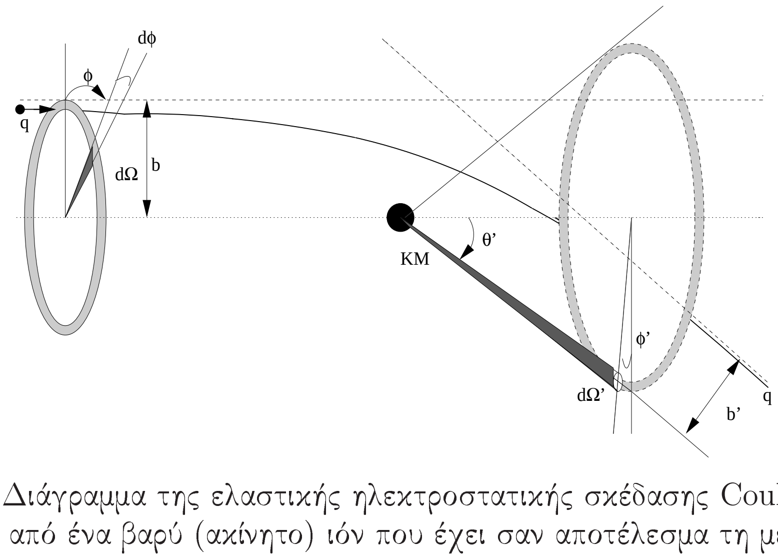
ΦΥΣΙΚΗ ΠΛΑΣΜΑΤΟΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Κινητική Θεωρία

3.1 Εισαγωγή



Σχ. 3.1 Διάγραμμα της ελαστικής ηλεκτροστατικής σκέδασης Coulomb ενός ηλεκτρονίου από ένα βαρύ (ακίνητο) ιόν που έχει σαν αποτέλεσμα τη μεταβολή του διανύσματος της ταχύτητας και ορμής του ηλεκτρονίου.

Η θεωρία του οδηγού κέντρου που σκιαγραφήθηκε στο προηγούμενο Κεφάλαιο, μας έδωσε μια ενδεικτική εικόνα για το πως συμπεριφέρονται φορτισμένα σωματίδια μέσα σε σχετικά απλά εξωτερικά ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία. Το πραγματικό πρόβλημα όμως είναι αρκετά πιο δύσκολο. Κατ΄ αρχήν, τα πεδία αυτά είναι συνήθως πιο περίπλοκης γεωμετρίας και εξαρτώνται από το χρόνο. Δεύτερον, το πρόβλημα της αλληλεπίδρασης φορτισμένων σωματιδίων και των αντίστοιχων ηλεκτρικών και μαγνητικών πεδίων, πρέπει να λυθεί αυτοσυνεπώς. Δηλαδή, πρέπει να υπολογισθούν οι τροχιές των φορτισμένων σωματιδίων και των ηλεκτρομαγνητικών πεδίων, έτσι ώστε αυτά τα πεδία να επιφέρουν αυτές ακριβώς τις κινήσεις και από το άλλο μέρος οι κινήσεις αυτές των φορτίων πρέπει να δημιουργούν αυτά ακριβώς τα πεδία. Κάτι που δυσκολεύει ακόμα τα πράγματα είναι ότι η αλληλεπίδραση αυτή φορτίων — πεδίων είναι μη γραμμική. Τρίτον, όπως έχουμε ήδη δει, οι πυκνότητες του πλάσματος μπορεί να είναι $n \geq 10^{10}\, cm^{-3}$ και επομένως έχουμε ένα πολύ μεγάλο αριθμό σωματιδίων για να μελετήσουμε την κίνησή τους. Για όλους αυτούς τους λόγους, κρίνεται σκόπιμο να υιοθετήσουμε και μια άλλη στρατηγική για τη μελέτη του πλάσματος. Σ' αυτό το Κεφάλαιο λοιπόν θα δούμε πώς μπορούμε να μελετήσουμε τη φυσική του πλάσματος θεωρώντας το σαν ένα μαγνητισμένο ρευστό.

3.2 Η συνάρτηση κατανομής

Στον 6-διάστατο χώρο των φάσεων $(\vec{r}, \vec{v}) = (x, y, z, v_x, v_y, v_z)$, η κίνηση κάθε φορτίου αντιστοιχεί σε μια *τροχιά*

$$[x(t), y(t), z(t), v_x(t), v_y(t), v_z(t)] = [\vec{r}(t), \vec{v}(t)]\,.$$

Για *κάθε* είδος φορτισμένου σωματιδίου υπάρχει μια συνάρτηση, η λεγόμενη *συνάρτηση κατανομής*, $f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)$, $a = e, i$, που δίνει την *πυκνότητα* των φορτισμένων σωματιδίων στον 6-διάστατο φασικό χώρο, έτσι ώστε ο αριθμός αυτών dN στη μοναδιαία κυψελίδα του φασικού χώρου $d\vec{r}d\vec{v}$ να είναι ανά πάσα χρονική στιγμή t :

$$dN = f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{r} d\vec{v}\,,$$

όπου $d\vec{r} = dxdydz$ και $d\vec{v} = dv_x dv_y dv_z$. Ο αριθμός των σωματιδίων $n_\alpha(\vec{r}, t)$ ανά μονάδα όγκου του 3-διάστατου χώρου είναι γιά κάθε είδος α,

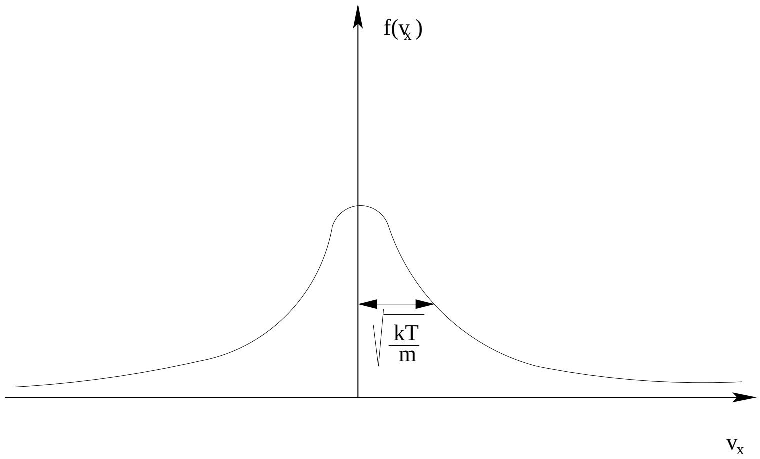
$$n_\alpha(\vec{r}, t) = \int\int\int_{-\infty}^{+\infty} f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) dv_x dv_y dv_z\,.$$

3.2.1 Παράδειγμα

Η κατανομή ταχυτήτων Maxwell - Boltzman (1860) είναι η κατανομή των ταχυτήτων ενός αερίου όταν το αέριο ευρίσκεται σε θερμοδυναμική ισορροπία,

$$f_0(\vec{r}, \vec{v}) = n(\vec{r}) \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{v^2}{v_\theta^2}\right)\,,$$

όπου T η θερμοκρασία του αερίου και $v_\theta = \sqrt{2kT/m}$ η θερμική ταχύτητα. Η ισότροπη κατανομή ταχυτήτων Maxwell - Boltzman $f_0(\vec{r}, \vec{v})$ μας δίδει τον αριθμό των ατόμων



Σχ. 3.2 Κατανομή Maxwell των ταχυτήτων στη διεύθυνση v_x του φασικού χώρου, $f(v_x)$.

με ταχύτητα μεταξύ $\vec{v}, \vec{v} + d\vec{v}$ ανά μονάδα όγκου $d\vec{r}$.
Εάν το πλάσμα κινείται με μέση ταχύτητα $\vec{V}$, τότε η προηγούμενη κατανομή γράφεται,

$$f_0(\vec{r}, \vec{v}) = n(\vec{r}) \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{(\vec{V} - \vec{v})^2}{v_\theta^2} \right) ,$$

και είναι η μετατοπισμένη κατανομή Maxwell.
Επειδή η κατανομή Maxwell είναι ισότροπη, βολεύει να εισάγουμε την κατανομή $F_0(v)$ αντί της κατανομής $f_0(\vec{v})$ έτσι ώστε η $F_0(v)dv$ να μας δίνει τον αριθμό των ατόμων με μέτρο ταχύτητας μεταξύ $v, v + dv$, ανά μονάδα όγκου $d^3\vec{r}$,

$$F_0(v)dv = f_0(\vec{v})d\vec{v} = f_0 4\pi v^2 dv \, ,$$

και επομένως,

$$F_0(v) = 4\pi n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT} \right) .$$

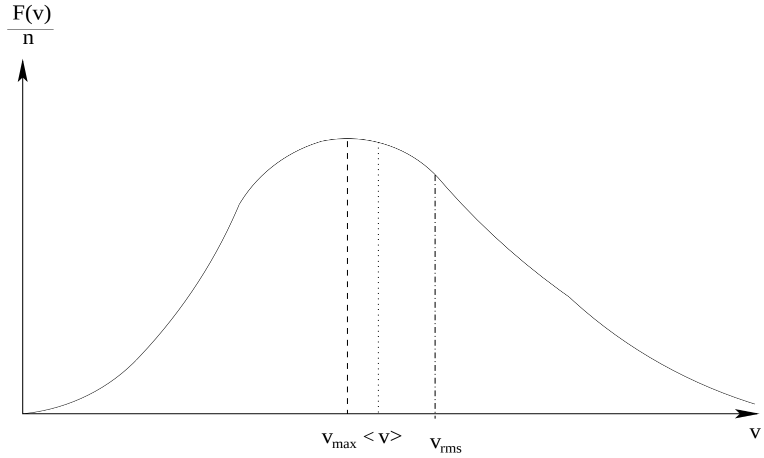
Πρόβλημα 3.1

Δείξτε ότι για την κατανομή Maxwell ισχύουν:

(α) $$< v_x >=< v_y >=< v_z >= 0 \, ,$$

(β) $$< v_x^2 >= \frac{1}{n} \int\int\int_{-\infty}^{+\infty} f_0(\vec{v}) v_x^2 d^3\vec{v} = \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{+\infty} F(v) v_x^2 dv = \frac{kT}{m} =< v_y^2 >=< v_z^2 > ,$$

(γ) $$< v^2 >= 3 < v_x^2 >= 3\frac{kT}{m} \equiv v_{rms}^2 \, ,$$



Σχ. 3.3 Κατανομή Maxwell του μέτρου της ταχύτητας, $F_0(v)$

$$(\delta) \qquad < v >= \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} F_0(v) v dv = \sqrt{\frac{8}{\pi}\frac{kT}{m}}\,,$$

$$(\epsilon) \qquad v_{\max} = v_\theta = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \quad \text{όπου} \quad F_0(v_{\max}) = \max F_0(v)\,.$$

Πρόβλημα 3.2

Σχεδιάστε την κατανομή Maxwell για τα άτομα των ευγενών αερίων He^4, Ne^{20}, Ar^{40}, Xe^{132} στη θερμοκρασία δωματίου $25^o C$ $(298.15^o K)$.

3.3 Οι εξισώσεις μεταφοράς Boltzmann και Vlasov

Επειδή η συνάρτηση κατανομής είναι μιά συνάρτηση 7 μεταβλητών, $f_a = f_a(x, y, z, v_x, v_y, v_z, t)$, η ολική χρονική της παράγωγος είναι,

$$\frac{df_a}{dt} = \frac{\partial f_a}{\partial t} + v_x\frac{\partial f_a}{\partial x} + v_y\frac{\partial f_a}{\partial y} + v_z\frac{\partial f_a}{\partial z} + a_x\frac{\partial f_a}{\partial v_x} + a_y\frac{\partial f_a}{\partial v_y} + a_z\frac{\partial f_a}{\partial z}\,,$$

όπου $\vec{a} = d\vec{v}/dt$ είναι η επιτάχυνση $\vec{F}/m$, ή,

$$\frac{df_a}{dt} = \frac{\partial f_a}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})f_a + \left(\frac{\vec{F}}{m}\cdot\vec{\nabla}_{\vec{v}}\right) f_a\,.$$

Η μεταβολή της συνάρτησης f_a με το χρόνο t μπορεί να οφείλεται σε κρούσεις (π.χ., σκεδάσεις Coulomb), λόγω των οποίων μεταβάλλεται ο αριθμός dN των φορτίων

κάποιου τύπου στη μονάδα του φασικού όγκου.
Επομένως, έχουμε για τη χρονική μεταβολή της συνάρτησης f_a λόγω κρούσεων,

$$\left(\frac{\partial f_a}{\partial t}\right)_{\text{coll.}} = \frac{\partial f_a}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})f_a + \left(\frac{\vec{F}}{m}\cdot\vec{\nabla}_{\vec{v}}\right) f_a\,,$$

που ονομάζεται η κινητική εξίσωση του Boltzmann. Στην περίπτωση απουσίας κρούσεων, η κινητική εξίσωση για τη συνάρτηση κατανομής ονομάζεται εξίσωση του Vlasov (1947):

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})f_a + \left(\frac{\vec{F}}{m}\cdot\vec{\nabla}_{\vec{v}}\right) f_a = 0\,,$$

και πρέπει να λυθεί σε συνδυασμό με τις εξισώσεις του Maxwell και και την έκφραση της δύναμης Lorenz, $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}/c)$.

3.4 Οι εξισώσεις Maxwell–Boltzmann

Οι εξισώσεις Maxwell–Boltzmann είναι το πλήρες σύστημα των εξισώσεων Maxwell που περιγράφει την αλληλεπίδραση των φορτισμένων σωματιδίων με τα ηλεκτρικά ($\vec{E}$) και μαγνητικά ($\vec{B}$) πεδία και της εξίσωσης μεταφοράς Boltzmann που περιγράφει την εξέλιξη της συνάρτησης κατανομής f_α των συνιστωσών του πλάσματος,

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})f_\alpha + \left[\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}\times\vec{B}}{c}\right)\cdot\vec{\nabla}_v\right] f_\alpha = \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}\right)_{coll}\,,$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\,,\quad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\,,$$
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\delta\,,\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0\,,$$

όπου,

$$\delta = \sum_\alpha q_\alpha \int\int\int_{\vec{v}} f_\alpha(\vec{r},\vec{v},t)d\vec{v}\,,$$
$$\vec{J} = \sum_\alpha q_\alpha \int\int\int_{\vec{v}} f_\alpha(\vec{r},\vec{v},t)\vec{v}d\vec{v}\,,$$

με $\alpha = e, i$.
Το σύστημα των εξισώσεων αυτών πρέπει να λυθεί για τα $\vec{E}$, $\vec{B}$ και f_α <u>αυτοσυνεπώς</u>, δηλαδή πρέπει να βρεθούν οι κατανομές f_α που δίνουν τα $(\delta, \vec{J})$ τα οποία εν συνεχεία δίνουν τα $(\vec{E}, \vec{B})$ που καθορίζουν και την κίνηση των φορτίων.

3.5 Η πλήρης εξίσωση Boltzmann

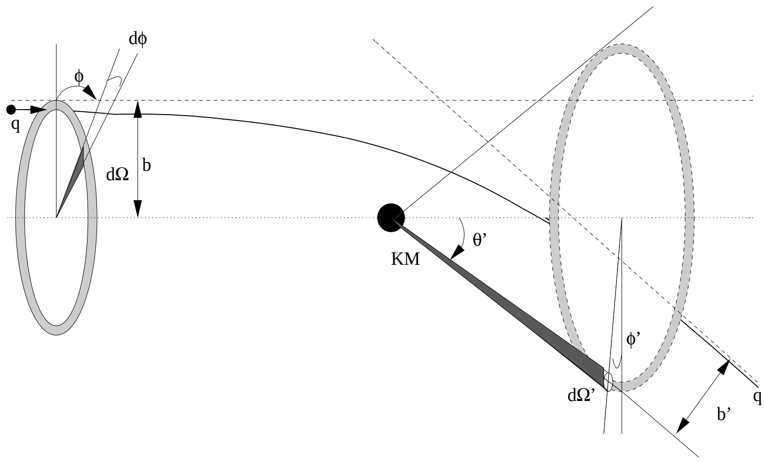
Σε αυτή την παράγραφο θα υπολογίσουμε τη μεταβολή της συνάρτησης κατανομής $(\partial f_\alpha/\partial t)_{coll}$ λόγω σκεδάσεων Coulomb. Αυτές οι σκεδάσεις προκαλούν μεταβολή της συνάρτησης κατανομής $f_\alpha(\vec{r},\vec{v},t)$ για δύο λόγους:

1. Κάποια σωματίδια που αρχικά έχουν ταχύτητα $\vec{v}$ και συνάρτηση κατανομής $f_\alpha(\vec{r},\vec{v},t)$ μετά τη σκέδαση έχουν διαφορετική ταχύτητα $\vec{v}'$ και επομένως συνάρτηση κατανομής $f_\alpha(\vec{r},\vec{v}',t)$. Αυτό οδηγεί σε ελάττωση της συνάρτησης κατανομής $f_\alpha(\vec{r},\vec{v},t)$.

2. Κάποια σωματίδια που έχουν αρχικά ταχύτητα $\vec{v}'$ και συνάρτηση κατανομής $f_\alpha(\vec{r},\vec{v}',t)$ μετά τη σκέδαση έχουν ταχύτητα $\vec{v}$ και επομένως συνάρτηση κατανομής $f_\alpha(\vec{r},\vec{v},t)$. Αυτό οδηγεί σε αύξηση της συνάρτησης κατανομής $f_\alpha(\vec{r},\vec{v},t)$.

Θεωρούμε τη σκέδαση ενός σωματιδίου με ταχύτητα $\vec{v}_1$ (ηλεκτρόνιο) από ένα σωματίδιο ταχύτητας $\vec{v}_2$ (πρωτόνιο). Μεταφερόμενοι στο σύστημα του Κ.Μ, μπορούμε να θεωρήσουμε τη σκέδαση του σωματιδίου μάζας $m_1 m_2/m_1+m_2$ από ένα σταθερό σκεδαστικό κέντρο (Κ.Μ).

Έστω $\vec{q}=\vec{v}_1-\vec{v}_2$ και $\vec{q}^{\,'}=\vec{v}_1^{\,'}-\vec{v}_2^{\,'}$ οι σχετικές ταχύτητες των σωματιδίων πριν και μετά τη σκέδαση. Τότε $d\Omega'=\sin\theta' d\phi'$ και :



Σχ. 3.4 Διάγραμμα της ελαστικής ηλεκτροστατικής σκέδασης Coulomb ενός ηλεκτρονίου από ένα βαρύ (ακίνητο) ιόν που έχει σαν αποτέλεσμα τη μεταβολή του διανύσματος της ταχύτητας και ορμής του ηλεκτρονίου.

- Από τη διατήρηση ορμής και ενέργειας έχουμε: $|\vec{q}|=|\vec{q}^{\,'}|$, υποθέτοντας ελαστική σκέδαση.
- Από τη διατήρηση στροφορμής έχουμε: $b=b'$
- Ο αριθμός σωματιδίων (1) που περνούν από τη στοιχειώδη επιφάνεια $b\,db\,d\phi$ ανά sec είναι: $f(1)\,b\,db\,d\phi|\vec{q}|d\vec{v}_1$
- Η πυκνότητα των σκεδαστών είναι: $f(2)d\vec{v}_2$
- Ο αριθμός των συγκρούσεων ανά μονάδα όγκου και χρόνου είναι:

$$\{f(1)\;b\,db\,d\phi|\vec{q}|d\vec{v}_1\}\{f(2)\;d\vec{v}_2\}=f(1)\;f(2)|\vec{q}|b\,db\,d\phi\,d\vec{v}_1 d\vec{v}_2$$

- Ο συνολικός αριθμός των συγκρούσεων όπου σωματίδια (1) σκεδάζονται <u>έξω</u> από το στοιχείο όγκου $d\vec{v}_1$ στο χώρο των ταχυτήτων, ανά μονάδα χρόνου είναι:

$$d\vec{v}_1\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^{\text{out}}_{coll}=\int\limits_b\int\limits_\phi\int\limits_{\vec{v}_2}f(1)f(2)|\vec{v}_1-\vec{v}_2|b\,db\,d\phi d\vec{v}_2 d\vec{v}_1$$

από σκεδάσεις του τύπου $(\vec{v}_1,\vec{v}_2)\rightarrow(\vec{v}^{\prime}_1,\vec{v}^{\prime}_2)$.

Αντίστοιχα, έχουμε για τον αριθμό των συγκρούσεων όπου σωματίδια (1) σκεδάζονται <u>μέσα</u> στο στοιχείο όγκου $d\vec{v}_1$ στο χώρο των ταχυτήτων (ανά μονάδα χρόνου), μετά από σκεδάσεις του τύπου:

$$(\vec{v}^{\prime}_1,\vec{v}^{\prime}_2)\rightarrow(\vec{v}_1,\vec{v}_2)$$

αντιστρέφοντας τους ρόλους των (1) και (2), δηλαδή τα σωματίδια να ξεκινούν με ταχύτητες $\vec{v}^{\prime}_1,\vec{v}^{\prime}_2$ και να τερματίζουν με $(\vec{v}_1,\vec{v}_2)$:

$$f(1')f(2')|\vec{v}^{\prime}_1-\vec{v}^{\prime}_2|b'db'd\phi'd\vec{v}^{\prime}_1 d\vec{v}^{\prime}_2$$

Έτσι, ο συνολικός ρυθμός των συγκρούσεων όπου σωματίδια τύπου (1) σκεδάζονται <u>μέσα</u> στο στοιχείο όγκου $d\vec{v}_1$ είναι,

$$d\vec{v}^{\prime}_1\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^{\text{in}}_{coll}=\int\limits_{b'}\int\limits_\phi\int\limits_{\vec{v}^{\prime}_2}f(1')f(2')|\vec{v}^{\prime}_1-\vec{v}^{\prime}_2|b'db'd\phi'd\vec{v}^{\prime}_1 d\vec{v}^{\prime}_2\,.$$

Επειδή $b=b'$, $|\vec{v}^{\prime}_1-\vec{v}^{\prime}_2|=|\vec{v}_1-\vec{v}_2|$, $d\vec{v}^{\prime}_1 d\vec{v}^{\prime}_2=J\frac{(\vec{v}_1,\vec{v}_2)}{\vec{v}^{\prime}_1,\vec{v}^{\prime}_2}d\vec{v}_1 d\vec{v}_2$, η συνολική μεταβολή της πυκνότητας λόγω συγκρούσεων ανά sec είναι:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll}=\int\limits_b\int\limits_\phi\int\limits_{\vec{v}_2}[f(1')f(2')-f(1)f(2)]b\,db\,d\phi d\vec{v}_2|\vec{v}_1-\vec{v}_2|\,,$$

και αν $b\,db\,d\phi=\sigma(\vec{v}_1,\vec{v}_2|\vec{v}^{\prime}_1,\vec{v}^{\prime}_2)d\Omega$ προκύπτει τελικά για τον όρο των κρούσεων:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll}=\int\limits_b\int\limits_\phi\int\limits_{\vec{v}_2}[f(1')f(2')-f(1)f(2)]|\vec{v}_1-\vec{v}_2|\sigma(\vec{v}_1,\vec{v}_2|\vec{v}^{\prime}_1,\vec{v}^{\prime}_2)d\Omega d\vec{v}_2\,.$$

Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του επόμενου προβλήματος έχουμε,

$$\sigma=-\frac{b\,db\,d\phi}{d\Omega}=-\frac{b\,db\,d\phi}{\sin\theta d\theta d\phi}=\frac{b_0^2}{4\sin^4\theta/2}=\sigma(|\vec{v}_1-\vec{v}_2|,\theta)\,.$$

Συνεπώς, η εξίσωση του Boltzmann γίνεται:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})f+\left(\frac{\vec{F}}{m}\cdot\nabla_{\vec{v}}\right)f=\int\left[f(\vec{v}^{\prime}_1)f(\vec{v}^{\prime}_2)-f(\vec{v}_1)f(\vec{v}_2)\right]|\vec{v}_1-\vec{v}_2|\sigma(|\vec{v}_1-\vec{v}_2|,\theta)d\Omega d\vec{v}_2\,.$$

Σημειώνουμε τις βασικές υποθέσεις για την ισχύ της εξίσωσης αυτής :

- Η κλίμακα της αλληλεπίδρασης είναι πολύ μικρότερη της κλίμακας μέσα στην οποία μεταβάλλεται η f.
- Η διάρκεια της αλληλεπίδρασης είναι πολύ μικρότερη της χρονικής κλίμακας μέσα στην οποία μεταβάλλεται η f.
- Όλες οι αλληλεπιδράσεις είναι συζυγείς.
- Τα συγκρουόμενα σωματίδια δεν συσχετίζονται.

3.5.1 Πρόβλημα 3.3

Για σκεδάσεις Coulomb ($\vec{F} = (e_1 e_2/r^2)\hat{r}$) που ως γνωστόν διατηρούν ορμή, στροφορμή και ενέργεια, δείξτε ότι:

$$b = b_0 \cot\frac{\theta}{2}\ , \quad b_0 = \frac{e_1 e_2 (m_1 + m_2)}{m_1 m_2 |\vec{v}_1 - \vec{v}_2|^2}\ ,$$

όπου b_0 είναι η παράμετρος σκέδασης για σκεδάσεις $\pi/2$ (δείτε το πείραμα των Rutherford, Geiger–Marsden - Εισαγωγή στη Θεωρητική Μηχανική, Κ. Τσίγκανος).

3.6 Το Θεώρημα-H του Boltzmann (1872) και η αύξηση της εντροπίας.

Η καθημερινή εμπειρία δείχνει ότι όταν ένα ποτήρι πέσει από το τραπέζι και θρυμματιστεί, η περίπτωση να ξανακολλήσουν μεταξύ τους τα θραύσματα και να σηκωθεί το ποτήρι δεν είναι καθόλου αληθινή. Μπορούμε βέβαια να παίξουμε την κινηματογραφική ταινία του γεγονότος αυτού ανάποδα και να συγκολληθούν τα θραύσματα, αλλά στην καθημερινή πραγματικότητα αυτό δεν γίνεται ποτέ ! Σε αυτή τη παράγραφο θα δούμε πως η εξίσωση του Boltzmann <u>ενέχει μή αντιστρεψιμότητα</u>, παρά το ότι οι μικροσκοπικές κινήσεις είναι αντιστρεπτές. Πράγματι, μιά υπόθεση γιά να εξαχθεί το ολοκλήρωμα των σκεδάσεων του Boltzmann ήταν ότι οι μικροσκοπικές διαδικασίες είναι αντιστρεπτές. Ωστόσο, η ίδια εξίσωση του Boltzmann θα δείξουμε ότι οδηγεί σε μή αντιστρεπτές διαδικασίες. Αρα, από την εξίσωση αυτή θα πρέπει κάπως να οδηγείται κανείς σε μή-αντιστρεψιμότητα.
Παρά το γεγονός ότι οι αλληλεπιδράσεις Coulomb στο μικροσκοπικό επίπεδο είναι όντως πλήρως αντιστρεπτές, γνωρίζουμε ότι η μακροσκοπική συμπεριφορά συστημάτων δεν είναι αντιστρεπτή, σύμφωνα με τον 2^o νόμο της θερμοδυναμικής. Γιά παράδειγμα, όταν μετά από κάποιο χρόνο και αλληλεπιδράσεις όπως θα δούμε στη συνέχεια, η κατανομή των ταχυτήτων $f(\vec{v})$ ενός συστήματος σωματιδίων γίνεται η κατανομή Maxwell $f_0(\vec{v})$, αυτή είναι μία μή αντιστρεπτή διαδικασία, αφού είναι απίθανο να μετατραπεί η $f_0(\vec{v})$ στην $f(\vec{v})$.
Περιγράφοντας τη μορφή του ολοκληρώματος κρούσεων $(\partial f/\partial t)_{coll}$, ο Boltzmann κατάφερε να αποδείξει δύο από τα πιο ενδιαφέροντα αποτελέσματα της Φυσικής:

1. ότι υπάρχει μή αντιστρεψιμότητα στη μακροσκοπική συμπεριφορά ενός συστήματος και συγκεκριμένα η εντροπία ενός αποκλεισμένου συστήματος δεν ελαττώνεται και

2. ότι η συνάρτηση κατανομής f μετά από $t \to \infty$ γίνεται Maxwellian.

Αξίζει να αποδείξουμε εν συντομία στα επόμενα αυτά τα δύο σημαντικά αποτελέσματα.
1. Θα υποθέσουμε ότι η συνολική δύναμη στα σωματίδια είναι μηδέν, $\underline{\vec{F}=0}$, και ότι η χωρική πυκνότητα είναι σταθερή, $\underline{n = \text{σταθερό}}$.
Άς ορίσουμε καταρχήν τη μακροσκοπική ποσότητα

$$H \equiv < \ln f(\vec{v}_1) > = \int\int\int_{\vec{v}_1} f(\vec{v}_1) \ln f(\vec{v}_1) d\vec{v}_1 \, .$$

Αφού ολοκληρώνομε στο χώρο των ταχυτήτων, η ποσότητα H είναι μιά ποσότητα που αντιστοιχεί στη μονάδα του όγκου. Έχουμε,

$$\frac{dH}{dt} = \int\int\int_{\vec{v}_1} (\ln f(\vec{v}_1) + 1) \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll} d\vec{v}_1 \, .$$

Επειδή, όπως δείξαμε προηγουμένως

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll} = \int_{\vec{v}_2} \left[f(\vec{v}_1^{'})f(\vec{v}_2^{'}) - f(\vec{v}_1)f(\vec{v}_2)\right] |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| \sigma(|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|, \theta) d\Omega d\vec{v}_2 \, ,$$

έχουμε,

$$\frac{dH}{dt} = \int_{\vec{v}_1}\int_{\vec{v}_2} (\ln f(\vec{v}_1) + 1) \left[f(\vec{v}_1^{'})f(\vec{v}_2^{'}) - f(\vec{v}_1)f(\vec{v}_2)\right] |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| \sigma(|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|, \theta) d\Omega d\vec{v}_2 d\vec{v}_1 \, .$$

Όμως, επειδή υπάρχει συμμετρία στο ολοκλήρωμα ως προς τις μεταβλητές $\vec{v}_1$ και $\vec{v}_2$ μπορούμε να τις αντιμεταθέσουμε στο ολοκλήρωμα. Έτσι, μπορούμε να αντικαταστήσουμε το προηγούμενο ολοκλήρωμα με το ήμισυ αυτού σύν το ίδιο ολοκλήρωμα με τις μεταβλητές $\vec{v}_1$ και $\vec{v}_2$ αντιμεταθέμενες. Αυτό δίνει,

$$\frac{dH}{dt} = \frac{1}{2}\int_{\vec{v}_1}\int_{\vec{v}_2} [2 + ln(f(\vec{v}_1)f(\vec{v}_2))] \left[f(\vec{v}_1^{'})f(\vec{v}_2^{'}) - f(\vec{v}_1)f(\vec{v}_2)\right] |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| \sigma d\Omega d\vec{v}_1 d\vec{v}_2 \, .$$

Επειδή οι αντίστροφες σκεδάσεις με ταχύτητες από $(\vec{v}_1^{'}, \vec{v}_2^{'})$ σε $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ έχουν την ίδια διατομή σκέδασης όπως και οι αρχικές από $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ σε $(\vec{v}_1^{'}, \vec{v}_2^{'})$ θα έχουμε μια συμμετρική προς την προηγούμενη εξίσωση, δηλ.,

$$\frac{dH}{dt} = \frac{1}{2}\int_{\vec{v}_1^{'}}\int_{\vec{v}_2^{'}} \left[2 + ln(f(\vec{v}_1^{'})f(\vec{v}_2^{'}))\right] \left[f(\vec{v}_1)f(\vec{v}_2) - f(\vec{v}_1^{'})f(\vec{v}_2^{'})\right] |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| \sigma d\Omega d\vec{v}_1^{'} d\vec{v}_2^{'} \, .$$

Επειδή $d\vec{v}_1'd\vec{v}_2' = J\dfrac{(\vec{v}_1', \vec{v}_2')}{(\vec{v}_1, \vec{v}_2)}d\vec{v}_1 d\vec{v}_2 = d\vec{v}_1 d\vec{v}_2$ και $|\vec{v}_1' - \vec{v}_2'| = |\vec{v}_1 - \vec{v}_2|$, προσθέτοντας τις δύο προηγούμενες εξισώσεις έχουμε,

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{1}{4}\int\limits_{\vec{v}_1}\int\limits_{\vec{v}_2} ln\left[\frac{f(\vec{v}_1')f(\vec{v}_2')}{f(\vec{v}_1)f(\vec{v}_2)}\right]\Big[f(\vec{v}_1')f(\vec{v}_2') - f(\vec{v}_1)f(\vec{v}_2)\Big]|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|\sigma d\Omega d\vec{v}_1 d\vec{v}_2 \,.$$

Ομως, ισχύει πάντα για τους πραγματικούς a και b ότι $(a-b)\ln(a/b) \geq 0, \;$ αν $a, b > 0$ και συνεπώς,

$$\frac{dH}{dt} \leq 0\,,$$

χρησιμοποιώντας το προηγούμενο αποτέλεσμα.
Εάν ορίσουμε την εντροπία ως,

$$S \equiv -k\int\int\int\limits_{\vec{v}} f\ln f d\vec{v}d\vec{r} \implies \frac{dS}{dt} \geq 0\,.$$

Συνεπώς, η εντροπία είναι μια ποσότητα που μπορεί μόνο να αυξάνει με το χρόνο. Γιά την ώρα δεν έχει σημασία ο ορισμός της εντροπίας. Αυτό που πραγματικά έχει σημασία είναι ότι υπάρχει μιά ποσότητα που μπορεί να αυξάνει με το χρόνο και ποτέ να ελαττώνεται !

2. Αναζητώντας την f που κάνει την ποσότητα H ελάχιστη κάτω από τους περιορισμούς της διατήρησης μάζας, ορμής και ενέργειας, με τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών του Lagrange μπορούμε να μεταβάλλουμε τη συνάρτηση που αποτελείται από την H και τις διατηρούμενες ποσότητες,

$$\int_{\vec{v}} d\vec{v}[\ln f + 1 + A + \vec{B}\cdot\vec{v} + cv^2]\delta f = 0\,,$$

όπου η μεταβολή δf είναι τυχαία. Τότε η ποσότητα μέσα στις παρενθέσεις πρέπει να είναι μηδέν,

$$f_0 = \text{σταθερό}\cdot\exp[-cv^2 - \vec{B}\cdot\vec{v}]\;,\quad u = \frac{1}{2}mnV^2 + \frac{3}{2}nkT\,.$$

Προσδιορίζοντας τις σταθερές, από τα ολοκληρώματα

$$\int\limits_{\vec{v}} f d\vec{v} = n,\; \int\limits_{\vec{v}} fm\vec{v}d\vec{v} = nm\vec{V},\; \int\limits_{\vec{v}} f(mv^2/2)d\vec{v} = u$$

έχουμε:

$$f_0 = n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\exp\left[-\frac{m(\vec{v}-\vec{V})^2}{2kT}\right],$$

δηλ. την την κατανομή ταχυτήτων Maxwell.

3.6.1 Πρόβλημα 3.4

Επειδή,

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{1}{4}\iint\limits_{\vec{v}_1\vec{v}_2} \ln\frac{f(\vec{v}_1')f(\vec{v}_2')}{f(\vec{v}_1)f(\vec{v}_2)}\left[f(\vec{v}_1')f(\vec{v}_2') - f(\vec{v}_1)f(\vec{v}_2)\right]\sigma|q|d\vec{v}_1 d\vec{v}_2$$

συνεπάγεται ότι

$$\frac{dH}{dt} \leq 0\,.$$

Η ισότητα, $dH/dt = 0$, ισχύει μόνο όταν $f(1')f(2') = f(1)f(2)$. Επομένως σε μια κατάσταση *ισορροπίας*, πρέπει να έχουμε,

$$\ln f(1') + \ln f(2') = \ln f(1) + \ln f(2)\,,$$

δηλαδή το άθροισμα $\ln f(1) + \ln f(2)$ πρέπει να είναι το ίδιο πριν και μετά τη σκέδαση. Αλλά κατά τη σκέδαση, οι μόνες ποσότητες που διατηρούνται είναι, εκτός από μια σταθερά, οι τρεις συνιστώσες της ορμής και η κινητική ενέργεια. Επομένως, η προηγούμενη συνθήκη για την ισορροπία ικανοποιείται μόνο όταν

$$\ln f = \alpha + \beta m v_x + \gamma m v_y + \delta m v_z + \eta\Big(\frac{1}{2}mv^2\Big)\,,$$

όπου α, β, γ, δ, η είναι σταθερές. Προσδιορίστε αυτές τις σταθερές για ένα αέριο του οποίου η μέση ταχύτητα είναι $\vec{V}$.

3.6.2 Πρόβλημα 3.5

Η εσωτερική ενέργεια ανά μονάδα μάζας ενός αερίου είναι,

$$u = \frac{P}{(\gamma-1)\rho}\,.$$

Στα ιδανικά αέρια $\gamma = 5/3$ και έτσι $u = 3kT/2$. Τότε, ένας ορισμός της εντροπίας δίνεται από τον 1^o νόμο της θερμοδυναμικής,

$$Tds = du + Pd(1/\rho)\,,$$

όπου s η εντροπία ανά μονάδα μάζας. Δηλαδή, για κάθε προσθήκη θερμότητας $dq = Tds$ το αέριο αντιδρά αυξάνοντας την εσωτερική του ενέργεια, du και εκτελώντας κάποιο έργο, PdV/m.

Έστω ότι το αέριο βρίσκεται σε θερμοδυναμική ισορροπία έτσι ώστε η συνάρτηση κατανομής να είναι Maxwellian,

$$f_0 = n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\exp\left[-m(\vec{v}-\vec{V})^2/2kT\right]\,.$$

Ολοκληρώνοντας την ποσότητα, $-kf_0 \ln f_0$, δηλαδή,

$$-kH = -k \int f_0 \ln f_0 d\vec{v} = \rho s$$

δείξτε ότι ισούται με την εντροπία ανά μονάδα όγκου, δηλαδή, $nms = \rho s$ και $S = \int_v \rho s d\vec{r}$.

Επομένως, δείξτε ότι το θεώρημα-H του Boltzmann συνεπάγεται το 2^o νόμο της θερμοδυναμικής, $dS/dt \geq 0$ με την ισότητα να ισχύει για συστήματα σε θερμοδυναμική ισορροπία, αν επεκτείνουμε τον ορισμό $\rho s = -kH$ και για συστήματα που δεν είναι σε θερμοδυναμική ισορροπία.

3.6.3 Πρόβλημα 3.6

Θεωρείστε ένα δυναμικό σύστημα n σωματιδίων του οποίου μιά κατάσταση μπορεί να περιγραφεί με τις γενικευμένες συντεταγμένες και ορμές των συστατικών του, $(q_s, p_s; s = 1, 2, ...n)$. Η εξέλιξη του συστήματος αυτού υπό ορισμένες προυποθέσεις μπορεί να περιγραφεί από τις εξισώσεις του Hamilton :

$$\dot{p}_s = -\frac{\partial H}{\partial q_s}, \quad \dot{q}_s = \frac{\partial H}{\partial p_s},$$

όπου η Hamiltonian $H(q_s, p_s, t)$ είναι συνάρτηση των γενικευμένων συντεταγμένων, ορμών και του χρόνου t. Στη στατιστική περιγραφή του συστήματος αυτού εισάγεται η έννοια του στατιστικού συνόλου (ensemble), δηλ., ενός συνόλου πιστών αντιγράφων του συστήματος που όμως βρίσκονται σε τυχούσα κατάσταση μιά δεδομένη χρονική στιγμή. Ετσι, κάθε μέλος αυτού του στατιστικού συνόλου παριστάνεται με ένα σημείο στο φασικό χώρο κάθε δεδομένη χρονική στιγμή. Αυτά τα σημεία κινούνται σε διαφορετικές φασικές τροχιές. Εαν τα σημεία αυτά είναι αρκετά πυκνά κατανεμημένα στο φασικό χώρο μπορούμε να μιλάμε γιά την πυκνότητα των σημείων του στατιστικού συνόλου, $\rho_{ens}(q_s, p_s, t)$.

Αποδείξτε το θεμελιώδες θεώρημα της στατιστικής μηχανικής του Liouville, δηλαδή ότι εν απουσία κρούσεων η πυκνότητα καταστάσεων $\rho_{ens}(q_s, p_s, t)$ στο φασικό χώρο παραμένει αμετάβλητη,

$$\frac{d\rho_{ens}}{dt} = 0 .$$

Υπόδειξη: Εαν (q_s, p_s) και $(q_s + \delta q_s, p_s + \delta p_s)$ παριστάνουν τις καταστάσεις του συστήματος τις χρονικές στιγμές t και $t + \delta t$, τότε

$$\frac{d\rho_{ens}}{dt} = lim_{\delta t \to 0} \frac{\rho_{ens}(q_s + \delta q_s, p_s + \delta p_s, t + \delta t) - \rho_{ens}(q_s, p_s, t)}{\delta t} .$$

Αναπτύξτε τις ποσότητες αυτές σε σειρά Taylor και χρησιμοποιείστε την εξίσωση της συνεχείας

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 ,$$

με $\rho = \rho_{ens}$ και $\vec{v} = (\dot{q}_s, \dot{p}_s)$, καθώς και τις εξισώσεις Hamilton.

3.7 Οι εξισώσεις των ροπών

Από την κινητική εξίσωση του Boltzmann:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})f + \left(\frac{\vec{F}}{m}\cdot\vec{\nabla}_{\vec{v}}\right) f = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll},$$

μπορούμε να πάρουμε τις εξισώσεις των ροπών αν πολλαπλασιάσουμε με διάφορες συναρτήσεις της ταχύτητας $\psi(\vec{v})$ και ολοκληρώσουμε στο χώρο των ταχυτήτων. Έτσι, προκύπτουν οι εξισώσεις των ροπών παίρνοντας,

$$\psi(\vec{v}) = m,\ m\vec{v},\ m\vec{v}\vec{v},\ \cdots,$$

και αντιστοιχούν στις εξισώσεις ροπών μηδενικής, πρώτης, δευτέρας τάξεως κ.τ.λ., ως προς την ταχύτητα. Με αυτή τη διαδικασία, μπορούμε να αντικαταστήσουμε την εξίσωση για τη συνάρτηση κατανομής $f(\vec{r},\vec{v},t)$ των μεταβλητών $(\vec{r},\ \vec{v},\ t)$ με ένα σύστημα εξισώσεων που είναι συναρτήσεις μόνο των $(\vec{r},\ t)$.

Αν ορίσουμε τη μέση τιμή μιάς ποσότητας $\psi(\vec{v})$ στο χώρο των ταχυτήτων:

$$<\psi(\vec{v})>= \frac{1}{n(\vec{r},t)}\int\int\int_{\vec{v}}\psi(\vec{v})f(\vec{r},\vec{v},t)d\vec{v}\,.$$

και πολλαπλασιάσουμε την κινητική εξίσωση του Boltzmann με τη συνάρτηση της ταχύτητας $\psi(\vec{v})$ και ολοκληρώσουμε στο χώρο των ταχυτήτων, θα δείξουμε στη συνέχεια ότι προκύπτουν οι ακόλουθες γενικές εξισώσεις μεταφοράς,

$$\frac{\partial}{\partial t}(n<\psi>) + \frac{\partial}{\partial \vec{r}}\cdot(n<\vec{v}\psi>) - \frac{nq\vec{E}}{m}\left\langle\frac{\partial\psi}{\partial\vec{v}}\right\rangle - \frac{nq}{mc}\left\langle\vec{v}\times\vec{B}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\vec{v}}\right\rangle$$
$$= \left\{\frac{\partial}{\partial t}(n<\psi>)\right\}_{\rm coll},$$

για οποιαδήποτε $\psi(\vec{v})$.

Όταν $\psi(\vec{v}) = m$, η αντίστοιχη εξίσωση μεταφοράς περιέχει τα n και $<\vec{v}>$ και για να προσδιοριστεί η πυκνότητα n χρειάζεται η μέση τιμή της ταχύτητας $<\vec{v}>$. Η μέση τιμή της ταχύτητας $<\vec{v}>$ όμως μπορεί να προσδιοριστεί από την εξίσωση μεταφοράς πρώτης τάξης που προκύπτει θέτοντας $\psi = m\vec{v}$. Αυτή η εξίσωση όμως περιέχει και τη μέση τιμή της ποσότητας $<\vec{v}\vec{v}>$. Η μέση τιμή της ποσότητας $<\vec{v}\vec{v}>$ όμως μπορεί να προσδιοριστεί από την εξίσωση μεταφοράς δεύτερης τάξης που προκύπτει με $\psi = m\vec{v}\vec{v}/2$, κ.τ.λ. Δηλαδή, κάθε εξίσωση ροπής απαιτεί την ύπαρξη της εξίσωσης ροπής υψηλότερης τάξης. Αυτό είναι το πρόβλημα του κλεισίματος του συστήματος που συζητούμε πιο κάτω.

3.8 Οι εξισώσεις των μέσων τιμών

Αν οι σκεδάσεις Coulomb ανάμεσα στα ηλεκτρόνια και τα πρωτόνια είναι ελαστικές, υπάρχουν 3 ποσότητες που διατηρούνται κατά τη διάρκεια της σκέδασης: ο αριθμός ή η μάζα των σωματιδίων, η ορμή τους και η ολική ενέργεια,

$$\begin{pmatrix} nm \\ nm\vec{V} \\ nm\mathcal{E} \end{pmatrix} = \int\int\int_{\vec{v}} \begin{pmatrix} m \\ m\vec{v} \\ m|\vec{v}|^2/2 \end{pmatrix} f(\vec{r},\vec{v},t)d^3\vec{v}$$

όπου $\vec{V}$ είναι η μέση ταχύτητα και $\mathcal{E}$ η μέση κινητική ενέργεια. Αυτές οι ποσότητες μπορούν να θεωρηθούν σαν συναρτήσεις $\psi(\vec{v})$ της $\vec{v}$ με $\psi(\vec{v}) = m,\ \psi(\vec{v}) = m\vec{v},\ \psi(\vec{v}) = m|\vec{v}|^2/2$.

Αποδεικνύεται (βλ. Παράρτημα), ότι για κάθε ποσότητα ψ που διατηρείται κατά την κρούση:

$$\psi(\vec{v}_1) + \psi(\vec{v}_2) = \psi(\vec{v}_1') + \psi(\vec{v}_2')\,,$$

τότε ισχύει,

$$\int\int\int_{\vec{v}} \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll} \psi(\vec{v}) \cdot d\vec{v} = 0\,.$$

Μπορούμε επομένως να γράψουμε τρεις εξισώσεις για τις τρεις διατηρούμενες ποσότητες $\psi = m,\ \psi = m\vec{v},\ \psi = m|\vec{v}|^2/2$

$$\int\int\int_{\vec{v}} \psi(\vec{v})\frac{\partial f}{\partial t}d\vec{v} + \int\int\int_{\vec{v}} \psi(\vec{v})\vec{v}\cdot\frac{\partial f}{\partial \vec{r}}d\vec{v}\ +$$

$$\int\int\int_{\vec{v}} \psi(\vec{v})\frac{\vec{F}}{m}\cdot\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}\cdot d\vec{v} + \int\int\int_{\vec{v}} \frac{q}{mc}\psi(\vec{v})(\vec{v}\times\vec{B})\cdot\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}d\vec{v} = 0\,,$$

όπου $\vec{F}$ είναι δυνάμεις ανεξάρτητες της $\vec{v}$, όπως π.χ., η ηλεκτρική δύναμη $\vec{F} = q\vec{E}$. Γι' αυτές τις δυνάμεις,

$$\frac{1}{m}\int\int\int_{\vec{v}} \psi\vec{F}\cdot\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}d\vec{v} = \frac{\vec{F}}{m}\int\int\int_{\vec{v}} \psi\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}d\vec{v} =$$

$$\frac{\vec{F}}{m}\int\int\int_{\vec{v}} \left[\frac{\partial}{\partial \vec{v}}(\psi f) - f\frac{\partial \psi}{\partial \vec{v}}\right] d\vec{v} = -\frac{\vec{F}}{m}\int\int\int_{\vec{v}} \frac{\partial \psi}{\partial \vec{v}} f d\vec{v}\,,$$

όπου στην τελευταία ισότητα λάβαμε υπ′ όψη ότι καθώς $\vec{v} \to \pm\infty,\ f \to 0$ έτσι ώστε για όλα τα $\psi(\vec{v})$, $\lim_{\vec{v}\to\pm\infty}(\psi f) = 0$. Για την περίπτωση της δύναμης Lorentz, $\vec{F}_L = q(\frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B})$,

$$\frac{q}{mc}\int\int\int_{\vec{v}} \psi(\vec{v})(\vec{v}\times\vec{B})_i\frac{\partial f}{\partial v_i}d\vec{v} =$$

$$\frac{q}{mc}\int\int\int_{\vec{v}} \left[\frac{\partial}{\partial v_i}\left(\psi f(\vec{v}\times\vec{B})_i\right) - (\vec{v}\times\vec{B})_i f\frac{\partial \psi}{\partial v_i}\right] d\vec{v} = -\frac{q}{mc}\int\int\int_{\vec{v}} f(\vec{v}\times\vec{B})_i\frac{\partial \psi}{\partial v_i}d\vec{v}\,,$$

όπου λάβαμε υπόψη ότι $(\vec{v}\times\vec{B})_i$ είναι ανεξάρτητο του v_i. Με το συμβολισμό των μέσων τιμών, $< Q >= n^{-1}\int\int\int_{\vec{v}} Qfd\vec{v}$ για κάθε ποσότητα Q έχουμε:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}(n < \psi >) + \frac{\partial}{\partial \vec{r}}\cdot(n < \psi\vec{v} >) - \frac{n\vec{F}}{m}\left\langle\frac{\partial \psi}{\partial \vec{v}}\right\rangle - \frac{nq}{mc}\left\langle(\vec{v}\times\vec{B})\cdot\frac{\partial \psi}{\partial \vec{v}}\right\rangle = 0}$$

για την περίπτωση όπου $\psi = m$, $m\vec{v}$, $m|\vec{v}|^2/2$.
Στη συνέχεια, είμαστε πλέον έτοιμοι να χρησιμοποιήσουμε αυτή τη γενική εξίσωση των μέσων τιμών για εξάγουμε τις εξισώσεις κίνησης για το πλάσμα.

3.9 Διατήρηση αριθμού φορτίων ($\psi = 1$) και μάζας ($\psi = m$)

Οι προηγούμενες εξισώσεις μέσων τιμών γιά τα ηλεκτρόνια και τα ιόντα με $\psi = m$ είναι,

$$\frac{\partial n^-}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (n^- \vec{V^-}) = 0\,, \quad n^- : \text{ πυκνότητα ηλεκτρονίων}\,,$$

$$\frac{\partial n^+}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (n^+ \vec{V^+}) = 0\,, \quad n^+ : \text{ πυκνότητα ιόντων}\,.$$

Έστω $\rho = n^+m^+ + n^-m^-$ η συνολική μέση πυκνότητα, $n^\pm \vec{V}^\pm = \int\int\int_{\vec{v}} f^\pm \vec{v}^\pm d\vec{v}^\pm$, η μέση ταχύτητα ιόντων και ηλεκτρονίων και $\vec{V}$ η μέση ταχύτητα του συστήματος ιόντων και ηλεκτρονίων,

$$\vec{V} = \frac{m^+n^+\vec{V}^+ + m^-n^-\vec{V}^-}{n^+m^+ + m^-n^-}\,.$$

Αθροίζοντας τις προηγούμενες εξισώσεις έχουμε,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \rho\vec{V} = 0\,,$$

που είναι η γνωστή εξίσωση της συνεχείας και εκφράζει την διατήρηση της μάζας.
Επίσης μπορούμε να ορίσουμε την ολική πυκνότητα φορτίου

$$\delta = n^+e^+ + n^-e^-\,,$$

και την πυκνότητα ρεύματος $\vec{J}$:

$$\vec{J} = n^+e^+\vec{V}^+ + n^-e^-\vec{V}^-\,.$$

Απο τις εξισώσεις,

$$\frac{\partial n^-e^-}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (n^-e^- \vec{V^-}) = 0\,, \quad n^- : \text{ πυκνότητα ηλεκτρονίων}\,,$$

$$\frac{\partial n^+e^+}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (n^+e^+ \vec{V^+}) = 0\,, \quad n^+ : \text{ πυκνότητα ιόντων}\,.$$

αθροίζοντας προκύπτει η εξίσωση διατήρησης του φορτίου,

$$\boxed{\frac{\partial \delta}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0\,, \qquad \textbf{εξίσωση συνέχειας του φορτίου}}$$

που είναι η γνωστή εξίσωση που εκφράζει τη διατήρηση του συνολικού ηλεκτρικού φορτίου.

Ένας άλλος τρόπος εξαγωγής της εξίσωσης της συνεχείας είναι και ο εξής. Εστω $\rho = \rho(\vec{r}, t)$ η ολική πυκνότητα του ηλεκτρικού φορτίου (ή μάζας) σε κάποιον όγκο V. Εφόσον το ολικό φορτίο (ή μάζα) σε ένα κλειστό σύστημα παραμένει σταθερό, αν η πυκνότητα ρ ελαττώνεται σε κάποιο όγκο V αυτό οφείλεται στη διαφυγή φορτίου (ή μάζας) και επομένως στη ροή ενός ρεύματος $\vec{J}$ που διαρρέει την επιφάνεια S του V:

$$I = \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}\,, \qquad I > 0 \qquad \text{για εκροή ρεύματος}\,.$$

Δηλαδή,

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = -\frac{dq}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_V \rho dV \qquad \text{για σταθερή επιφάνεια } S\,,$$

ή,

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}\right) dV = 0$$

Επειδή αυτό ισχύει για τυχόντα όγκο, πρέπει η ολοκληρωτέα ποσότητα να μηδενίζεται, δηλ.,

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0\,, \qquad \textbf{εξίσωση συνέχειας της μάζας}}$$

Η εξίσωση της συνεχείας εκφράζει το πειραματικό αποτέλεσμα της διατήρησης του ηλεκτρικού φορτίου και είναι ανάλογη της εξίσωσης της συνεχείας για την διατήρηση της μάζας και της ενέργειας.

3.10 Διατήρηση Ορμής ($\psi = m\vec{v}$)

Παίρνοντας την i-συνιστώσα των προηγούμενων εξισώσεων μέσων τιμών γιά τα ηλεκτρόνια και τα ιόντα με $\psi = m\vec{v}$ έχουμε,

$$\frac{\partial}{\partial t} nm{<}v_i{>} + \frac{\partial}{\partial x_j}(nm{<}v_i v_j{>}) - nq\left[E_i + \left(\frac{\vec{V} \times \vec{B}}{c}\right)_i\right] == 0\,,$$

όπου υπονοείται άθροιση ως προς τις ποσότητες όταν ένας δείκτης εμφανίζεται πολλές φορές (δηλ., ως προς το δείκτη j). Αθροίζουμε αυτές τις εξισώσεις για τα ηλεκτρόνια και τα ιόντα και γράφουμε $\vec{v} = \vec{V} + \vec{w}$ όπου $\vec{V}$ είναι η μέση ταχύτητα και $\vec{w}$ η τυχαία απόκλιση από τη μέση ταχύτητα έτσι. Τότε ισχύει $< w_i >=< w_j >= 0$, και έχουμε για τις μέσες τιμές,

$$< v_i v_j >= V_i V_j + < w_i w_j > \ .$$

Ορίζοντας τον τανυστή (πίνακα) της πίεσης $p_{ij} = nm < w_i w_j >$ και διαχωρίζοντας τα διαγώνια από τα μη διαγώνια στοιχεία του πίνακα p_{ij},

$$p_{ij} = nm < w_i w_j >= p\delta_{ij} - \pi_{ij}\,,$$

όπου p η συνήθης πίεση, $p = \frac{1}{3}nm < |\vec{w}|^2 >$ και π_{ij} τα στοιχεία του τανυστή (πίνακα) των διαστρωματικών τάσεων,

$$\pi_{ij} \equiv nm \left\langle \frac{1}{3}|\vec{w}|^2 \delta_{ij} - w_i w_j \right\rangle .$$

Το ότι η πίεση p δίδεται από την προηγούμενη έκφραση μπορούμε να το επαληθεύσουμε και με τον ακόλουθο απλό υπολογισμό. Περίπου το 1/3 των σωματιδίων κινείται στη διεύθυνση z και εξ αυτών τα μισά στην κατεύθυνση $\hat{z}$. Όταν ένα από αυτά τα σωματίδια ή φορτία συγκρούεται ελαστικά με το τοίχωμα του δοχείου όπου ευρίσκεται το αέριο ή το πλάσμα, η κινητική του ενέργεια παραμένει αμετάβλητη, η ορμή του όμως μεταβάλλεται κατά $-2m\vec{w}$. Λόγω διατήρησης της ορμής στο τοίχωμα μεταφέρεται ορμή ίση με $2m\vec{w}$. Η μέση δύναμη που ασκείται στο τοίχωμα μπορεί να υπολογισθεί αν πολλαπλασιάσουμε τη μέση ορμή $2m\vec{w}$ που δίδεται στο τοίχωμα από μια σύγκρουση με το ρυθμό τέτοιων συγκρούσεων $n\vec{w}A/6$. Επομένως η μέση δύναμη στο τοίχωμα ανα μονάδα επιφάνειας A, δηλ., η μέση πίεση είναι

$$p = \frac{1}{A}(2m\vec{w})\left(\frac{n\vec{w}A}{6}\right) = \frac{nm|\vec{w}^2|}{3} .$$

Ορίζοντας την ολική πίεση P_{ij} και τον ολικό πίνακα των διαστρωματικών τάσεων Π_{ij}, ως το άθροισμα των αντίστοιχων συνεισφορών από τα ηλεκτρόνια και τα ιόντα,

$$P_{ij} = p^{+}_{ij} + p^{-}_{ij} , \quad \Pi_{ij} = \pi^{+}_{ij} + \pi^{-}_{ij} ,$$

έχουμε,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho V_i V_j + P\delta_{ij} - \Pi_{ij}) - \delta E_i - \left(\frac{\vec{J}\times\vec{B}}{c}\right)_i = 0 ,$$

ή,

$$V_i \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V_j)}{\partial x_j}\right] + \rho\frac{\partial V_i}{\partial t} + \rho V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial x_j} + \delta E_i + (\frac{\vec{J}\times\vec{B}}{c})_i .$$

Χρησιμοποιώντας όμως την εξίσωση της συνέχειας ο πρώτος όρος μηδενίζεται οπότε παίρνουμε τελικά σε διανυσματική μορφή,

$$\boxed{\rho\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \rho(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V} = -\vec{\nabla}P + \vec{\nabla}\cdot\overleftrightarrow{\Pi} + \delta\vec{E} + \frac{\vec{J}\times\vec{B}}{c} , \textbf{ εξίσωση διατήρησης ορμής}}$$

που εκφράζει τη διατήρηση της συνολικής ορμής. Σε αυτή την εξίσωση μπορούμε να καταλήξουμε γράφοντας το 2ο νόμο του Νεύτωνα $m\vec{a} = \vec{F}$ για τη μονάδα του όγκου του πλάσματος. Οι δύο όροι στο αριστερό μέλος είναι η επιτάχυνση ανά μονάδα όγκου, $\rho d\vec{V}/dt$, ενώ οι όροι στο δεξί μέλος είναι η βαθμίδα της πίεσης και των διαστρωματικών τάσεων, η ηλεκτρική δύναμη ανά μονάδα όγκου $\delta\vec{E}$ και τέλος η δύναμη *Lorentz* ανά μονάδα όγκου $(\vec{J}\times\vec{B})/c$.

3.11 Διατήρηση Ενέργειας ($\psi = m|\vec{v}|^2/2 = m(\vec{V} + \vec{w})^2/2$)

Αντικαθιστώντας $\psi = m|\vec{v}|^2/2 = m(\vec{V} + \vec{w})^2/2$ στην εξίσωση των μέσων τιμών και επειδή $\vec{F} = q\vec{E}$, $\vec{J} = nq\vec{V}$, $(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} = 0$ έχουμε,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\rho}{2}(\vec{V}^2 + < \vec{w} >^2)\right] + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\rho}{2} < (V_i + w_i)^2 (V_j + w_j) >\right] - \vec{J} \cdot \vec{E} = 0\,,$$

όπου όπως πριν υπονοείται άθροιση ως προς τις ποσότητες που έχουν τον ίδιο δείκτη (όπως συμβαίνει με τον 2ο όρο, $< (V_i + w_i)^2 (V_j + w_j) > = < (V_i + w_i)(V_i + w_i)(V_j + w_j) >$). Αλλά,

$$< (V_i + w_i)^2 (V_j + w_j) > = V^2 V_j + 2V_i < w_i w_j > + V_j < w^2 > + < w_j w^2 >\,,$$

και αν ορίσουμε την ενέργεια ανά μονάδα όγκου, u

$$\rho u \equiv \rho < \frac{1}{2}|\vec{w}|^2 > = \frac{3}{2}P\,,$$

και τη ροή της θερμικής ενέργειας,

$$\mathcal{F}_j \equiv \rho < w_j \frac{1}{2}|\vec{w}|^2 >\,,$$

όπου η ποσότητα $\mathcal{F}_i$ έχει διαστάσεις ροής ενέργειας, δηλ., ενέργεια που διαρρέει την μονάδα της επιφάνειας ανά μονάδα χρόνου, έχουμε,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho}{2}|\vec{V}|^2 + \rho u\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\rho}{2}|\vec{V}|^2 V_j + V_i(P\delta_{ij} - \Pi_{ij}) + \rho u V_j + \mathcal{F}_j\right] = \vec{J} \cdot \vec{E}\,.$$

Δηλαδή η χρονική αύξηση της ολικής ενέργειας που βρίσκεται στη μονάδα του όγκου $\mathcal{V}$ [$\rho V^2/2$ (κινητική) και ρu (εσωτερική-θερμική)] ισούται με την εισροή διά της επιφάνειας S που περιβάλλει τον $\mathcal{V}$ κινητικής ενέργειας και ενθαλπίας, $\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\rho}{2}|\vec{V}|^2 + (P + \rho u)\right] V_j$, μαζί με τη ροή θερμικής ενέργειας (F_j), μείον τις απώλειες λόγω τριβών, $-\frac{\partial}{\partial x_j}(\Pi_{ij} V_i)$ και το ρυθμό που εναποθέτει ενέργεια στο σύστημα η θέρμανση Joule ($\vec{J} \cdot \vec{E}$).

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση της συνέχειας μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση διατήρησης της ενέργειας (βλ. ακόλουθα Προβλήματα) ως εξής:

$$\boxed{\rho\frac{\partial u}{\partial t} + \rho(\vec{V} \cdot \vec{\nabla})u = -P\nabla \cdot \vec{V} - \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{F}} + (\overleftrightarrow{\Pi} \cdot \vec{\nabla})\vec{V}\,, \textbf{ εξίσωση διατήρησης ενέργειας}}$$

3.11.1 Πρόβλημα 3.7

Από τις εξισώσεις διατήρησης μάζας και ορμής συνάγετε την εξίσωση

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho}{2}|\vec{V}|^2\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\rho}{2}|\vec{V}|^2 V_j\right) = \vec{J} \cdot \vec{E} - \vec{V} \cdot \vec{\nabla}P + \vec{V} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \overleftrightarrow{\Pi})\,.$$

Εν συνεχεία, αφαιρώντας την εξίσωση αυτή από την προηγούμενη εξίσωση διατήρησης ενέργειας δείξτε ότι,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) = -P\frac{\partial V_j}{\partial x_j} + \Pi_{ij}\frac{\partial V_i}{\partial x_j}\,,$$

ή σε διανυσματική μορφή

$$\underbrace{\rho\frac{\partial u}{\partial t} + \rho(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})u}_{\text{αύξηση εσωτερικής ενέργειας} =} = -\underbrace{P\vec{\nabla}\cdot\vec{V}}_{\substack{\text{ρυθμός}\\ \text{έργου}\\ -\rho P dV}} - \underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathcal{F}}}_{\substack{\text{αγωγή}\\ \text{θερμότητας}}} + \underbrace{(\overleftrightarrow{\Pi}\cdot\vec{\nabla})\vec{V}}_{\text{τριβές}}\,.$$

3.11.2 Πρόβλημα 3.8

Χρησιμοποιήστε την εξίσωση της συνεχείας για να δείξετε ότι:

$$P\vec{\nabla}\cdot\vec{V} = \rho P\frac{d}{dt}\left(1/\rho\right)\,.$$

<u>Φυσική εξήγηση της εξίσωσης της ενέργειας</u> : Γράφοντας την εξίσωση της ενέργειας στη μορφή:

$$\rho\left[\frac{du}{dt} + P\frac{d}{dt}\left(1/\rho\right)\right] = -\vec{\nabla}\cdot\mathcal{F} + \overleftrightarrow{\Pi}\cdot\vec{\nabla}\vec{V} = \rho\frac{dq}{dt}\,,$$

βλέπουμε την άμεση σχέση της με τον 1^o νόμο της θερμοδυναμικής,

$$dQ = dU + PdV\,,$$

όπου Q η προστιθέμενη ενέργεια στο ρευστό και U η εσωτερική του ενέργεια.
Δηλ., η πρόσθεση ενέργειας ανά μονάδα του όγκου του ρευστού και ανά μονάδα χρόνου, $\rho dq/dt$ οδηγεί (1) στην αύξηση της εσωτερικής του ενέργειας u ανά μονάδα μάζας του και ανά μονάδα χρόνου $[\rho du/dt]$ και (2) στην εκτόνωσή του $[\rho P d(1/\rho)]$. Ο ρυθμός προστιθέμενης ενέργειας στο ρευστό ανά μονάδα μάζας του $(\rho dq/dt)$, προέρχεται αφενός από τις τριβές $[\overleftrightarrow{\Pi}\cdot\vec{\nabla}\vec{V}]$ και αφετέρου από την είσοδο ενέργειας δια αγωγιμότητας $[-\vec{\nabla}\cdot\mathcal{F}]$.

3.12 Οι εξισώσεις Eüler

Επειδή στην προσέγγιση $f \approx f_o$ η συνάρτηση κατανομής είναι μιά *ισότροπη* συνάρτηση της τυχαίας ταχύτητας $\vec{w} = \vec{v} - \vec{V}$, ισχύει ότι,

$$\pi^{(0)}_{ij} \equiv nm\left\langle\frac{1}{3}|\vec{w}|^2\delta_{ij} - w_i w_j\right\rangle = 0\,, \qquad \mathcal{F}^{(0)}_i \equiv \rho < w_i\frac{1}{2}|\vec{w}|^2 >= 0\,.$$

Με αυτές τις υποθέσεις (δηλ., θεωρώντας ότι η κατανομή των ταχυτήτων είναι σε πρώτη προσέγγιση Maxwellian), παίρνουμε σε χαμηλότερη τάξη τις ακόλουθες εξισώσεις του Eüler (1755), για τη διατήρηση μάζας, ορμής και ενέργειας,

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\rho\vec{V} = 0\,,$$

$$\rho\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \rho(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V} = -\vec{\nabla}P + \delta\vec{E} + \frac{\vec{J}\times\vec{B}}{c}\,,$$

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{V}\cdot\vec{\nabla}u\right) + P\vec{\nabla}\cdot\vec{V} = 0\,,$$

Οι 5 αυτές εξισώσεις αποτελούν ένα κλειστό σύστημα για τους 5 αγνώστους $(\rho, \vec{V}, P)$ αν προσθέσουμε και την εξίσωση

$$\rho u = \frac{P}{\gamma - 1}\,,$$

που ισχύει για την κατανομή Maxwell.

Για μονοατομικό αέριο $\gamma = c_p/c_v = 5/3$, όπου c_v, c_p οι ειδικές θερμότητες υπό σταθερό όγκο και πίεση, $c_v = 3k/2m$, $c_p - c_v = R$.

$$\rho u = \frac{3}{2}P = \frac{3}{2}nkT\,.$$

3.12.1 Πρόβλημα 3.9

Για κατανομή Maxwell $f = f_0$, δείξτε ότι η εντροπία είναι:

$$S = c_v \ln\left(\frac{P}{\rho^\gamma}\right) + S_0\,,$$

με $c_v = 3k/2m$, $\gamma = 5/3$, αν $\rho s = -k\int f_0 \ln f_0 d\vec{v}$ και S_0 είναι μια σταθερά. Εν συνεχεία δείξτε ότι $ds/dt = 0$.

3.12.2 Πρόβλημα 3.10

- Δείξτε ότι για ένα αέριο σε θερμοδυναμική ισορροπία, όπου έχουμε $P = \frac{k}{m}\rho T$, $c_v = \frac{k}{(\gamma-1)m}$ με $\gamma = c_p/c_v$ ισχύει:

$$du + Pd(1/\rho) = \frac{\rho^{\gamma-1}}{\gamma - 1}d(P/\rho^\gamma)\,.$$

- Εν συνεχεία, ορίστε την ποσότητα της εντροπίας ανά μονάδα μάζας, S_m, από την

$$du + Pd(1/\rho) = TdS_m\,,$$

  για να δείξετε ότι η εντροπία S είναι:

$$S = c_v \ln(P/\rho^\gamma) + S_0\,.$$

- Η εντροπία ανά μονάδα όγκου είναι ρS. Επομένως, δείξτε ότι η ολική εντροπία S του αερίου δίνεται από την έκφραση,

$$S = \int_v \rho S d\vec{r} = \int_v \rho c_v \ln\left(\frac{P}{\rho^\gamma}\right) d\vec{r}\,.$$

- Για την περίπτωση της αδιαβατικής μεταβολής ενός αερίου επομένως έχουμε $dS/dt = 0$. Δείξτε ότι για αέριο που κινείται με την ταχύτητα $\vec{V}$ αυτό οδηγεί στην
$$(\vec{V} \cdot \vec{\nabla})S = 0\,.$$
για χρονο-ανεξάρτητες καταστάσεις.

- Επομένως δείξτε ότι στην προηγούμενη περίπτωση
$$P = K(A)\rho^{\gamma}\,,$$
όπου A είναι μια ποσότητα που παραμένει σταθερή πάνω στις γραμμές ροής.

3.13 Νόμοι διατήρησης μάζας, ορμής, ενέργειας για πλάσμα

Οι νόμοι διατήρησης ολικής μάζας, ολικής ορμής και ολικής ενέργειας μπορούν να τεθούν στην ακόλουθη απλή μορφή όταν το πλάσμα είναι σε θερμοδυναμική ισορροπία και η κατανομή των ταχυτήτων είναι Maxwellian,

$$\text{Διατήρηση μάζας :} \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \rho \vec{V}\,,$$

$$\text{Διατήρηση ορμής :} \qquad \frac{\partial \vec{G}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \overleftrightarrow{R}\,,$$

$$\text{Διατήρηση ενέργειας :} \qquad \frac{\partial W}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{S}\,,$$

όπου,

$$\rho = \text{η συνολική πυκνότητα μάζας,}$$

$$\vec{G} = \rho\vec{V} + \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{4\pi c} = \text{η πυκνότητα της συνολικής ορμής,}$$

$$W = \frac{P}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}\rho V^2 + \frac{E^2 + B^2}{8\pi} = \text{η πυκνότητα της συνολικής ενέργειας,}$$

$$R_{ij} = \rho V_i V_j + P\delta_{ij} + T_{ij} = \text{η ροή της συνολικής ορμής,}$$

$$T_{ij} = \frac{E^2 + B^2}{8\pi}\delta_{ij} - \frac{E_i E_j + B_i B_j}{4\pi} = \text{ο τανυστής e/m πεδίου,}$$

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}(\vec{E} \times \vec{B}) + P\vec{V} + \rho\vec{V}\left[\frac{1}{\gamma - 1}\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2}V^2\right]$$

$$= \frac{c}{4\pi}(\vec{E} \times \vec{B}) + \rho\vec{V}\left[\frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2}V^2\right] = \text{η ροή της συνολικής ενέργειας}\,.$$

3.13.1 Πρόβλημα 3.11

Θεωρείστε πλάσμα με ολική πυκνότητα e και ιόντων ίση με δ. Από τις εξισώσεις διατήρησης μάζας και ορμής,

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\rho\vec{V} = 0\,,$$

$$\rho\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \rho(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V} = -\vec{\nabla}P + \frac{\vec{J}\times\vec{B}}{c}\,,$$

καθώς και τις εξισώσεις Maxwell:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\ ,\quad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t}\ ,$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0\ ,\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\delta\ ,$$

συνάγετε το **νόμο διατήρησης της ορμής:**

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\vec{V} + \frac{\vec{E}\times\vec{B}}{4\pi c}\right] + \vec{\nabla}\cdot\left[\rho\vec{V}\vec{V} + P\overleftrightarrow{I} + \frac{E^2+B^2}{8\pi}\overleftrightarrow{I} - \frac{\vec{E}\vec{E}+\vec{B}\vec{B}}{4\pi}\right] = 0\,,$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho V_i + \left(\frac{\vec{E}\times\vec{B}}{4\pi c}\right)_i\right] + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\rho\vec{V}_i\vec{V}_j + P\delta_{ij} + \frac{E^2+B^2}{8\pi}\delta_{ij} - \frac{E_iE_j+B_iB_j}{4\pi}\right] = 0\right\}$$

Συζητείστε τον όρο $\vec{E}\times\vec{B}/4\pi c$ (είναι η ορμή του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου;) καθώς και τον τανυστή του e/m πεδίου:

$$T_{ij} = \frac{E^2+B^2}{8\pi}\delta_{ij} - \frac{E_iE_j+B_iB_j}{4\pi}\,.$$

3.13.2 Πρόβλημα 3.12

Από την εξίσωση διατήρησης της ενέργειας

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho u + \frac{\rho}{2}|\vec{V}|^2\right] + \vec{\nabla}\cdot\left[\left(\frac{\rho|\vec{V}|^2}{2} + \rho u\right)\vec{V} + P\vec{V}\right] = \vec{J}\cdot\vec{E}\,,$$

και τις εξισώσεις του Maxwell

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\ ,\quad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t}\,,$$

συνάγετε την εξίσωση

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\rho}{2}|\vec{V}|^2 + \frac{P}{\gamma-1} + \frac{E^2+B^2}{8\pi}\right] = -\vec{\nabla}\cdot\left[\frac{c}{4\pi}(\vec{E}\times\vec{B}) + P\vec{V} + \left(\frac{\rho|\vec{V}|^2}{2} + \rho u\right)\vec{V}\right]$$

που εκφράζει σε άλλη μορφή τη διατήρηση της ενέργειας.

3.14 Το πρόβλημα του κλεισίματος του συστήματος των εξισώσεων των ροπών και οι εξισώσεις Navier - Stokes

Το σύστημα των 5 εξισώσεων (1 για διατήρηση μάζας, 3 για διατήρηση ορμής και 1 για διατήρηση ενέργειας) πρέπει να προσδιορίσει τους 14 αγνώστους ($\rho(1)$, $\vec{v}(3)$, $P(1)$, $\Pi_{ij}(6)$, $\mathcal{F}_i(3)$). Προφανώς, το σύστημα αυτό δεν είναι κλειστό και θα πρέπει να βρεθεί ένας τρόπος για να προσδιορισθούν μερικές από αυτές τις μεταβλητές, ή να προχωρήσουμε σε υψηλότερες τάξεις των $\psi(\vec{v})$.

Η μέθοδος των Chapman-Enskog προσδιορίζει τους «συντελεστές μεταφοράς» στο όριο όπου η ποσότητα $\epsilon = \lambda/L \simeq \omega/\nu_c \ll 1$, όπου L είναι η διάσταση του συστήματος και λ η μέση ελεύθερη διαδρομή λόγω σκεδάσεων.

$$\left[\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll} \sim \nu_c f \ , \ \ (\vec{V}\cdot\vec{\nabla})f \sim \frac{Vf}{L} \simeq \omega_c f \Rightarrow \epsilon \simeq \frac{\omega}{\nu_c}\right] .$$

Μπορούμε να γράψουμε τότε ότι,

$$f = f_0 + \epsilon f_1 + \epsilon^2 f_2 + \dots \ ,$$

όπου σε χαμηλότερη τάξη η f_0 είναι μια κατανομή Maxwell όπως δείξαμε όταν το $\int\limits_{\vec{v}} \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll} d\vec{v} = 0$.

Επειδή σε αυτήν την τάξη η f είναι ισότροπη συνάρτηση του $\vec{w} = \vec{v} - \vec{V}$, ισχύει ότι,

$$\pi_{ij}^{(0)} \equiv nm \left\langle \frac{1}{3}|\vec{w}|^2\delta_{ij} - w_i w_j \right\rangle = 0 \ , \qquad \mathcal{F}_i^{(0)} \equiv \rho < w_i \frac{1}{2}|\vec{w}|^2 >= 0 \, .$$

Με αυτές τις υποθέσεις, πήραμε σε χαμηλότερη τάξη τις εξισώσεις του Eüler (1755). Προχωρώντας στην τάξη όπου $f = f_0 + \epsilon f_1$ μπορεί να υπολογισθεί η f_1 με τη μέθοδο Chapman-Enskog, και να πάρουμε,

$$\pi_{ij} = \mu \left\{ \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}(\vec{\nabla}\cdot\vec{V})\delta_{ij} \right\}$$

$$\mathcal{F}_i = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x_i}$$

όπου μ είναι ο συντελεστής του ιξώδους και κ ο συντελεστής θερμικής αγωγής.
Για παράδειγμα, αν στο βάθος z η θερμοκρασία είναι $T(z)$, η μεταβολή της ενέργειας – λόγω εισόδου στο στρώμα σωματιδίων με υψηλότερη θερμοκρασία είναι $\frac{\partial E}{\partial z}\cdot dz \simeq \frac{3}{2}k\lambda\frac{\partial T}{\partial z}$.

Η ροή αυτής της ενέργειας στη διεύθυνση z είναι:

$$\mathcal{F}_z = -(nv_T)\left(\frac{3}{2}k\lambda\frac{\partial T}{\partial z}\right) \simeq -\frac{3}{2}\frac{k\cdot\mu}{m}\frac{\partial T}{\partial z} = -\kappa\frac{\partial T}{\partial z}$$

$\Rightarrow$ ο συντελεστής θερμικής αγωγής $\kappa = \frac{3}{2}\frac{k}{m}\mu \simeq c_v \mu$.

Ποιό λεπτομερής υπολογισμός δίνει, $\frac{\kappa}{\mu} = \frac{5}{3} c_v$.

Κινηματικό ιξώδες: Συνήθως χρησιμοποιείται το $\mu/\rho = \nu$. Δηλαδή, $\nu = \dfrac{m v_T}{n m \sigma} \simeq v_T \lambda$.

Αριθμός Reynold: $R_e = \dfrac{VL}{\nu} \simeq \dfrac{VL}{v_T \lambda} = \dfrac{1}{\epsilon}$ όταν $v_t \sim V$, $\epsilon = \lambda/L$.

Όταν $R_e \gg 1$ ($\epsilon \ll 1$) οι δυνάμεις τριβής είναι αμελητέες και ισχύει η περιγραφή του ρευστού αρκετά καλά.

Αριθμός Mach: $M^2 = \dfrac{V^2}{v_T^2} \simeq \dfrac{V^2}{c_v T} \simeq \dfrac{V^2 \mu}{\mu c_v T} = \dfrac{\mu V^2/L}{\kappa T/L}$.

Όταν $M \gg 1$ οι τριβές υπερισχύουν της θερμικής αγωγιμότητας.

Συντελεστής θερμικής διάχυσης: $\chi = \kappa/\rho c_p$

3.15 Υπολογισμός των συντελεστών μεταφοράς ηλεκτρικής και θερμικής αγωγιμότητας, και ιξώδους, σ_E, κ, μ

3.15.1 Η ηλεκτρική αγωγιμότητα σ_E

Απλός υπολογισμός της ηλεκτρικής αγωγιμότητας σ_E

Στα επόμενα δίνεται ένας απλός υπολογισμός της ηλεκτρικής αγωγιμότητος σ_E θεωρώντας μονοδιάστατη κίνηση των ηλεκτρονίων κατά τη διεύθυνση x. Η πυκνότητα του ηλεκτρικού ρεύματος τότε είναι,

$$J_x = n e \dot{x} \,.$$

Γράφοντας σε πρώτη προσέγγιση $\dot{x} = \ddot{x}/\nu_c$, όπου ν_c είναι η συχνότητα των σκεδάσεων Coulomb των ηλεκτρονίων με τα ιόντα, έχουμε

$$J_x = \frac{n e \ddot{x}}{\nu_c} = \frac{ne}{\nu_c}\frac{eE_x}{m_e} = \sigma_E \cdot E_x \,.$$

Επομένως, η ηλεκτρική αγωγιμότητα σ_E είναι,

$$\sigma_E = \frac{ne^2}{m_e}\frac{1}{\nu_c} \,.$$

Επειδή όμως $n\sigma\lambda = 1$ με

$$\sigma \simeq \frac{\pi e^4}{m^2 v^4} \,,$$

και $\nu_c = v/\lambda$, έχουμε

$$\nu_c = n \sigma v = \frac{\pi n e^4}{m_e^2 v^3} \,.$$

Ετσι,

$$\sigma_E = \frac{e^2}{\pi m_e}\frac{m_e^2 v^3}{e^4} = \frac{m_e(3kT/m_e)^{3/2}}{\pi e^2}\,,$$

όπου αντικαταστήσαμε για την ταχύτητα την θερμική ταχύτητα, $v \simeq (3kT/m_e)^{1/2}$ για Maxwellian κατανομή των ταχυτήτων. Επομένως,

$$\sigma_E = \left(\frac{27}{\pi^2}\right)^{1/2}\frac{(kT)^{3/2}}{e^2\sqrt{m_e}}\,.$$

Πιό ακριβής υπολογισμός δίνει,

$$\sigma_E = A\frac{(kT)^{3/2}}{\sqrt{m_e}Ze^2\ln\Lambda}\ , \quad A = \left(\frac{32}{\pi^3}\right)^{1/2}\frac{1}{\gamma_E}$$

$\gamma_E = 0.58,\ 0.68,\ 0.79$ για $Z = 1,2,3,\ \ln\Lambda \simeq 20$ Αντικαθιστώντας τις τιμές των σταθερών έχουμε,

$$\sigma_E \simeq 10^7\, T^{3/2}\, sec^{-1}\,.$$

Σχόλια:

- Για υψηλές θερμοκρασίες, $T \sim 10^6\ ^\circ K$ έχουμε $\sigma_E \simeq 10^{16}\ sec^{-1}$, δηλ., τιμές πολύ κοντά στην αγωγιμότητα ενός πολύ καλού αγωγού όπως ο χαλκός, $\sigma_E^{\mathrm{Cu}} \sim 10^{17}\ sec^{-1}$.
- Στις ατμόσφαιρες των αστέρων η υψηλή ηλεκτρική αγωγιμότητα σ_E έχει σαν συνέπεια το γεγονός ότι για να θερμανθούν αυτές οι ατμόσφαιρες ωμικά χρειάζονται μεγάλες πυκνότητες ηλεκτρικού ρεύματος $\vec{J}$.
- Η σ_E είναι ανεξάρτητη της πυκνότητας, γιατί υποθέσαμε ότι τα ουδέτερα δεν παίζουν κανένα ρόλο. Έτσι, το $J \sim n$ αλλά και η συχνότητα των συγκρούσεων Coulomb είναι $\nu_c \sim n$ και επομένως $\sigma_E \sim \frac{J}{\nu_c}$ είναι ανεξάρτητο της πυκνότητας n.

Υπολογισμός της ηλεκτρικής αγωγιμότητας σ_E από την εξίσωση Boltzmann

Έστω $f = f_0 + f'$ όπου f_0 η Maxwellian και f' κάποια μικρή απόκλιση. Έστω ότι,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_c = \nu_c(f_0 - f) = -\nu_c f'$$

όπου ν_c η συχνότητα των συγκρούσεων. Ας υποθέσουμε χωρίς περιορισμό της γενικότητας ότι έχουμε μόνο τη σταθερή εξωτερική δύναμη $\vec{F} = e\vec{E}$,

$$\frac{e\vec{E}}{m}\cdot\frac{\partial f_0}{\partial \vec{v}} = -\nu_c f'$$

παραμελώντας το γινόμενο όρων $\vec{E}$, f' κ.τ.λ. Τότε,

$$\sigma_E \cdot \vec{E} = \vec{J} = e\int \vec{v} f d\vec{v} = e\int \vec{f}' d\vec{v}$$

Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση Boltzmann με $e\vec{v}$ και ολοκληρώνοντας,

$$\nu_c \vec{J} = \frac{e^2}{kT}\vec{E} \cdot \int \vec{v}\vec{v} f_0 dv$$

Επειδή

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = I(\alpha) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \Rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha^{3/2}} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} x^2 dx\,,$$

και θεωρώντας $\vec{E} = \hat{x}E$ το προηγούμενο ολοκλήρωμα δίνει

$$J_x = \sigma_E E_x \;\; \text{με} \;\; \sigma = \frac{ne^2}{m\nu_c}\,.$$

Ο νόμος του Ohm για πλάσμα υψηλής αγωγιμότητας

Ως γνωστόν, ο νόμος του Ohm γράφεται,

$$\vec{J} = \sigma_E \vec{E}'\,,$$

όπου $\vec{E}'$ είναι το ηλεκτρικό πεδίο στο σύστημα των κινούμενων φορτίων:

$$\vec{E}' = \gamma\left(\vec{E} + \frac{\vec{V}}{c} \times \vec{B}\right) \simeq \vec{E} + \frac{\vec{V}}{c} \times \vec{B}\;, \quad (\gamma \simeq 1)\,,$$

και $\vec{E}$ είναι το ηλεκτρικό πεδίο στο σύστημα του εργαστηρίου (ή σε κάποιο αδρανειακό σύστημα). Τότε,

$$\vec{J} = \sigma_E\left(\vec{E} + \frac{\vec{V}}{c} \times \vec{B}\right)$$

Αλλά επειδή η σ_E είναι πολύ μεγάλη ($\sigma_E \to \infty$) για να έχουμε πεπερασμένο ρεύμα $\vec{J}$ πρέπει να έχουμε πολύ μικρό $\vec{E}'$ ($\vec{E}' \to 0$). Επομένως, $\vec{E} + \frac{\vec{V}}{c} \times \vec{B} \simeq 0$ και

$$\vec{E} = -\frac{\vec{V}}{c} \times \vec{B}\,.$$

3.15.2 Η θερμική αγωγιμότητα κ

Απλός υπολογισμός της θερμικής αγωγιμότητας κ σε πλάσμα υψηλής T

Έστω ότι η θερμοκρασία του αερίου είναι συνάρτηση του z. Η θερμική αγωγιμότητα κ ορίζεται από την

$$\vec{q} = -\kappa\vec{\nabla}T\,, \qquad q \sim \kappa\frac{\Delta T}{\Delta z}\,,$$

όπου q είναι η <u>ροή</u> της θερμικής ενέργειας $(ergs/cm^2\ sec)$
Εάν n η ηλεκτρονική πυκνότητα, λ η μέση ελεύθερη διαδρομή των e που μεταφέρουν τη θερμική ενέργεια (τα πρωτόνια είναι αρκετά βαρύτερα) τότε,

$$q \sim nV\Delta E \sim nV\lambda \cdot \frac{\Delta(kT)}{\Delta z}\,,$$

Επομένως,

$$\kappa \simeq knV\lambda\,.$$

Αλλά η μέση ελεύθερη διαδρομή λόγω σκεδάσεων Coulomb υπολογίσαμε ότι είναι,

$$\lambda = \frac{1}{n\sigma} \simeq \frac{m^2V^4}{\pi e^4 n}\ ,\quad V \sim \sqrt{\frac{3kT}{m}}\,.$$

Συνεπώς,

$$\kappa \simeq k\frac{m^2V^5}{\pi e^4} \simeq \frac{km^2}{\pi e^4}\left(\frac{3kT}{m}\right)^{5/2}\left(\times\frac{1}{\ln\Lambda}\right)\,.$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των σταθερών,

$$\kappa \sim 6\times 10^{-6}\, T^{5/2}\,(erg/cm\cdot {}^\circ K\cdot sec)\,.$$

Γιά χαλκό στη θερμοκρασία δωματίου έχουμε,

$$\kappa \simeq 1\frac{cal}{cm^\circ K\cdot sec} \simeq 4\times 10^7\frac{erg}{cm\cdot {}^\circ K\cdot sec}\,.$$

Γιά πλάσμα θερμοκρασίας $T \sim 10^{6\circ}K$,

$$\kappa \sim 6\times 10^9\frac{erg}{cm\cdot {}^\circ K\cdot sec}\,.$$

Υπολογισμός θερμικής αγωγιμότητας κ από την εξίσωση Boltzmann

Γιά Maxwellian κατανομή των ταχυτήτων,

$$f_0 = n(\vec{r})\left[\frac{m}{2\pi kT(\vec{r})}\right]^{3/2}\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)\,,$$

η χρονοανεξάρτητη κινητική εξίσωση Boltzmann δίνει:

$$\vec{v}\cdot\frac{\partial f}{\partial\vec{r}} = -\nu_c f'\,,$$

ή,

$$f_0\vec{v}\cdot\frac{\partial T}{\partial\vec{r}}\left[\frac{mv^2}{2kT}-\frac{5}{2T}\right] = -\nu_c f'\,,$$

υποθέτοντας ότι $P = nkT =$ σταθερό.
Η ροή $\mathcal{F}$ της θερμικής ενέργειας είναι

$$\vec{\mathcal{F}} = \frac{1}{2} m \int v^2 \vec{v} f' d\vec{v} \,,$$

και επομένως

$$\nu_c \vec{\mathcal{F}} = \frac{5m}{4T} \int v^2 \vec{v}\vec{v} \cdot \nabla T f_0 d\vec{v} - \frac{m^2}{4kT^2} \int v^4 \vec{v}\vec{v} \vec{\nabla} T f_0 d\vec{v} = \frac{5nk^2T}{2m} \nabla T \,,$$

δηλ.,

$$\kappa = \frac{5nk^2T}{2m\nu_c} \,, \quad \frac{\kappa}{\rho c_p} = \chi = \frac{5k^2T}{2m^2\nu_c} \,.$$

3.15.3 Ο συντελεστής του ιξώδους μ

Απλός υπολογισμός του συντελεστού ιξώδους μ

Όταν μια λέμβος κινείται στη θάλασσα, η ταχύτητα των υδάτινων στρωμάτων εξαρτάται από το βάθος z και έτσι έχουμε $v_x(z)$. Τότε, η τριβή που αναπτύσσεται ανά μονάδα επιφάνειας $dydx$ κατά μήκος δύο διαδοχικών στρωμάτων στο $z, z + dz$ είναι ανάλογη του $\frac{\partial v_x}{\partial z}$ και η σταθερά αναλογίας είναι ο γνωστός συντελεστής τριβής μ.

Ένας σύντομος και απλός υπολογισμός του μ εδόθη από τον Maxwell και έχει ως εξής. Θεωρώντας ένα στρώμα επιφάνειας $dA = dxdy$ μεταξύ των υψών z, $z+dz$, η ροή των σωματιδίων που διέρχεται τα στρώματα αυτά είναι nv_T, όπου v_T η θερμική ταχύτητα $v_T \sim \sqrt{kT/m}$ και ο ρυθμός που τη διασχίζουν σωματίδια είναι $(nv_T dA)$. Μπαίνοντας στο στρώμα αυτό και μετά από συγκρούσεις μέσης ελεύθερης διαδρομής λ η μεταβολή της ορμής με το χρόνο στη διεύθυνση x είναι $(nv_T dA) \cdot \lambda m \; \partial v_x / \partial z$. Παίρνοντας τη διαφορά αυτής στα δύο στρώματα z, $z + dz$, έχουμε $dz \frac{\partial}{\partial z} \left[(nv_T dA) \cdot \lambda m \; \partial v_x / \partial z \right]$. Η δύναμη τότε ανά μονάδα όγκου $dAdz$ είναι

$$F_x = \frac{\partial}{\partial z} \left(n v_T \lambda m \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \pi_{xz} \;\; \text{με} \;\; \pi_{xz} = \mu \frac{\partial v_x}{\partial z}$$

και $\mu = nmv_T\lambda \simeq \frac{mv_T}{\sigma}$ ανεξάρτητη της πυκνότητας.

Υπολογισμός του συντελεστού ιξώδους μ από την εξίσωση Boltzmann

Γιά Maxwellian κατανομή των ταχυτήτων,

$$f_0 = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left[\frac{-m}{2kT} \left[[v_x - u(z)]^2 + v_y + v_z \right] \right] ,$$

έχουμε από την εξίσωση Boltzmann,

$$v_z \frac{\partial f_0}{\partial z} = -\nu_c f' \,,$$

$$\frac{mv_z}{kT}\frac{du}{dz}[v_x - u(z)]f_0 = -\nu_c f'$$

Αλλά,

$$\pi_{xz} = \mu\frac{dV_x}{dz} = \mu\frac{du}{dz} = -m <v_x v_z> = -m\int v_x v_z f d\vec{v} = -m\int v_x v_z f' dV\,.$$

Επομένως,

$$\mu = \frac{nkT}{\nu_c}\,, \qquad \frac{\mu}{\rho} = \nu = \frac{kT}{m\nu_c}\,.$$

Ας σημειωθεί ότι $\frac{\kappa}{\mu} = \frac{5}{2}\frac{k}{m}$.

3.16 ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Θα αποδείξουμε εδώ μιά χρήσιμη σχέση την οποία χρησιμοποιούμε γιά να εξάγουμε τις εξισώσεις των μέσων τιμών. Υποθέτοντας ότι η κρούση είναι ελαστική, υπάρχουν 3 ποσότητες που διατηρούνται κατά τη διάρκεια της σκέδασης : ο αριθμός ή η μάζα των σωματιδίων, η ορμή τους και η ολική ενέργεια,

$$\begin{pmatrix} nm \\ nm\vec{V} \\ nm\mathcal{E} \end{pmatrix} = \int \begin{pmatrix} m \\ m\vec{v}_1 \\ m|\vec{v}_1|^2/2 \end{pmatrix} f(\vec{r},\vec{v}_1,t)d^3\vec{v}_1$$

Αυτές οι ποσότητες μπορούν να θεωρηθούν σαν συναρτήσεις $\psi(\vec{v}_1)$ της $\vec{v}_1$ με $\psi(\vec{v}_1) = m,\ \psi(\vec{v}_1) = m\vec{v}_1,\ \psi(\vec{v}_1) = m|\vec{v}_1|^2/2$.
Επειδή έχουμε συμμετρία ως προς τις μεταβλητές $\vec{v}_1,\ \vec{v}_2$ ισχύει, για την $f = f(\vec{v}_1,\vec{r},t)$:

$$\int \left(\psi\frac{\partial f}{\partial t} + \psi\vec{v}\cdot\vec{\nabla}f + \psi\frac{\vec{F}}{m}\cdot\vec{\nabla}_{\vec{v}}f\right)d^3\vec{v}_1 = \int\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_c \psi\cdot d^3\vec{v}_1$$

$$= \int \psi(\vec{v}_1)\left[f(\vec{v}_1')f(\vec{v}_2') - f(\vec{v}_1)f(\vec{v}_2)\right]|\vec{v}_1-\vec{v}_2|\sigma(|\vec{v}_1-\vec{v}_2|,\theta)d\Omega d\vec{v}_1 d\vec{v}_2$$

$$= \int \psi(\vec{v}_2)\left[f(\vec{v}_1')f(\vec{v}_2') - f(\vec{v}_1)f(\vec{v}_2)\right]|\vec{v}_1-\vec{v}_2|\sigma(|\vec{v}_1-\vec{v}_2|\theta)d\Omega d\vec{v}_1 d\vec{v}_2\,.$$

Επομένως, το ολοκλήρωμα $\int\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll}\psi(\vec{v}_1)\cdot d^3\vec{v}_1$ είναι συμμετρικό ως προς $\vec{v}_1,\ \vec{v}_2$ και γι΄ αυτό μπορούμε να αντικαταστήσουμε

$$\psi(\vec{v}_1) \Rightarrow \frac{1}{2}\left(\psi(\vec{v}_1)+\psi(\vec{v}_2)\right).$$

Παρόμοια, αλλάζοντας δείκτες από $(\vec{v}_1,\vec{v}_2) \to (\vec{v}_1',\vec{v}_2')$ έχουμε:

$$\int\psi(\vec{v}_1')\left[f(\vec{v}_1)f(\vec{v}_2) - f(\vec{v}_1')f(\vec{v}_2')\right]\sigma(|\vec{v}_1'-\vec{v}_2'|,\theta)|\vec{v}_1-\vec{v}_2|\Omega d\vec{v}_1' d\vec{v}_2'$$

$$= \int\psi(\vec{v}_2')\left[f(\vec{v}_1)f(\vec{v}_2) - f(\vec{v}_1')f(\vec{v}_2')\right]\sigma(|\vec{v}_1'-\vec{v}_2'|,\theta)|\vec{v}_1'-\vec{v}_2'|\Omega d\vec{v}_1' d\vec{v}_2'$$

$$= -\int\psi(\vec{v}_1')\left[f(\vec{v}_1')f(\vec{v}_2') - f(\vec{v}_1)f(\vec{v}_2)\right]|\vec{v}_1-\vec{v}_2|\sigma(|\vec{v}_1-\vec{v}_2|,\theta)d\Omega d\vec{v}_1 d\vec{v}_2$$

$$= -\int\psi(\vec{v}_2')\left[f(\vec{v}_1')f(\vec{v}'_2) - f(\vec{v}_1)f(\vec{v}_2)\right]|\vec{v}_1-\vec{v}_2|\sigma(|\vec{v}_1-\vec{v}_2|,\theta)d\Omega d\vec{v}_1 d\vec{v}_2\,,$$

επειδή $d\vec{v}_1'd\vec{v}_2' = J\frac{(\vec{v}_1',\vec{v}_2')}{(\vec{v}_1,\vec{v}_2)}d\vec{v}_1 d\vec{v}_2 = d\vec{v}_1 d\vec{v}_2$ και $|\vec{v}_1'-\vec{v}_2'| = |\vec{v}_1-\vec{v}_2|$. Επομένως, προσθέτοντας τις 4 αυτές σχέσεις έχουμε,

$$\int\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll}\psi(\vec{v}_1)\cdot d^3\vec{v}_1 = \frac{1}{4}\int\left[\psi(\vec{v}_1)+\psi(\vec{v}_2)-\psi(\vec{v}_1')-\psi(\vec{v}_2')\right]\times$$

$$\left[f(\vec{v}_1')f(\vec{v}_2') - f(\vec{v}_1)f(\vec{v}_2)\right]|\vec{v}_1-\vec{v}_2|\sigma d\Omega d\vec{v}_1 d\vec{v}_2\,.$$