση της διάχυσης,  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \eta \nabla^2 \vec{B}$  ενώ παράλληλα διατηρεί τη μαγνητική ροή,  $\Phi_0$ .

(β) Δείξτε ότι το «εύρος» της περιοχής όπου έχει διαχυθεί το πεδίο είναι  $L \sim \sqrt{\eta t}$ , σε συμφωνία με την εκτίμηση τάξης μεγέθους από την εξίσωση της διάχυσης.

(γ) Υπολογίστε τη θέρμανση Joule και την ενέργεια που θερμαίνει το πλάσμα ανά μονάδα όγκου,

$$\frac{J^2}{\sigma_E} \tau = \frac{J^2 x^2}{\sigma_E \eta}$$

και συγκρίνετέ την με τη μαγνητική ενέργεια  $B_z^2/8\pi$ .

## 4.25 Πρόβλημα 5

Το μαγνητικό πεδίο  $B_z(r, t)$  ενός κυλινδρικά συμμετρικού μαγνητικού σωλήνα την χρονική στιγμή  $t_0$  είναι

$$B_z(r, t_0) = B_0 \exp\left(-\frac{r^2}{4\eta t_0}\right).$$

Στη συνέχεια διαχέεται σύμφωνα με την εξίσωση της διάχυσης,

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = \frac{\eta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial B_z}{\partial r} \right).$$

Βρείτε το  $B_z(r, t)$  και κάνετε γραφικές παραστάσεις αυτού σε διάφορα χρονικά διαστήματα. Υπολογίστε τη μαγνητική ροή και δείξτε ότι διατηρείται. Εξηγήστε γιατί ο ρυθμός μεταβολής της μαγνητικής ενέργειας είναι αρνητικός.

## 4.26 Θέρμανση του Ηλιακού Στέμματος σε λεπτά φύλλα ρεύματος

Στα επόμενα θα υπολογίσουμε το χαρακτηριστικό χρόνο θέρμανσης του Ηλιακού Στέμματος με το μηχανισμό Joule καθώς επίσης και την κλίμακα των ρευματικών φύλλων όπου καταναλώνεται η ηλεκτρική ενέργεια.

Όταν σε πλάσμα έχουμε θέρμανση Joule λόγω πεπερασμένης ηλεκτρικής αγωγιμότητας, ο ρυθμός αύξησης της ενέργειας στη μονάδα όγκου του πλάσματος είναι,

$$\frac{dE}{dVdt} \simeq \frac{E}{V \cdot \tau} = \frac{I^2 R}{S \cdot \ell} = \frac{SJ^2}{\ell} \cdot \frac{1}{\sigma_E S} = \frac{J^2}{\sigma_E} \left( \frac{\text{ergs}}{\text{sec cm}^3} \right).$$

Από το νόμο του Ampere έχουμε την προσεγγιστική σχέση πυκνότητας του ρεύματος και της μεταβολής του μαγνητικού πεδίου,

$$J = \frac{c}{4\pi} \frac{B}{\ell}.$$

Επομένως η θέρμανση Joule είναι,

$$\frac{J^2}{\sigma_E} = \frac{c^2}{4\pi\sigma_E} \frac{B^2}{4\pi\ell^2} = \frac{\eta}{\ell^2} \frac{B^2}{4\pi}, \quad \eta = \frac{c^2}{4\pi\sigma_E} \left\{ \begin{array}{l} \text{συντελεστής} \\ \text{διάχυσης} \end{array} \right\}.$$

Επειδή όμως, όπως έχουμε δείξει ότι η ηλεκτρική αγωγιμότητα και ο αντίστοιχος συντελεστής διάχυσης δίδονται από τις εκφράσεις,

$$\sigma_E \simeq 10^7 T^{3/2}, \quad \eta = 10^{13} T^{-3/2},$$

ο χαρακτηριστικός χρόνος θέρμανσης υπολογίζεται ότι είναι,

$$\tau = \frac{E/V}{\eta \frac{B^2}{4\pi}} \ell^2.$$

Έστω ότι στο πλάσμα έχουμε θερμοκρασία της τάξεως των εκατομμυρίων βαθμών, όπως στο Ηλιακό Στέμμα,  $T \sim 10^6 \text{ }^\circ K$  οπότε ο συντελεστής διάχυσης είναι  $\eta \simeq 10^3$ . Για ένα τυπικό μαγνητικό πεδίο μερικών εκατοντάδων Gauss,  $B \simeq 100 \text{ Gauss}$  έχουμε,

$$\tau = \frac{(E/V)}{10^3 \cdot 10^3} \ell^2.$$

Επειδή σε ένα αέριο N ατόμων θερμοκρασίας T η συνολική του ενέργεια είναι  $E = NkT$ , ή,  $\frac{E}{V} = nkT$ , όπου n είναι η πυκνότητα, στο ηλιακό στέμμα έχουμε:  $\frac{E}{V} \sim nkT \sim 14 \text{ ergs/cm}^3$

$$\Rightarrow \tau = \frac{14}{10^6} \ell^2 \simeq 10^{-5} \ell^2.$$

Αυτή είναι μια σχέση μεταξύ του χαρακτηριστικού χρόνου  $\tau$  και του χαρακτηριστικού μήκους  $\ell$ .

Απο το άλλο μέρος, οι ενεργειακές απώλειες, κυρίως με ακτίνες  $X$ ,  $UV$ , του ηλιακού στέμματος παρατηρείται ότι είναι,

$$F \simeq 10^7 \text{ erg/cm}^2 \text{ sec}.$$

Επειδή όμως,

$$F \simeq \frac{E \Lambda}{V \tau},$$

όπου  $\Lambda \simeq 10^{10} \text{ cm}$  είναι το ύψος της βαθμίδος της ατμόσφαιρας, μπορούμε να υπολογίσουμε το χαρακτηριστικό χρόνο θέρμανσης του ηλιακού στέμματος,

$$\tau \simeq \frac{E/V\Lambda}{F} \simeq \frac{10 \cdot 10^{10}}{10^7} \sim 10^4 \text{ secs} \simeq 2 \text{ ώρες}.$$

Ετσι,

$$\ell = \sqrt{10^5 \tau} \simeq 10^5 \text{ cm} \simeq 1 \text{ km}.$$

δηλ., η θέρμανση γίνεται μέσα από πολύ λεπτά φύλλα ρεύματος. Μέσα στα πολύ λεπτά αυτά φύλλα ρεύματος, η πυκνότητα του ηλεκτρικού ρεύματος είναι αρκετά υψηλή έτσι ώστε παρά τη μεγάλη τιμή της ηλεκτρικής αγωγιμότητας, το πηλίκο  $J^2/\sigma_E$  να είναι τελικά σημαντικό, δηλ., να έχουμε θέρμανση του πλάσματος. Αξίζει να σημειωθεί ότι η σημερινή διακριτική ικανότητα παρατήρησης στο ηλιακό Στέμμα είναι περί τα 100 km. Τα λεπτά αυτά φύλλα ρεύματος αντιστοιχούν σε αλλαγή της πολικότητας του μαγνητικού πεδίου στην κλίμακα  $\ell$ , εντός της οποίας τα αντίθετα μαγνητικά πεδία επανασυνδέονται, όπως συζητάμε στη συνέχεια.

## 4.27 Μαγνητική Επανασύνδεση

Ο συντελεστής διάχυσης του μαγνητικού πεδίου  $\eta$  είναι πολύ μικρός σε αστροφυσικά πλάσματα. Όμως στην εξίσωση της επαγωγής,

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times (\vec{V} \times \vec{B}) + \eta \nabla^2 \vec{B}.$$

ο συντελεστής διάχυσης πολλαπλασιάζεται με τον παράγοντα  $\nabla^2 \vec{B}$ . Ακόμη και όταν η τομή του συντελεστή διάχυσης του μαγνητικού πεδίου  $\eta$  είναι μικρή, ο όρος  $\eta \nabla^2 \vec{B}$  μπορεί να είναι σημαντικός σε ένα στρώμα του πλάσματος όπου υπάρχει μεγάλη μεταβολή του μαγνητικού πεδίου. Επειδή μεγάλες χωρικές μεταβολές του μαγνητικού πεδίου συνοδεύονται από μεγάλες πυκνότητες ρεύματος, οι περιοχές αυτές ονομάζονται φύλλα ρεύματος. Σε πλάσμα μεγάλης αγωγιμότητας μέσα σε αυτά τα φύλλα ρεύματος μπορεί να κοπούν και να επανασυνδεθούν μαγνητικές γραμμές, αν και το μαγνητικό πεδίο μπορεί να θεωρηθεί παγωμένο στο πλάσμα έξω από τα ρευματικά αυτά φύλλα, έτσι ώστε η μαγνητική τοπολογία παραμένει αναλλοίωτη σε όλο το πλάσμα, με την εξαίρεση των περιοχών όπου υπάρχουν τα φύλλα ρεύματος.

Έστω ότι έχουμε ένα τυπικό φύλλο ρεύματος με τα μαγνητικά πεδία να έχουν αντίθετες διευθύνσεις εκατέρωθεν αυτού. Η μεγάλη τιμή του  $\nabla^2 \vec{B}$  στο ρευματικό φύλλο έχει σαν αποτέλεσμα να καταστρέφεται μαγνητική ροή στην κεντρική περιοχή του. Επειδή το μαγνητικό πεδίο ασκεί πίεση  $B^2/8\pi$ , καταστροφή του πεδίου συνεπάγεται μείωση της μαγνητικής πίεσης στην κεντρική αυτή περιοχή. Εάν το  $\beta$  του πλάσματος είναι της τάξεως της μονάδας ή μικρότερο, τότε η καταστροφή του  $\vec{B}$  στο ρευματικό φύλλο συνεπάγεται ελάττωση της ολικής πίεσης με αποτέλεσμα πλάσμα από τις περιοχές εκατέρωθεν του φύλλου να προσροφάται στην κεντρική περιοχή. Όμως και αυτή η νέα μαγνητική ροή που καταφθάνει στην κεντρική περιοχή καταστρέφεται καθώς εξουδετερώνεται από νέα μαγνητική ροή που προσροφάται από την άλλη πλευρά του ρευματικού φύλλου. Αυτή ακριβώς η αυτοτροφοδοτούμενη διαδικασία ονομάζεται *μαγνητική επανασύνδεση* και συνεχίζεται όσο νέα μαγνητική ροή αναπληρώνει αυτήν που καταστρέφεται.

Η πρώτη μελέτη του φαινομένου της μαγνητικής επανασύνδεσης έγινε από τους Parker (1957) και Petschek (1958). Επειδή η μαθηματική ανάλυση του φαινομένου αυτού είναι αρκετά περίπλοκη, ο Parker αντικατέστησε τις διαφορικές εξισώσεις με προσεγγιστικές αλγεβρικές εξισώσεις και έτσι μπόρεσε να δώσει ένα προσεγγιστικό αλλά απλό υπολογισμό του ρυθμού με τον οποίο διαδραματίζεται η επανασύνδεση. Αυτή την ανάλυση συζητάμε στα επόμενα.

Έστω  $L$  το μήκος της κεντρικής περιοχής κατά μήκος της οποίας τα αντίθετα μαγνητικά πεδία ανταιρούνται, προσερχόμενα με ταχύτητα  $v_i$ . Από το άλλο μέρος έστω  $l$  το μικρό πάχος του ρευματικού φύλλου από το οποίο μετά την επανασύνδεση των μαγνητικών γραμμών το πλάσμα υπό την επήρεια της μαγνητικής τάσης των δύο επανασυνδεδεμένων μαγνητικών γραμμών εκτοξεύεται με ταχύτητα  $v_0$ . Τότε, η εξίσωση της συνέχειας μπορεί προσεγγιστικά να αναπληρωθεί από τη σχέση,

$$v_i L \approx v_0 l.$$

Η εκτόξευση του πλάσματος από το λεπτό πάχος του ρευματικού φύλλου οφείλεται στη μαγνητική τάση. Γι αυτό μπορούμε να αντικαταστήσουμε την εξίσωση κίνησης με την έκφραση ότι η κινητική ενέργεια του εκτοξευομένου πλάσματος ισούται με την μαγνητική ενέργεια του καταστρεφόμενου μαγνητικού πεδίου.

$$\frac{\rho v_0^2}{2} = \frac{B^2}{8\pi} \implies v_0 \approx v_A = \frac{B}{\sqrt{4\pi\rho}}.$$

Τέλος, πρέπει να λάβουμε υπόψη την χρονοανεξάρτητη μορφή της εξίσωσης της επαγωγής,

$$\vec{\nabla} \times (\vec{V} \times \vec{B}) + \eta \nabla^2 \vec{B} = 0.$$

Ο όρος της διάχυσης είναι τάξεως μεγέθους  $\eta B/\ell^2$  ενώ ο όρος που παρέχει τη νέα μαγνητική ροή είναι τάξεως μεγέθους  $v_i B/\ell$ ,

$$\frac{\eta B}{\ell^2} \approx \frac{v_i B}{\ell} \implies \ell \approx \frac{\eta}{v_i}.$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση της συνέχειας έχουμε για την ταχύτητα εισροής,

$$v_i \approx v_0 \frac{\ell}{L} \approx v_A \frac{\eta}{v_i} \frac{1}{L} \implies v_i^2 \approx \frac{v_A^2}{\frac{v_A L}{\eta}} = \frac{v_A^2}{R_m},$$

συναρτήσει του μαγνητικού αριθμού Reynolds. Τελικά,

$$v_i \approx \frac{v_A}{\sqrt{R_m}}.$$

Έχουμε ήδη δει ότι ο μαγνητικός αριθμός Reynolds είναι αριθμητικά ένας πολύ μεγάλος αριθμός. Επομένως προκύπτει το συμπέρασμα ότι η ταχύτητα με την οποία προχωρεί το φαινόμενο της μαγνητικής επανασύνδεσης,  $v_i$ , είναι ένα πολύ μικρό ποσοστό της ταχύτητας Alfvén.

Ωστόσο, στον Ήλιο παρατηρούνται εκλάμψεις κατά τις οποίες τεράστια ποσά ενέργειας,  $10^{32}$  ergs απελευθερώνονται στα πολύ μικρά σχετικά χρονικά διαστήματα των λίγων λεπτών. Επειδή αναμένουμε το φαινόμενο της μαγνητικής επανασύνδεσης σε λεπτά ρευματικά φύλλα να τροφοδοτεί τις ηλιακές αυτές εκλάμψεις, πρέπει με κάποιο τρόπο να εξηγηθεί πως αυτό συμβαίνει με ταχύτερους ρυθμούς, δηλ. με ταχύτητα που είναι συγκρίσιμη με την ταχύτητα Alfvén. Ο μηχανισμός Sweet-Parker που σχιagramήσαμε προηγουμένως φαίνεται να μην επαρκεί να εξηγήσει το φαινόμενο αυτό των ηλιακών εκρήξεων. Γι αυτό έχουν γίνει προσπάθειες να δοθούν ταχύτερες ταχύτητες της διαδικασίας μαγνητικής επανασύνδεσης. Ένα τέτοιο μοντέλο εδόθη από τον Petschek (1964) και προβλέπει ότι η τελική ταχύτητα είναι,

$$v_i \approx \frac{v_A}{\log R_m}.$$

και ονομάζεται ο ρυθμός Petschek μαγνητικής επανασύνδεσης. Προφανώς ο ρυθμός αυτός είναι πολύ μεγαλύτερος αυτού του μηχανισμού Sweet-Parker.

Ο δύσκολος υπολογισμός του ρυθμού της μαγνητικής επανασύνδεσης εξαρτάται ευαίσθητα από πολλούς παράγοντες, όπως οι οριακές συνθήκες μακριά από το ρευματικό φύλλο, το θρυμματισμό του ρευματικού φύλλου σε μικρότερα με τον μηχανισμό της αστάθειας tearing mode, κλπ.

## 4.28 Μερικά ηλιακά μαγνητικά φαινόμενα

Διάφορα ηλιακά μαγνητικά φαινόμενα μπορούν να μελετηθούν αρκετά καλά χρησιμοποιώντας τις προηγούμενες εξισώσεις της Μαγνητουδροδυναμικής. Τέτοια φαινόμενα είναι, η περιγραφή και κατανόηση των Ηλιακών Προεξοχών, η παραγωγή του Ηλιακού μαγνητικού πεδίου σε ένα 11ετή επαναλαμβανόμενο κύκλο με το μηχανισμό του δυναμό, καθώς επίσης και η περιγραφή και κατανόηση των Ηλιακών Κηλίδων στις οποίες έχουμε αναστολή της μεταφοράς της θερμότητας λόγω του ισχυρού μαγνητικού πεδίου  $\vec{B}$ , με επακόλουθη ψύξη του εσωτερικού του σωλήνα μαγνητικής ροής, με αποτέλεσμα εν συνεχεία η βαρύτητα να αδειάζει το εσωτερικό του και να αυξάνει το μέγεθος του μαγνητικού πεδίου στις παρατηρούμενες τιμές  $\vec{B} \simeq 3000$  Gauss. Επίσης, χρησιμοποιώντας ΜΥΔ μπορούμε να έχουμε μία περιγραφή και κατανόηση των Ηλιακών



Εκλάμψεων, στις οποίες έχουμε μετατροπή της μαγνητικής ενέργειας σε κινητική του πλάσματος, το οποίο έτσι διαφεύγει με την ταχύτητα Alfvén  $V_A$ ,

$$\frac{B^2}{8\pi} = \frac{1}{2}\rho V^2 \Rightarrow V^2 = V_A^2 = \frac{B^2}{4\pi\rho}.$$

Στα επόμενα, ας δούμε μερικά στοιχεία για τη χρήση της ΜΥΔ στην κατανόηση των Ηλιακών Προεξοχών, ενώ μιά λεπτομερή περιγραφή και κατανόηση του Ηλιακού Ανέμου, θα συζητήσουμε στο επόμενο Κεφάλαιο.

#### 4.28.1 Η περιγραφή και κατανόηση των Ηλιακών Προεξοχών.

Οι ηλιακές προεξοχές είναι «κουρτίνες» ψυχρού και πυκνού πλάσματος που αιωρούνται μέσα στο θερμότερο και αραιότερο ηλιακό στέμμα. Τα μοντέλα των προεξοχών αποσκοπούν στο να περιγράψουν τις φυσικές συνθήκες εντός και στην άμεση γειτονία τους καθώς και τις φυσικές συνθήκες που οδηγούν στο σχηματισμό και διατήρησή τους, αλλά και την τελική διάλυσή τους.

Στο πλάσμα εντός των προεξοχών ασκούνται τρεις δυνάμεις :

(1) η δύναμη Lorentz  $\vec{J} \times \vec{B}/c$ ,

(2) η δύναμη βαρύτητας  $-\rho g \hat{z}$ , όπου  $\rho(\vec{r})$  είναι η πυκνότητα του πλάσματος,  $g$  η επιτάχυνση της βαρύτητας και  $\hat{z}$  η προς τα έξω κάθετος στην ηλιακή επιφάνεια και

(3) η δύναμη που οφείλεται στην βαθμίδα της πίεσης του πλάσματος,  $P(\vec{r})$ .

Σε κατάσταση ισορροπίας αυτές οι τρεις δυνάμεις εξισορροπούνται,

$$-\nabla P - \rho g \hat{z} + (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B}/4\pi = 0,$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το νόμο του Ampere,  $\vec{\nabla} \times \vec{B} = 4\pi\vec{J}/c$ . Η πίεση, πυκνότητα και θερμοκρασία του πλάσματος συνδέονται με την καταστατική εξίσωση

$$P = \frac{k\rho T}{\bar{m}},$$

όπου  $T(\vec{r})$  είναι η θερμοκρασία,  $k$  η σταθερά του Boltzmann και  $\bar{m}$  η μέση μάζα των σωματιδίων, με τιμές μεταξύ 0.6 και 1.3 τη μάζα του πρωτονίου, ανάλογα με τη σύσταση και κατάσταση ιονισμού του πλάσματος.

Το πρώτο και απλούστερο μοντέλο ηλιακών προεξοχών παρουσιάστηκε από τους Kippenhahn και Schluter (1957) οι οποίοι σε ένα σύστημα συντεταγμένων  $x - z$ , με τον άξονα- $x$  οριζόντιο και τον άξονα- $z$  κατακόρυφο, θεώρησαν την προεξοχή σαν μια λεπτή κατακόρυφη κουρτίνα μέσα στην οποία η πίεση  $P(x)$ , η πυκνότητα  $\rho(x)$  και η κατακόρυφη συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου  $B_z(x)$  εξαρτώνται μόνο από την οριζόντια συντεταγμένη  $x$  κάθετα στο επίπεδο της προεξοχής. Η θερμοκρασία  $T$  και η οριζόντια συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου  $B_x$  θεωρούνται σταθερές,  $T_o$  και  $B_o$ , αντίστοιχα.

Με αυτές τις υποθέσεις, η εξίσωση ισορροπίας στην οριζόντια διεύθυνση- $\hat{x}$  δίνει :

$$\frac{d}{dx} \left( P + \frac{B_z^2}{8\pi} \right) = 0 \Rightarrow P + \frac{B_z^2}{8\pi} = \frac{B_{z\infty}^2}{8\pi},$$

θεωρώντας ως οριακές συνθήκες σε μεγάλες οριζόντιες αποστάσεις από την προεξοχή ότι  $P(x \rightarrow \pm\infty) \rightarrow 0$ , και  $B_z(x \rightarrow \pm\infty) \rightarrow \pm B_{z\infty}$ .

Η εξίσωση ισορροπίας στην κατακόρυφη διεύθυνση- $\hat{z}$  δίνει :

$$-\rho g + \frac{B_x}{4\pi} \frac{dB_z}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{B_{z\infty}^2 - B_z^2}{2\Lambda} = B_0 \frac{dB_z}{dx},$$

συναρτήσει της βαθμίδας του ύψους  $\Lambda$ , που εκφράζει πόσο γρήγορα ελαττώνονται η πίεση και η πυκνότητα με το ύψος κατά μήκος των μαγνητικών γραμμών,  $\Lambda = kT_0/\bar{m}g$  (εντός των προεξοχών  $\Lambda \approx 200 \text{ km}$ ). Στην τελευταία εξίσωση ισορροπίας στην κατακόρυφη διεύθυνση- $\hat{z}$ , αντικαθιστήσαμε την πυκνότητα συναρτήσει της πίεσης από την καταστατική εξίσωση και εν συνεχεία την πίεση συναρτήσει του  $B_z(x)$  από την εξίσωση ισορροπίας στην οριζόντια διεύθυνση  $\hat{x}$ . Τελικά, παίρνουμε ως λύση της προκύπτουσας διαφορικής για το  $B_z(x)$ :

$$B_z(x) = B_{z\infty} \tanh \frac{B_{z\infty}}{B_0} \frac{x}{2\Lambda}, \quad P(x) = \frac{B_{z\infty}^2}{8\pi} \operatorname{sech}^2 \frac{B_{z\infty}}{B_0} \frac{x}{2\Lambda}.$$

Σε αυτή τη λύση αξίζει να παρατηρήσουμε τα εξής.

Πρώτον, η πίεση του πλάσματος στο κέντρο της προεξοχής είναι ίση με την μαγνητική πίεση του κατακόρυφου μαγνητικού πεδίου σε μεγάλες οριζόντιες αποστάσεις.

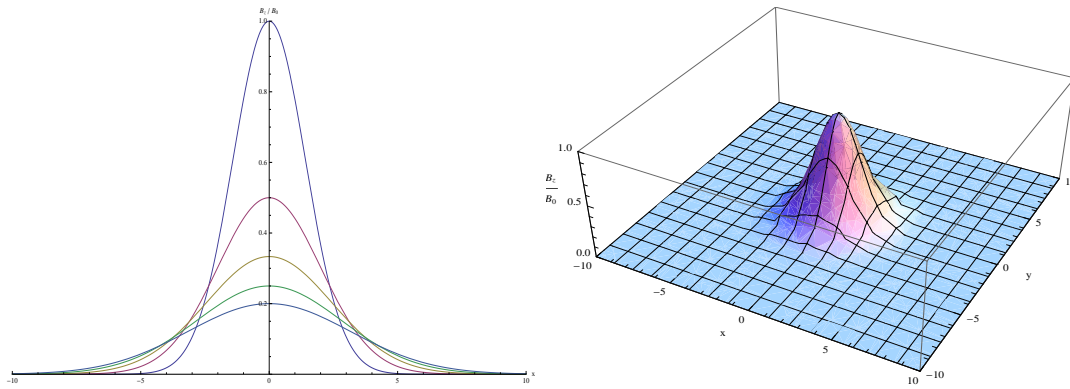
Δεύτερον, το εύρος της προεξοχής είναι ίσο με  $\Delta x \approx 4\Lambda(B_0/B_{z\infty})$ .

Τρίτον, με παρατηρησιακό δεδομένο ότι το παρατηρούμενο εύρος των προεξοχών είναι  $\Delta x \approx 8000 \text{ km}$ , και ότι  $\Lambda \approx 200 \text{ km}$ , πρέπει να έχουμε  $B_{z\infty} \approx 0.1B_0$ . Δηλ., η μαγνητική στήριξη των προεξοχών απαιτεί μόνο μια μικρή διαταραχή ( $B_z$ ) στο εξωτερικό μαγνητικό πεδίο ( $B_0$ ).

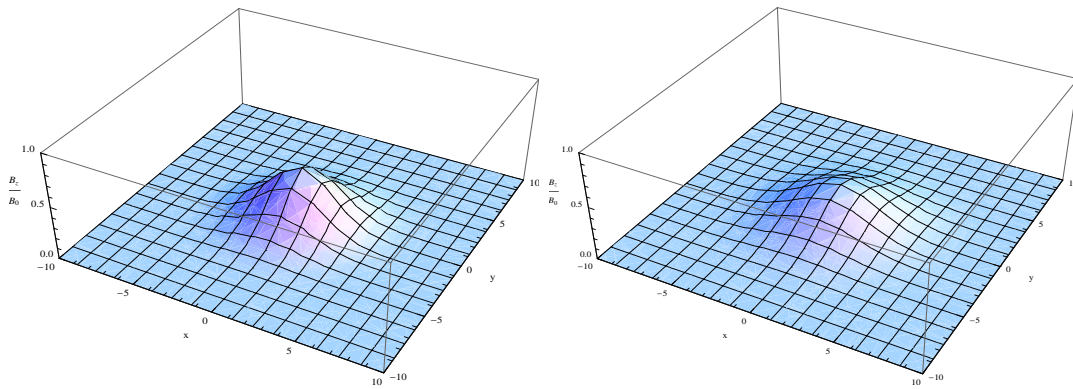
Γενικότερα πάντως, υπάρχει και μια τρίτη συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου κατά μήκος της προεξοχής ( $B_y$ ).

## 4.29 Πρόβλημα 6

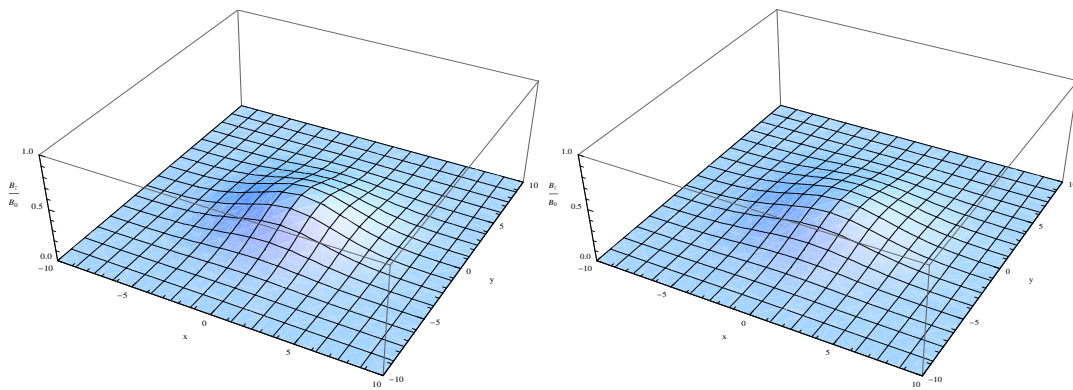
Βρείτε τις εκφράσεις του μαγνητικού πεδίου και της πίεσης σε ένα παρόμοιο μοντέλο μιας προεξοχής όπου η θερμοκρασία είναι μιá δεδομένη συνάρτηση της απόστασης,  $T = T(x)$ . (Δείτε τη δημοσίευση Milne, A. M.; Priest, E. R.; Roberts, B., *Astrophysical Journal*, vol. 232, 1979, p.304-317).



Σχ. 4.8α Αριστερά: διάχυση των μαγνητικών γραμμών στο πλάσμα του Προβλήματος 4 σε διαδοχικά χρονικά διαστήματα. Δεξιά: αρχική ( $t_0$ ) κατανομή της έντασης του μαγνητικού πεδίου στο πλάσμα.



Σχ. 4.8β Κατανομή της έντασης του μαγνητικού πεδίου στο πλάσμα του Προβλήματος 4 τη χρονική στιγμή  $t_0 + \delta t$  και  $t_0 + 2\delta t$ .



Σχ. 4.8γ Κατανομή της έντασης του μαγνητικού πεδίου στο πλάσμα του Προβλήματος 4 τη χρονική στιγμή  $t_0 + 3\delta t$  και  $t_0 + 4\delta t$ .