
ΦΥΣΙΚΗ ΠΛΑΣΜΑΤΟΣ

Κανάρης Χ. Τσίγκανος
Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών
Τμήμα Φυσικής

ΦΥΣΙΚΗ ΠΛΑΣΜΑΤΟΣ

Αθήνα - 2010

Περιεχόμενα

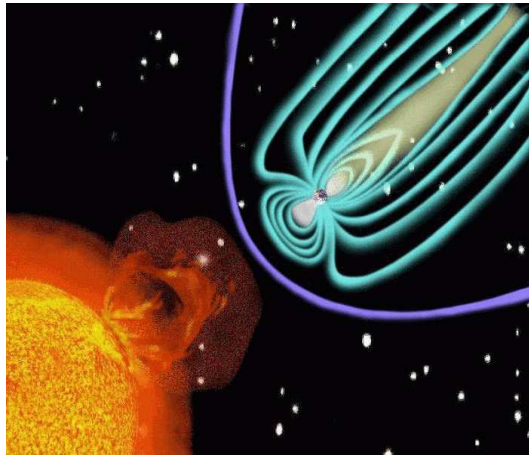
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. Κίνηση Φορτίων σε Εξωτερικά Μαγνητικά Πεδία	7
2.1 Μερικοί Σημαντικοί Χρονικοί Σταθμοί στην Εξερεύνηση της Γήινης Μαγνητόσφαιρας	8
2.2 Κίνηση Larmor φορτίου εντός ομογενούς μαγνητικού πεδίου	11
2.2.1 Πρόβλημα	12
2.2.2 Πρόβλημα	13
2.2.3 Μαγνητική Ροπή και Ρεύμα Μαγνήτισης	13
2.2.4 Πρόβλημα	14
2.3 Κίνηση φορτίου σε σταθερά ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία αμοιβαία κάθετα: ολίσθηση λόγω ηλεκτρικού πεδίου	14
2.3.1 Πρόβλημα	16
2.4 Η γενική περίπτωση της ολίσθησης φορτίου	16
2.5 Ολίσθηση φορτίου λόγω ανομοιογένειας του μαγνητικού πεδίου κάθετα στις μαγνητικές γραμμές	17
2.6 Ολίσθηση φορτίου λόγω καμπυλότητας των μαγνητικών γραμμών	18
2.7 Ο Μαγνητικός Καθρέπτης	19
2.8 Η σταθερότητα της μαγνητικής ροπής μ	20

2.9	Παγίδευση φορτίων στη Μαγνητόσφαιρα - Πολικό Σέλας	21
2.10	Αδιαβατικές Αναλλοίωτες	21
2.10.1	Παράδειγμα. Μονοδιάστατη κίνηση κοντά σε σημείο ισοροπίας	21
2.10.2	Συστήματα που είναι κοντά στην περιодικότητα	23
2.10.3	Περιοδική κίνηση φορτίου σε αργά μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο. Πρώτη αδιαβατική αναλλοίωτη	24
2.10.4	Η δεύτερη αδιαβατική αναλλοίωτη	25
2.10.5	Πρόβλημα	26
2.10.6	Πρόβλημα	26
2.11	Η Μαγνητόσφαιρα της Γης	27
2.11.1	Εξίσωση μιας μαγνητικής γραμμής	29
2.11.2	Υπολογισμός της απόστασης της Μαγνητόπαυσης	30
2.11.3	Οι ζώνες ακτινοβολίας Van Allen	31
2.11.4	Γωνία κλίσης ενός φορτισμένου σωματιδίου σε τυχόν γεωμαγνητικό πλάτος λ	31
2.11.5	Ποσοστό ηλεκτρονίων που φθάνουν στην ιονόσφαιρα	32
2.11.6	Περίοδος μεταξύ δύο διαδοχικών ανακλάσεων ενός φορτισμένου σωματιδίου	33
2.11.7	Το δακτυλιοειδές ρεύμα της μαγνητόσφαιρας	34

2.11.8	Χαρακτηριστικοί χρόνοι κίνησης σωματιδίων στη Μαγνητόσφαιρα της Γης	36
2.12	Διαστημικός Καιρός	36
2.13	Μαγνητόσφαιρες των άλλων πλανητών	39
2.13.1	Εξωτερικοί πλανήτες	39
2.13.2	Εσωτερικοί πλανήτες	40
2.14	Κοσμικές Ακτίνες (Κ.Α.)	41
2.14.1	Πρόβλημα	44
2.14.2	Πρόβλημα	45
2.15	Το πρόβλημα της επιτάχυνσης των Κοσμικών Ακτίνων	46
2.15.1	Μηχανισμός Fermi επιτάχυνσης μη σχετικιστικών Κοσμικών Ακτίνων	46
2.15.2	Επιτάχυνση μή σχετικιστικού φορτίου σε μαγνητική φιάλη	48
2.15.3	Πρόβλημα	49
2.15.4	Πρόβλημα	50
2.16	Επιτάχυνση σχετικιστικών φορτισμένων σωματιδίων σε μαγνητική φιάλη	50
2.17	Άλλα Προβλήματα	52

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Κίνηση φορτισμένων σωματιδίων εντός εξωτερικών ηλεκτρικών και μαγνητικών πεδίων με κύριες εφαρμογές στις μαγνητικές φιάλες, τις Μαγνητόσφαιρες των πλανητών και την επιτάχυνση των κοσμικών ακτίνων



Σχ. 2.1: Σχηματική εικόνα της επίδρασης ηλιακών εκρήξεων στο Διαστημικό Καιρό.

Σε αυτή την ενότητα θα συζητηθούν οι βασικότερες περιπτώσεις της ολίσθησης φορτισμένων σωματιδίων σε εξωτερικά ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία και οι αδιαβατικές αναλλοίωτες ποσότητες. Εφαρμογές που θα συζητηθούν περιλαμβάνουν τη

μαγνητική παγίδευση φορτίων σε μαγνητικές φιάλες στο εργαστήριο και το διάστημα στις ζώνες ακτινοβολίας Van Allen στη μαγνητόσφαιρα της Γής και των άλλων πλανητών. Ένα συναφές πρόβλημα που θα συζητηθεί είναι και η επιτάχυνση των κοσμικών ακτίνων.

2.1 Μερικοί Σημαντικοί Χρονικοί Σταθμοί στην Εξερεύνηση της Γήινης Μαγνητόσφαιρας

Ας δούμε όμως καταρχήν μερικά ιστορικά στοιχεία σχετικά με την εξερεύνηση της Μαγνητόσφαιρας της Γής, την τελευταία χιλιετία και ιδιαίτερα τους 4 τελευταίους αιώνες:

- ~ 1000 Ανακάλυψη της μαγνητικής πυξίδας στην Κίνα.
- 1600 Ο William Gilbert δημοσιεύει στο Λονδίνο την εργασία του «De Magnete» με την οποία εξηγεί την απόκλιση της μαγνητικής βελόνας της πυξίδας θεωρώντας ότι η Γη συμπεριφέρεται σαν ένας τεράστιος μαγνήτης. Το μαγνητικό πεδίο αναγνωρίζεται για πρώτη φορά σαν μια φυσική οντότητα μέσα στο χώρο γύρω από ένα μαγνήτη.
- 1724 Ο George Graham ανακαλύπτει στο Λονδίνο τις μαγνητικές καταιγίδες τις οποίες παράλληλα εντοπίζει και ο Celsius στη Σουηδία, με τον οποίο άλλωστε αλληλογραφούν.
- 1754 Ο de Mairan πρότεινε ότι το σέλας δημιουργείται από την είσοδο σωματιδίων στη γήινη μαγνητόσφαιρα από τον Ήλιο.
- 1759 Ο Canton εισήγαγε την πρώτη παρατηρησιακή σύνδεση με τον Ήλιο, επισημαίνοντας ότι οι γεωμαγνητικές διακυμάνσεις ήρεμων περιόδων είναι ισχυρότερες το καλοκαίρι όταν το ημισφαίριο κλίνει προς τον Ήλιο.
- 1777 Ο Wilcke διαπιστώνει ότι η ακτινοβολία του σέλαος είναι προσανατολισμένη κατά μήκος του μαγνητικού διπόλου του Gilbert.
- 1820 Ο Hans Christian Oersted κάνει την πειραματική σύνδεση ηλεκτρισμού και μαγνητισμού.
- 1851 Ο Samuel Schwabe, ένας ερασιτέχνης Γερμανός αστρονόμος, ανακαλύπτει τον 11/ετή κύκλο των ηλιακών κηλίδων.
- 1859 Ο Richard Carrington στην Αγγλία συνδυάζει την παρατήρηση μίας τεράστιας έκρηξης κοντά σε μια ηλιακή κηλίδα με την εμφάνιση μίας μαγνητικής καταιγίδας στη Γη 17 ώρες αργότερα.

- 1900-3 Ο Kristian Birkeland διαπιστώνει την απόκλιση που προκαλεί εντός κενού μια μαγνητισμένη σφαίρα (terrella) σε δέσμη ηλεκτρονίων. Το γεγονός ότι τα ηλεκτρόνια αυτά κατευθύνονται προς τους πόλους, τον οδηγεί στο συμπέρασμα ότι το πολικό σέλας προέρχεται από δέσμες ηλεκτρονίων που έρχονται από τον Ήλιο.
- 1902 Ο Marconi στέλνει επιτυχώς ραδιοσήματα στην άλλη πλευρά του Ατλαντικού. Ο Ο. Heaviside εξηγεί την διάδοση αυτών των ραδιοκυμάτων ως αποτελέσματα της ανάκλασης αυτών από ένα ηλεκτρικά αγώγιμο στρώμα της ανώτερης ατμόσφαιρας, την *ιονόσφαιρα*.
- 1926 Ο Gregory Breit και ο Merle Tuve υπολογίζουν το ύψος της ιονόσφαιρας μετρώντας το χρόνο που απαιτείται σε ραδιοκύματα να διαδοθούν ως την ιονόσφαιρα και αφού ανακλαστούν εκεί να επιστρέψουν στο έδαφος.
- 1930-1 Όταν η θεωρία της «δέσμης - ηλεκτρονίων» του Birkeland καταρρίπτεται, οι Sydney Chapman και Vincent Ferraro στην Αγγλία προτείνουν ότι οι μαγνητικές καταιγίδες προκαλούνται από νέφη πλάσματος που προέρχονται από τον Ήλιο και περιβάλλουν τη Γη.
- 1949 Μία απότομη αύξηση της έντασης των κοσμικών ακτίνων συσχετίζεται με μία έκρηξη στον Ήλιο. Ένα ισχυρότερο παρόμοιο φαινόμενο συμβαίνει τον Φεβρουάριο του 1953. Ο Owen Storey αποδεικνύει ότι τα ραδιοκύματα «whistler» παράγονται από κεραυνούς και διαδίδονται κατά μήκος των γραμμών του Γήινου μαγνητικού πεδίου σε μεγάλες αποστάσεις.
- 1955 Ανιχνεύονται ραδιοκύματα από τον πλανήτη Δία, μιά παρατήρηση που εκπλήσσει τους παρατηρητές.
- 1957 Ο πρώτος τεχνητός δορυφόρος της Γης, Sputnik I, εκτοξεύεται από τη Σοβιετική Ένωση.
- 1958 Ο Δορυφόρος Explorer I που εκτοξεύουν οι ΗΠΑ ανακαλύπτει τις ζώνες ακτινοβολίας Van Allen, τις οποίες παρατηρεί με μεγαλύτερη λεπτομέρεια ο Explorer 3.
Ο Eugene Parker (Παν. Chicago) προτείνει τη θεωρία του Ηλιακού Ανέμου.
Ο Pioneer 3 παρατηρεί την εξωτερική ζώνη ακτινοβολίας Van Allen.
- 1961 Ο James Dungey στην Αγγλία προτείνει ένα μηχανισμό για τη μεταφορά της ενέργειας του ηλιακού ανέμου στη μαγνητόσφαιρα διαμέσου μίας μαγνητικής σύνδεσης ηλιακού ανέμου και μαγνητόσφαιρας.
Οι Ian Axford και Colin Hines προτείνουν μία διαφορετική θεώρηση όπου η ενεργοποίηση γίνεται από την τριβή του ρευστού ανάμεσα στον ηλιακό άνεμο και τη μαγνητόσφαιρα.
- 1962 Ο Explorer 12 παρατηρεί την μαγνητόπαυση, το οριακό στρώμα μεταξύ του ηλιακού ανέμου και της Μαγνητόσφαιρας.

- 1964 Ο IMP-1 (Interplanetary Monitoring Platform 1) παρατηρεί ένα μεγάλο κρουστικό κύμα που σχηματίζεται όταν ο Ηλιακός Άνεμος συναντά το προσήλιο τμήμα της μαγνητόσφαιρας και μία μακριά μαγνητοουρά στη νυκτερινή σκιά της Γης.
Οι Syun-Ichi Akasofu και Sydney Chapman επαναδιατυπώνουν και επεκτείνουν την θεωρία του Birkeland για τις πολικές μαγνητικές καταιγίδες που ονομάζονται τώρα «μαγνητοσφαιρικές υποκαταιγίδες»
- 1971 Ιόντα Ιονοσφαιρικού Ο τα οποία ανευρίσκονται ανάμεσα στα υψηλής ενέργειας σωματίδια που είναι παγιδευμένα στο Γήινο μαγνητικό πεδίο, παρέχουν ένδειξη ότι τα O^+ αντλούνται και επιταχύνονται από την ιονόσφαιρα.
- 1974 Ο Αμερικανικός Δορυφόρος Triad εντοπίζει μεγάλης κλίμακας σχηματισμούς ηλεκτρικών ρευμάτων που ρέουν από το διάστημα στους πόλους της Γης και αντιστρόφως.
- 1977 Ο Αμερικανικός δορυφόρος S3-3 παρατηρεί ανοδική κίνηση ιόντων O^+ που συσχετίζονται με την καθοδική επιτάχυνση ηλεκτρονίων στο πολικό σέλας
- 1981 Ο δορυφόρος Dynamics Explorer λαμβάνει εικόνες υψηλής ευκρίνειας του πολικού σέλαος.
- 1983 Ο ISEE-3 (International Sun-Earth Explorer 3) εξερευνεί την μακρινή μαγνητοουρά πριν κατευθυνθεί προς τον Κομήτη Giacobini-Zinner.
- 1985 Δημιουργείται ένας «Τεχνητός Κομήτης» από ιόντα βαρίου που αφήνει στο μεσοπλανητικό χώρο ο Γερμανικός δορυφόρος IRM (Ion Release Module).
- 1990 Στις 16 Ιουλίου και 19 Αυγούστου 2000 εκτοξεύονται τα δύο ζεύγη των δορυφόρων Cluster από το Baikonur του Kazakhstan με Ρωσικούς πυραύλους Soyuz οι οποίοι μας δίδουν μία τριδιάστατη λεπτομερή εικόνα της επίδρασης του ηλιακού ανέμου στη Γήινη Μαγνητόσφαιρα.
- 1991 Ένα ισχυρό κρουστικό κύμα ηλιακής προέλευσης προσκρούει στην Γήινη μαγνητόσφαιρα δημιουργώντας μία προσωρινή νέα ζώνη ακτινοβολίας.
- 1993-4 Στις 29 Δεκεμβρίου 2003 και 25 Ιουλίου 2004 εκτοξεύονται από την Xichang και Taiyuan της Κίνας οι δίδυμοι δορυφόροι Double Star, μία συνεργασία της Ευρώπης (ESA) και της Κίνας, για την παρατήρηση της επίδρασης του ηλιακού ανέμου στη Γήινη Μαγνητόσφαιρα.
- 1995 Εκτοξεύεται ο δορυφόρος SoHO (Solar Heliospheric Observatory) που σταθμεύει στο σημείο Lagrange L1, σε απόσταση 1.5 εκατομμυρίων km από τη Γη προς τον Ήλιο και ο οποίος μέχρι σήμερα εξακολουθεί να παρατηρεί συνεχώς τον Ήλιο και να μας δίδει εξαιρετικής ποιότητας Ηλιακά δεδομένα και εικόνες.
- 2005 Φθάνει στον Κρόνο το Ευρωπαϊκό σκάφος Cassini. Αποσπάται από το μητρικό σκάφος η συσκευή Huygens η οποία και προσεδαφίζεται εξερευνώντας τον δορυφόρο του Κρόνου Τιτάνα.

2.2 Κίνηση Larmor φορτίου εντός ομογενούς μαγνητικού πεδίου

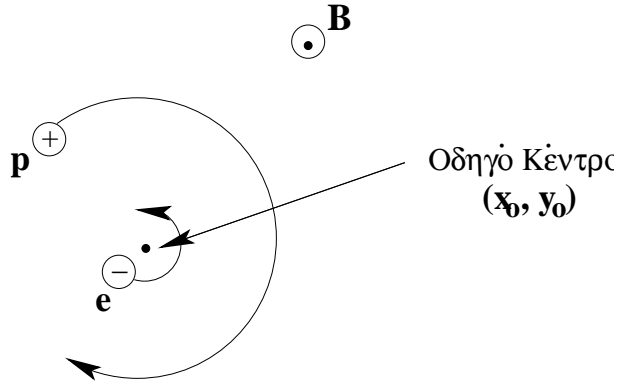
Εστω ότι ένα φορτίο q (θετικό ή αρνητικό) κινείται εντός ενός ομογενούς μαγνητικού πεδίου $\vec{B} = B_0 \hat{z}$. Η εξίσωση κίνησης του φορτίου αυτού είναι:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \pm \frac{|q|\vec{v} \times \vec{B}}{c},$$

με το θετικό πρόσημο να αντιστοιχεί σε θετικά φορτία και το αρνητικό σε αρνητικά. Οι τρεις συνιστώσες της εξίσωσης αυτής είναι,

$$\begin{aligned} m\dot{v}_x &= \pm \frac{|q|v_y B_0}{c} \Rightarrow \ddot{v}_x = \pm \frac{|q|B_0}{mc} \dot{v}_y = - \left(\frac{|q|B_0}{mc} \right)^2 v_x, \\ m\dot{v}_y &= \mp \frac{|q|v_x B_0}{c} \Rightarrow \ddot{v}_y = \mp \frac{|q|B_0}{mc} \dot{v}_x = - \left(\frac{|q|B_0}{mc} \right)^2 v_y, \\ m\dot{v}_z &= 0. \end{aligned}$$

Από τις εξισώσεις των v_x και v_y παρατηρούμε ότι έχουμε ταλαντωτική μεταβολή της ταχύτητας κάθετα στη διεύθυνση \hat{z} του μαγνητικού πεδίου στη συχνότητα Larmor, $\omega_L = |q|B/mc$, ενώ ανεπηρέαστη παραμένει η z -συνιστώσα της ταχύτητας.



Σχ. 2.2: Αντίθετη φορά κίνησης θετικών και αρνητικών φορτίων γύρω από τις γραμμές του μαγνητικού πεδίου. Τα πρωτόνια κινούνται αριστερόστροφα ενώ τα ηλεκτρόνια δεξιόστροφα.

Μιά λύση του προηγούμενου συστήματος είναι,

$$v_{x,y} = v_{\perp} \exp i(\omega_L t + \phi_{x,y}),$$

όπου v_{\perp} είναι η ταχύτητα του φορτίου στο επίπεδο που είναι κάθετο στο \vec{B} .

Με κατάλληλη επιλογή της φάσης $\phi_{x,y}$ έχουμε,

$$v_x = \dot{x} = v_{\perp} \cos \omega_L t \Rightarrow x - x_0 = \frac{v_{\perp}}{\omega_L} \sin \omega_L t = r_L \sin \omega_L t,$$

$$v_y = \dot{y} = \pm \frac{\dot{x}}{\omega_L} = \mp v_{\perp} \sin \omega_L t \Rightarrow y - y_0 = \pm \frac{v_{\perp}}{\omega_L} \cos \omega_L t = \pm r_L \cos \omega_L t,$$

συναρτήσει της ακτίνας Larmor,

$$r_L = \frac{v_{\perp}}{\omega_L} = \frac{mv_{\perp}c}{|q|B}.$$

Επειδή, $v_z = \text{σταθερό}$, έχουμε,

$$\Rightarrow \text{Ελικοειδή τροχιά} \quad \left| \begin{array}{l} x - x_0 = r_L \sin \omega_L t, \\ y - y_0 = \pm r_L \cos \omega_L t, \\ z - z_0 = v_z t. \end{array} \right.$$

Αξίζει να σημειώσουμε την αντίθετη φορά κίνησης των θετικών από τα αρνητικά φορτία. Το (κινούμενο) κέντρο στο σημείο (x_0, y_0) της κυκλικής τροχιάς του φορτίου θα ονομάσουμε οδηγό κέντρο (guiding center).

2.2.1 Πρόβλημα

Να υπολογισθεί η ακτίνα Larmor r_L , (α) για ηλεκτρόνια $E = 10 \text{ keV}$ που κινούνται στο μαγνητικό πεδίο της Γης, (β) για πρωτόνια του Ηλιακού ανέμου πριν φθάσουν στη Μαγνητόσφαιρα της Γης, (γ) για He^+ στις ηλιακές κηλίδες και (δ) για He^{++} σε αντιδραστήρα. Δίδονται οι ενέργειές τους και το μέγεθος του αντίστοιχου μαγνητικού πεδίου :

- α) $E = 10 \text{ keV}$, $B = 0.5 \text{ Gauss}$,
 β) $v = 300 \text{ km/sec}$, $B = 5 \times 10^{-5} \text{ Gauss}$,
 γ) $E = 1 \text{ keV}$, $B \simeq 1500 \text{ Gauss}$,
 δ) $E = 3.5 \text{ MeV}$, $B = 8 \times 10^4 \text{ Gauss}$.

Λύση:

Η ταχύτητα και η ακτίνα Larmor υπολογίζονται από τις εκφράσεις,

$$E \simeq \frac{1}{2}mv_{\perp}^2 \Rightarrow v_{\perp} = \sqrt{\frac{2E}{m}}, \quad r_{\perp} = \frac{mv_{\perp}c}{|q|B}.$$

Ετσι έχουμε,

α)

$$v_{\perp} = \left(\frac{2 \times 10^4 \times 1.6 \times 10^{-12}}{9.1 \times 10^{-28}} \right)^{1/2} = 0.59 \times 10^{10} \text{ cm/sec} \simeq 0.2c \quad (\gamma = 1.02),$$

$$r_L = \frac{mv_{\perp}c}{qB} = \frac{9.1 \times 10^{-28} \times 0.59 \times 10^{10} \times 3 \times 10^{10}}{4.8 \times 10^{-10} \times 0.5} = 6.7 \text{ m} \ll L = 6.370 \text{ km}.$$

β)

$$v_{\perp} = 3 \times 10^7 \text{ cm/sec} \simeq 0.001c \quad (\gamma \simeq 1),$$

$$r_L = \frac{1.67 \times 10^{-24} \times 3 \times 10^7 \times 3 \times 10^{10}}{4.8 \times 10^{-10} \times 5 \times 10^{-5}} \simeq 600 \text{ km} \ll L = 10 \times 6.360 \text{ km}.$$

γ)

$$v_{\perp} = 2.18 \times 10^7 \text{ cm/sec}, \quad r_L \simeq 6 \text{ cm} \ll L \sim 10.000 \text{ km}.$$

δ)

$$v_{\perp} = \left(\frac{2 \times 3.5 \times 10^6 \times 1.6 \times 10^{-12}}{4 \times 1.67 \times 10^{-24}} \right)^{1/2} = 1.3 \times 10^9 \text{ cm/sec} \quad (\gamma \simeq 1.09),$$

$$r_L = \frac{1.3 \times 10^9 \times 4 \times 1.67 \times 10^{-24} \times 3 \times 10^{10}}{2 \times 4.8 \times 10^{-10} \times 8 \times 10^4} \simeq 3.4 \text{ cm} \ll L \sim 1 \text{ m}.$$

Οι ταχύτητες του φορτίου v_{\parallel} και v_{\perp} παραμένουν σταθερές στη διάρκεια της κίνησης, όπως και οι αντίστοιχες κινητικές ενέργειες,

$$T_{\parallel} = \frac{1}{2} m v_{\parallel}^2 = \text{σταθερό}, \quad T_{\perp} = \frac{1}{2} m v_{\perp}^2 = T - T_{\parallel} = \text{σταθερό}.$$

2.2.2 Πρόβλημα

Δείξτε ότι η κινητική ενέργεια φορτίου που αντιστοιχεί στην κάθετη συνιστώσα της ταχύτητάς του είναι σταθερή, $T_{\perp} = \text{σταθερό}$.

2.2.3 Μαγνητική Ροπή και Ρεύμα Μαγνήτισης

Η κίνηση του φορτίου στην κυκλική τροχιά Larmor αντιστοιχεί σε μαγνητική ροπή μ (=ρεύμα \times επιφάνεια/ c).

$$\mu = \frac{q}{\tau c} \times \pi r_L^2 = \frac{m v_{\perp}^2}{2B} = \frac{T_{\perp}}{B}, \quad \tau = \frac{2\pi r_L}{v_{\perp}}.$$

Ετσι,

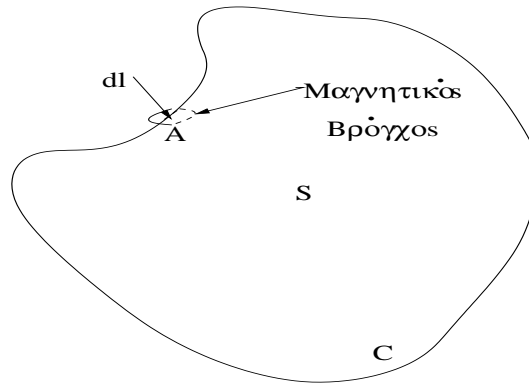
$$\vec{\mu} = -\frac{T_{\perp}}{B^2} \vec{B},$$

δηλαδή το πλάσμα συμπεριφέρεται διαμαγνητικά επειδή η μαγνητική ροπή έχει αντίθετη διεύθυνση από αυτή του μαγνητικού πεδίου.

Έστω ότι έχουμε n μαγνητικούς βρόχους ανά μονάδα όγκου, καθένας επιφάνειας \vec{A} . Τότε, το ρεύμα I_n που διαπερνά την επιφάνεια S είναι:

$$I_n = \oint_C n I \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = c \oint_C \vec{M} \cdot d\vec{\ell} = c \int_S \vec{\nabla} \times \vec{M} \cdot d\vec{S},$$

όπου \vec{M} είναι η μαγνήτιση που ορίζεται ως η μαγνητική ροπή $\vec{\mu}$ ανά μονάδα όγκου, $\vec{M} = n\vec{\mu} = nI\vec{A}/c$.



Σχ. 2.3: Ρεύμα μαγνήτισης.

Αν $I_n = \int_S \vec{J}_m \cdot d\vec{S}$, τότε $\vec{J}_m = c\vec{\nabla} \times \vec{M}$ και

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c}(\vec{J}_{cond} + \vec{J}_m) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},$$

όπου \vec{J}_{cond} , \vec{J}_m είναι οι επιφανειακές πυκνότητες του ρεύματος αγωγιμότητας και μαγνήτισης, αντίστοιχα. Έτσι, ο νόμος του Ampere γράφεται,

$$\vec{\nabla} \times (\vec{B} - 4\pi\vec{M}) = \frac{4\pi}{c} \vec{J}_{cond} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times \vec{H}, \quad \vec{H} = \vec{B} - 4\pi\vec{M}.$$

2.2.4 Πρόβλημα

Εξηγήστε το αρνητικό πρόσημο στην εξίσωση που συνδέει την μαγνήτιση με το μαγνητικό πεδίο.

2.3 Κίνηση φορτίου σε σταθερά ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία αμοιβαία κάθετα: ολίσθηση λόγω ηλεκτρικού πεδίου

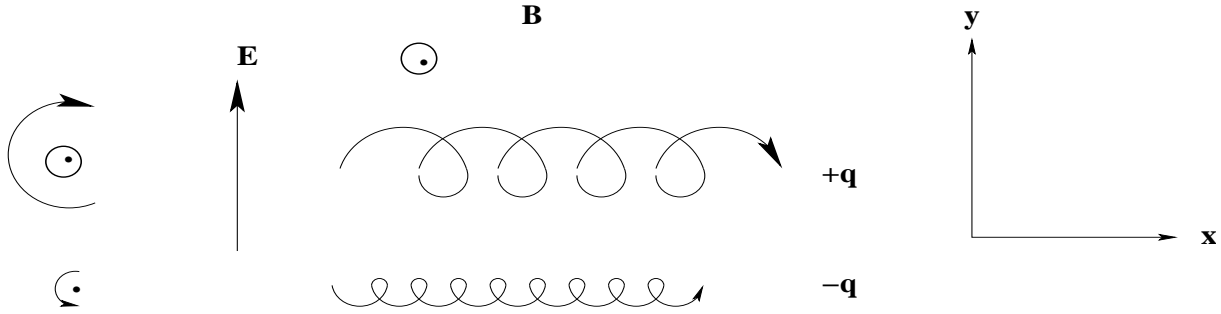
Επιπρόσθετα στο ομογενές μαγνητικό πεδίο \vec{B} , έστω ότι έχουμε και ένα κάθετο και σταθερό ηλεκτρικό πεδίο \vec{E} , δηλ., $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$, π.χ., $\vec{E} = E_y \hat{y}$, $\vec{B} = B_z \hat{z}$. Σ' αυτή την περίπτωση, η εξίσωση κίνησης του φορτίου είναι:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right).$$

Ας ορίσουμε τις ταχύτητες $\vec{v}_E = c\vec{E} \times \vec{B}/B^2$ και $\vec{v}_1 = \vec{v} - \vec{v}_E$. Επειδή $\vec{v}_E \times \vec{B} = -c\vec{E}$ έχουμε,

$$m \frac{d\vec{v}_1}{dt} = q \left[\vec{E} - \vec{E} + \frac{\vec{v}_1 \times \vec{B}}{c} \right] = \frac{q}{c} \vec{v}_1 \times \vec{B}.$$

Επομένως, η ταχύτητα \vec{v} της κίνησης του φορτίου είναι η συνισταμένη της ταχύτητας \vec{v}_1 της κυκλικής κίνησης γύρω από τις γραμμές του μαγνητικού πεδίου και της ταχύτητας ηλεκτρικής ολίσθησης \vec{v}_E . Στην συγκεκριμένη περίπτωση όπου $\vec{E} = E_y \hat{y}$, $\vec{B} = B_z \hat{z}$, $\vec{v}_E = (cE/B) \hat{x}$. Ας σημειωθεί ότι η ηλεκτρική ολίσθηση είναι ανεξάρτητη του



Σχ. 2.4: Ηλεκτρική ολίσθηση φορτίου κάθετα στις δύο αμοιβαία κάθετες διευθύνσεις του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου.

φορτίου και επομένως η ολίσθηση αυτή δεν προκαλεί τη ροή ηλεκτρικού ρεύματος διότι $\vec{J}_E = ne(\vec{v}_E^+ - \vec{v}_E^-) = 0$. Ας δούμε στη συνέχεια τη γενικότερη περίπτωση όπου το ηλεκτρικό πεδίο έχει και συνιστώσα κατά μήκος του μαγνητικού πεδίου, $\vec{B} = B_0 \hat{z}$, $\vec{E} = E_y \hat{y} + E_z \hat{z}$. Η εξίσωση της κίνησης,

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right),$$

έχει συνιστώσες,

$$\hat{z} : m \frac{dv_z}{dt} = qE_z \Rightarrow v_z = \frac{qE_z}{m}t + v_{z0},$$

$$\hat{x} : m \frac{dv_x}{dt} = q \left(\frac{v_y}{c} B_z \right) \Rightarrow \dot{v}_x = \pm \omega_L v_y,$$

$$\hat{y} : m \frac{dv_y}{dt} = q \left(E_y - \frac{v_x B_z}{c} \right) \Rightarrow \dot{v}_y = \mp \omega_L v_x + \frac{q}{m} E_y,$$

ή,

$$\ddot{v}_y = -\omega_L^2 v_y,$$

$$\ddot{v}_x = \pm \omega_L \left(\frac{q}{m} E_y \mp \omega_L v_x \right) = -\omega_L^2 \left(-\frac{cE_y}{B} + v_x \right).$$

Επομένως,

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(v_x - \frac{cE_y}{B} \right) = -\omega_L^2 \left(v_x - \frac{cE_y}{B} \right),$$

και

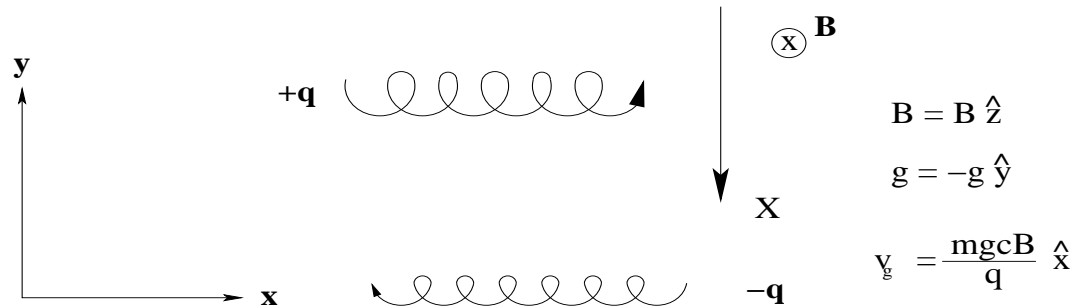
$$\begin{cases} v_y = v_{\perp} e^{i\omega_L t}, \\ v_x = \pm i v_{\perp} e^{i\omega_L t} + \frac{cE_y}{B}. \end{cases}$$

Δηλ. έχουμε ολίσθηση κατά μήκος του \hat{x} με ταχύτητα cE_y/B , κυκλική κίνηση γύρω από τον άξονα \hat{z} και σταθερή επιταχυνόμενη κίνηση στη διεύθυνση \hat{z} .

2.3.1 Πρόβλημα

- Σε ένα ουδέτερο πλάσμα η \vec{v}_E παράγει ηλεκτρικό ρεύμα ;
- Έχουμε πάντα την προηγούμενη ηλεκτρική ολίσθηση, ανεξάρτητα από το σχετικό μέγεθος των E, B ;
- Στο σύστημα αναφοράς που κινείται με v_E , το ηλεκτρικό πεδίο είναι 0 ;

2.4 Η γενική περίπτωση της ολίσθησης φορτίου



Σχ. 2.5: Η γενική περίπτωση της ολίσθησης φορτίου λόγω εξωτερικής δύναμης \vec{X} κάθετα στη διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου $B\hat{z}$.

Αν αντί του ηλεκτρικού πεδίου έχουμε μια εξωτερική δύναμη \vec{X} που δρά στο σωματίδιο, η εξίσωση κίνησης είναι:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{X} + \frac{q}{c} \vec{v} \times \vec{B} = q \left(\frac{\vec{X}}{q} + \frac{\vec{v} \times \vec{B}}{c} \right).$$

Επομένως η ολίσθηση λόγω της εξωτερικής δύναμης \vec{X} είναι:

$$\vec{v}_{\vec{X}} = \frac{c}{q} \frac{\vec{X} \times \vec{B}}{B^2} \quad (\vec{X} \perp \vec{B}).$$

Για παράδειγμα, αν $\vec{X} = m\vec{g}$,

$$\vec{v}_{\vec{g}} = \frac{mc}{qB^2} \vec{g} \times \vec{B}.$$

Είναι προφανές ότι η βαρυτική ολίσθηση έχει σαν αποτέλεσμα την εμφάνιση ροής ηλεκτρικού ρεύματος πυκνότητας,

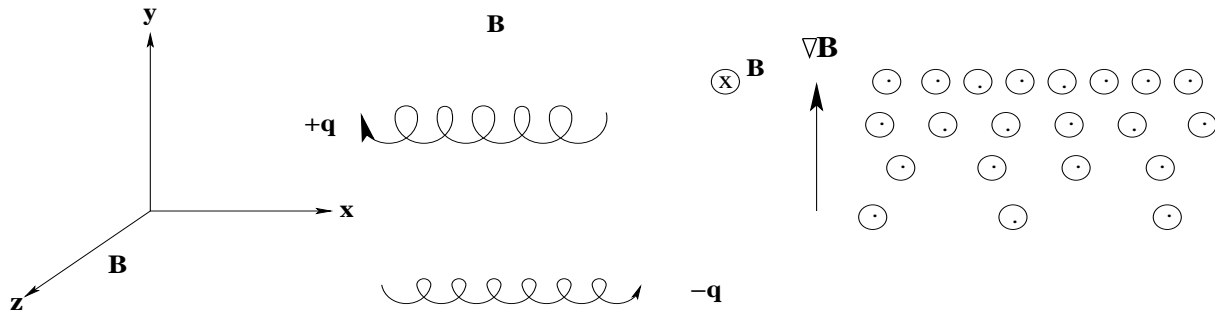
$$\vec{J}_g = ne(\vec{v}_g^+ - \vec{v}_g^-),$$

ή

$$\vec{J}_g = \frac{nc(m_e + m_p)}{B^2} \vec{g} \times \vec{B},$$

για πλάσμα πυκνότητας n αποτελούμενο από ηλεκτρόνια μάζας m_e και πρωτόνια μάζας m_p .

2.5 Ολίσθηση φορτίου λόγω ανομοιογένειας του μαγνητικού πεδίου κάθετα στις μαγνητικές γραμμές



Σχ. 2.6: Ολίσθηση φορτίου λόγω ανομοιογένειας του μαγνητικού πεδίου. Το μαγνητικό πεδίο είναι στη διεύθυνση $B\hat{z}$ και η ανομοιογένειά του είναι στη διεύθυνση \hat{y} , κάθετα στις μαγνητικές γραμμές.

Γιά ένα μαγνητικό πεδίο στη διεύθυνση \hat{z} που όμως μεταβάλλεται με το y , σε πρώτη προσέγγιση μπορούμε να γράψουμε,

$$B_z \approx B_0 + y \frac{\partial B_z}{\partial y}.$$

Έστω L η κλίμακα μέσα στην οποία αλλάζει σημαντικά το μέγεθος του μαγνητικού πεδίου. Τότε, για αποστάσεις $y \simeq r_L \ll L$ μπορούμε να αναπτύξουμε σε σειρά κρατώντας μόνο όρους πρώτης τάξης, $B_z \simeq B_0 + y \frac{\partial B_z}{\partial y}$. Θεωρώντας ότι ο όρος $y \partial B_z / \partial y$ είναι μικρός σε σχέση με το B_0 μέσα σε μια ακτίνα Larmor, και

$$F_y = -q \frac{v_x}{c} B_z(y) = -\frac{qv_{\perp}}{c} \cos \omega_L t \left[B_0 \pm r_L \cos \omega_L t \frac{\partial B_z}{\partial y} \right].$$

Παίρνοντας τη μέση τιμή της δύναμης μέσα σε μια κυκλική τροχιά έχουμε,

$$\langle F_y \rangle = \mp \frac{qv_{\perp} r_L}{c} \frac{1}{2} \frac{\partial B_z}{\partial y}.$$

Επομένως, η ταχύτητα ολίσθησης είναι

$$\vec{V}_{\vec{X}} = \frac{c}{qB^2} \vec{X} \times \vec{B} = \frac{c}{q|B|} \langle F_y \rangle \hat{x} = \mp \frac{v_{\perp} r_L}{B} \frac{1}{2} \frac{\partial B}{\partial y} \hat{x},$$

και στη γενικότερη περίπτωση,

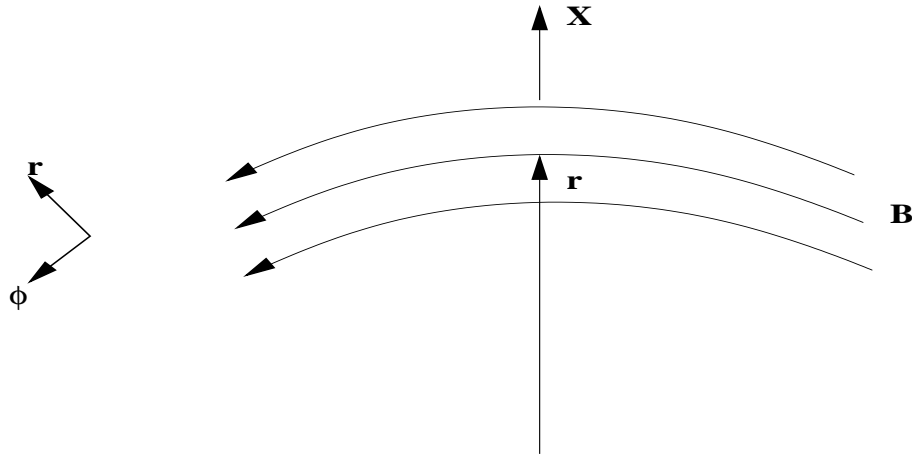
$$\vec{B} \simeq \vec{B}_0 + (\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B},$$

$$\vec{V}_{\vec{\nabla} B} = \pm \frac{1}{2} v_{\perp} r_L \frac{\vec{B} \times \vec{\nabla} B}{B^2}.$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι :

- Η μεταβολή του B_z στη διεύθυνση \hat{y} προκαλεί ολίσθηση στην διεύθυνση \hat{x} επειδή η τροχιά Larmor έχει μεγαλύτερη ακτίνα στα ασθενέστερα \vec{B} (σε μικρότερα y).
- Η ταχύτητα ολίσθησης $\vec{v}_{\nabla B}$ είναι αντίθετη για ηλεκτρόνια και ιόντα, άρα προκαλεί ηλεκτρικό ρεύμα.

2.6 Ολίσθηση φορτίου λόγω καμπυλότητας των μαγνητικών γραμμών



Σχ. 2.7: Ολίσθηση φορτίου λόγω καμπυλότητας των γραμμών του μαγνητικού πεδίου. Το μαγνητικό πεδίο είναι στη διεύθυνση $\vec{B} \hat{z}$ και η ανομοιογένειά του στην ακτινική διεύθυνση, κάθετα στις μαγνητικές γραμμές.

Έστω ότι κάθε γραμμή του μαγνητικού πεδίου \vec{B} είναι καμπυλομένη με ακτίνα καμπυλότητας r . Εάν τα φορτία έχουν μία συνιστώσα της ταχύτητάς τους κατά μήκος των καμπυλομένων γραμμών του μαγνητικού πεδίου \vec{B} , v_{\parallel} , αισθάνονται φυγόκεντρο δύναμη,

$$\vec{F} = \frac{mv_{\parallel}^2}{r} \hat{r},$$

και επομένως ολισθαίνουν κάθετα στην \vec{F} και το \vec{B} με ταχύτητα,

$$\vec{V}_r = \frac{c \vec{F} \times \vec{B}}{q B^2} = \frac{cmv_{\parallel}^2}{qB^2} \frac{\hat{r} \times \vec{B}}{r}.$$

Από το άλλο μέρος, ένα καμπυλομένο πεδίο $\vec{B} = B(r)\hat{\phi}$ στο κενό έχει και ανομοιογένεια στη διεύθυνση του $\vec{\nabla} B$. Συγκεκριμένα, από το νόμο του Ampere, εάν το ρεύμα $j_z = 0$ έχουμε,

$$(\vec{\nabla} \times \vec{B})_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rB_{\phi}) = 0 \rightarrow B_{\phi} = \frac{B_0 r_0}{r},$$

όπου τα B_0, r_0 είναι σταθερές. Συνεπώς,

$$\frac{\vec{\nabla} B}{B} = -\frac{\hat{r}}{r}.$$

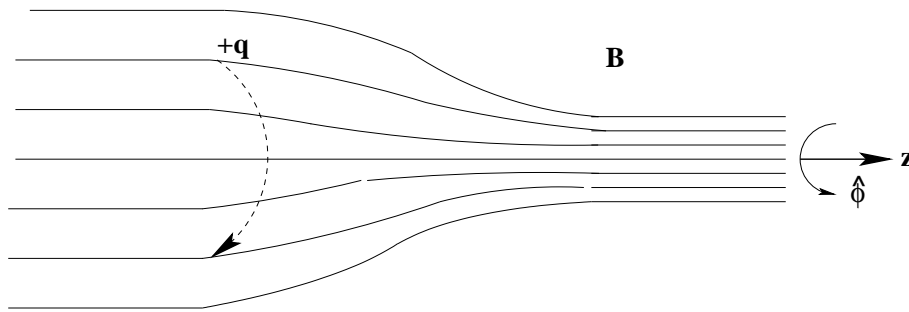
Η ταχύτητα ολίσθησης που αντιστοιχεί στην $\vec{\nabla} B$ είναι:

$$\vec{V}_{\vec{\nabla} B} = \pm \frac{1}{2} v_{\perp} r_L \frac{\vec{B} \times \vec{\nabla} B}{B^2} = \mp \frac{1}{2} \frac{m v_{\perp}^2 c}{q B^2} \frac{\vec{B} \times \hat{r}}{r} = \frac{1}{2} \frac{m c}{q} \frac{\hat{r} \times \vec{B}}{r B^2} v_{\perp}^2.$$

Προσθέτοντας τις δύο ταχύτητες ολίσθησης έχουμε :

$$\vec{V}_{\vec{r}} + \vec{V}_{\vec{\nabla} B} = \frac{m c}{q} \frac{\hat{r} \times \vec{B}}{r B^2} \left(v_{\parallel}^2 + \frac{1}{2} v_{\perp}^2 \right).$$

2.7 Ο Μαγνητικός Καθρέπτης



Σχ. 2.8: Σχηματικό διάγραμμα μαγνητικού καθρέπτη.

Έστω ένα μαγνητικό πεδίο που έχει αξονική συμμετρία, $\partial/\partial\phi = 0$ και το μέγεθός του μεταβάλλεται κατ'αμήκος της κεντρικής μαγνητικής γραμμής. Από την εξίσωση διατήρησης της μαγνητικής ροής $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ σε κυλινδρικές συντεταγμένες (r, ϕ, z) έχουμε ότι:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_r) + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0.$$

Ας υποθέσουμε ότι η ποσότητα $\partial B_z / \partial z$ δεν μεταβάλλεται με το r , ώστε σε πρώτη προσέγγιση να έχουμε,

$$\frac{\partial B_z}{\partial z} = \alpha B_0 = \text{σταθερό}, \quad B_z = B_0(1 + \alpha z).$$

Τότε,

$$B_r = \frac{f(z)}{r} - \frac{1}{2} B_0 \alpha r.$$

Αν για $r = 0$, $B_r = 0 \Rightarrow f(z) = 0$ και

$$B_r = -\frac{1}{2} r \left(\frac{\partial B_z}{\partial z} \right)_{r=0} = -\frac{1}{2} r B_0 \alpha.$$

Πώς κινούνται τα φορτισμένα σωματίδια μέσα στο ανομοιογενές αυτό μαγνητικό πεδίο $B_r(r)$, $B_z(z)$; Η εξίσωση κίνησης στη διεύθυνση \hat{z} είναι: ($v_\phi = \mp v_L$),

$$\dot{v}_z = -\frac{qv_\phi}{mc} B_r = \frac{qv_L}{mc} B_r = -\frac{qv_L}{mc} \frac{1}{2} r_L B_0 \alpha,$$

και επειδή $qB_0/mc = \omega_L$, $\omega_L r_L = v_L$,

$$\dot{v}_z = -\frac{1}{2} v_L^2 \alpha \Rightarrow v_z = v_0 - \frac{1}{2} v_L^2 \alpha t,$$

δηλ., έχουμε επιβράδυνση της κίνησης του φορτίου καθώς αυτό κινείται προς τη διεύθυνση του ισχυρού πεδίου.

2.8 Η σταθερότητα της μαγνητικής ροπής μ

Στην παράγραφο (2.2.3) δείξαμε ότι η μαγνητική ροπή μ στην κίνηση Larmor γράφεται,

$$\mu = \frac{1/2 m v_\perp^2}{B}.$$

Στην προηγούμενη παράγραφο (2.7) δείξαμε ότι η δύναμη F_z που ασκείται στο φορτίο μέσα σε μια περίοδο είναι

$$F_z = -\frac{qv_\phi B_r}{c} = -\frac{qv_L r_L B_0 \alpha}{2c} = -\frac{1/2 m v_L^2}{B_0} \frac{\partial B_z}{\partial z} = -\mu \frac{\partial B_z}{\partial z}.$$

Έστω s η διεύθυνση κατά μήκος του μαγνητικού πεδίου. Μπορούμε έτσι να γράψουμε την προηγούμενη έκφραση,

$$F_{\parallel} = -\mu \frac{\partial B}{\partial s} = m \frac{dv_{\parallel}}{dt},$$

$$m v_{\parallel} \frac{dv_{\parallel}}{dt} = -\mu \cdot \frac{ds}{dt} \frac{\partial B}{\partial s} = -\mu \frac{dB}{dt}, \quad \text{ή,} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v_{\parallel}^2 \right) = -\mu \frac{dB}{dt},$$

ή,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v_{\parallel}^2 + \mu B \right) - B \frac{d\mu}{dt} = 0.$$

Αλλά, $\mu B = m v_\perp^2 / 2$ και εφ' όσον η ολική κινητική ενέργεια διατηρείται:

$$\frac{d\mu}{dt} = 0, \quad \Rightarrow \mu = \text{σταθερή}.$$

Επομένως, καθώς το φορτίο κινείται σε περιοχή ισχυρού μαγνητικού πεδίου \vec{B} , η κάθετη συνιστώσα της ταχύτητάς του v_\perp αυξάνει εφ' όσον η μ είναι σταθερή. Αύξηση όμως της v_\perp συνεπάγεται μείωση της v_{\parallel} λόγω διατήρησης της ολικής ενέργειας. Αποτέλεσμα λοιπόν της σταθερότητας της μαγνητικής ροπής μ είναι η παγίδευση των φορτίων μέσα σε μαγνητικές φιάλες, ή, η ανάκλασή τους από μαγνητικούς καθρέπτες.

2.9 Παγίδευση φορτίων στη Μαγνητόσφαιρα - Πολικό Σέλας

Έστω ότι ένα φορτισμένο σωματίδιο βρίσκεται αρχικά πάνω στο ισημερινό επίπεδο της Γης, όπου το μαγνητικό πεδίο έχει μια ελάχιστη τιμή B_{min} . Καθώς το φορτίο κινείται ελικοειδώς γύρω από τις μαγνητικές γραμμές διατηρεί τη μαγνητική ροπή του μ και επομένως ο λόγος mv_{\perp}^2/B παραμένει σταθερός. Έστω ότι $v_{\parallel} = v \cos \alpha$, $v_{\perp} = v \sin \alpha$ όπου α είναι η γωνία κλίσης (pitch angle). Τότε, επειδή η ολική κινητική ενέργεια του σωματιδίου διατηρείται ($v = v_0$),

$$\frac{mv_{\perp,0}^2}{B_{min}} = \frac{mv_{\perp}^2}{B} \Rightarrow \sin^2 \alpha = \sin^2 \alpha_0 \frac{B}{B_{min}}.$$

Το φορτίο ανακλάται στο σημείο εκείνο όπου $\alpha = 90$ και το πεδίο εκεί είναι,

$$B = \frac{B_{min}}{\sin^2 \alpha_0},$$

Φορτία με μεγαλύτερη γωνία κλίσης, $\alpha > \alpha_0$ ανακλώνται σε περιοχές όπου το πεδίο είναι ασθενέστερο, ενώ εκείνα με μικρότερη γωνία κλίσης $\alpha < \alpha_0$, ανακλώνται μακρύτερα όπου το πεδίο είναι ισχυρότερο. Αν η α_0 είναι πολύ μικρή, τα φορτία δεν ανακλώνονται και διαφεύγουν. Έτσι αν B_{min} , B_{max} είναι οι τιμές του πεδίου στον ισημερινό και την ιονόσφαιρα, τότε,

$$\frac{B_{min}}{B_{max}} = \sin^2 \alpha_0.$$

Φορτία με $\alpha < \alpha_0$ εισέρχονται στην ιονόσφαιρα και παράγουν το **Πολικό Σέλας** σε ύψη 80–160 km.

2.10 Αδιαβατικές Αναλλοίωτες

Η κίνηση ενός σωματιδίου μπορεί να περιγραφεί από τις γενικευμένες συντεταγμένες (p_i, q_i) . Στη θεωρία Hamilton αποδεικνύεται ότι για κάθε κυκλική γενικευμένη συντεταγμένη q_i το αντίστοιχο ολοκλήρωμα δράσεως

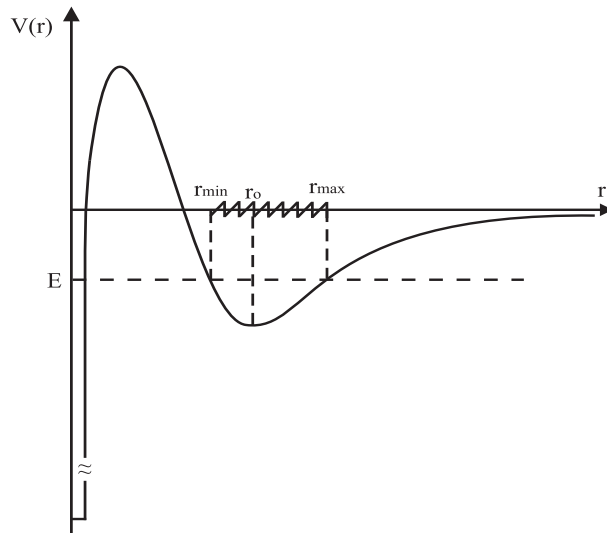
$$J_i = \oint_C p_i dq_i,$$

ολοκληρούμενο σε ένα πλήρη κύκλο C της μεταβλητής q_i αποτελεί μια σταθερά της κινήσεως. Όταν το σύστημα δεν είναι ακριβώς περιοδικό, αλλά παρουσιάζει μιά μικρή απόκλιση από την περιοδικότητα, το ολοκλήρωμα της δράσεως παραμένει σε πρώτη προσέγγιση σταθερό και ονομάζεται αδιαβατική αναλλοίωτη.

2.10.1 Παράδειγμα. Μονοδιάστατη κίνηση κοντά σε σημείο ισορροπίας

Έστω ότι ένα σωματίδιο κινείται εντός δυναμικού $V(r)$ κοντά στη θέση ισορροπίας του r_0 . Ως ένα αντιπροσωπευτικό παράδειγμα, ας θεωρήσουμε την καμπύλη της δυναμική-

ς ενέργειας αλληλεπίδρασης δύο ατόμων υδρογόνου στο μόριο του υδρογόνου H_2 η οποία έχει την μορφή του σχήματος. Όταν το ένα άτομο υδρογόνου είναι στο άπειρο



Σχ. 2.9: Καμπύλη δυναμικής ενέργειας αλληλεπίδρασης δύο ατόμων υδρογόνου στο μόριο του υδρογόνου.

εν σχέσει με το άλλο του μορίου του H_2 , το κάθε ηλεκτρόνιο εκάστου ατόμου ευρίσκειται στην θεμελιώδη ενεργειακή στάθμη του ατόμου του υδρογόνου E_0 . Όταν τα δύο άτομα είναι σε πεπερασμένη απόσταση r μεταξύ τους, λόγω της αλληλεπίδρασης των δύο ατόμων, το καθένα από τα δύο ηλεκτρόνια ευρίσκεται σε χαμηλότερη ενεργειακή στάθμη από εκείνη που θα είχε αν τα δύο άτομα ήταν στο άπειρο και δεν αλληλεπιδρούσαν. Δηλ., το κάθε ηλεκτρόνιο βρίσκεται τώρα στην ενεργειακή στάθμη $E_0 - \epsilon(r)$, ένθα $\epsilon(r)$ είναι το δυναμικό αλληλεπίδρασης (που εξαρτάται από την σχετική απόσταση των δύο ατόμων). Επομένως, η ενέργεια στην οποία ευρίσκονται τα δύο ηλεκτρόνια με αντιπαράλληλο σπιν (η χαμηλοενεργειακή στάθμη) είναι χαμηλότερη κατά $2\epsilon(r)$ αυτής που θα είχαν εάν τα άτομα ήταν σε άπειρη απόσταση αναμεταξύ τους. Επομένως, τό κάθε ηλεκτρόνιο αισθάνεται φαινομενικά ένα ελκτικό δυναμικό για μεγάλες αποστάσεις r στην καμπύλη $V(r)$. Από το άλλο μέρος, στις μικρότερες αποστάσεις υπερिशύει η ηλεκτροστατική άπωση των δύο πυρήνων ενώ όταν οι πυρήνες ευρεθούν εντός της εμβέλειας των πυρηνικών δυνάμεων, έλκονται. Δηλ., το απωστικό δυναμικό οφείλεται στην ηλεκτροστατική άπωση των δύο πυρήνων, ενώ το ελκτικό δυναμικό στις πολύ μικρές αποστάσεις οφείλεται στις μικρές εμβέλειας ελκτικές πυρηνικές δυνάμεις. Το ελάχιστο του δυναμικού στη θέση r_0 αντιστοιχεί στην απόσταση ισορροπίας των δύο πρωτονίων στο μόριο του υδρογόνου H_2 όπου η ενεργός έλξη που προέρχεται από το άπλωμα της κυματοσυνάρτησης των δύο ηλεκτρονίων σε όλο το μόριο, εξισορροπείται από την ηλεκτροστατική άπωση των δύο πυρήνων. Ετσι, για καμπύλες δυναμικού της μορφής του Σχ. 2.9, και όταν η ενέργεια είναι E , το επιτρεπτό διάστημα των αποστάσεων που μπορεί να βρεθεί το ηλεκτρόνιο είναι (r_{min}, r_{max}) όπου $E = V(r_{max}) = V(r_{min})$ και για $r_{min} < r < r_{max}$ έχουμε $E - V(r) = \frac{1}{2}mv^2 > 0$.

Μιά τυχούσα διαταραχή του σωματιδίου γύρω από τη θέση ισορροπίας του περι-

γράφεται από την εξίσωση

$$m\ddot{r} + \frac{dV}{dr} = 0.$$

Από το ολοκλήρωμα της ενέργειας, το οποίο προκύπτει πολλαπλασιάζοντας την προηγούμενη εξίσωση με \dot{r} και ολοκληρώνοντας έχουμε,

$$E = V(r) + \frac{1}{2}m\dot{r}^2.$$

Η ταχύτητα του σωματιδίου είναι

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2(E - V)}{m}}.$$

Η περίοδος T των μικρών ταλαντώσεων του σώματος γύρω από τη θέση της ισορροπίας του είναι,

$$T = \int_0^T dt = 2 \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{dr}{\sqrt{2(E - V)/m}}.$$

Η δράση J είναι,

$$J = \oint_C pdq = \oint_C m \left(\frac{dr}{dt} \right) dr = 2 \int_{r_{min}}^{r_{max}} \sqrt{2m(E - V)} dr,$$

κατά μήκος της κλειστής καμπύλης C από το r_{min} στο r_{max} και πάλι στο r_{min} .

Η παράγωγος της δράσεως J είναι,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{dJ}{dt} &= \sqrt{2m(E - V)} \frac{dr}{dt} \Big|_{r_{min}}^{r_{max}} + \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\sqrt{2m(E - V)} \right) dr = \\ &= \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{\sqrt{2m}}{2\sqrt{(E - V)}} \left(\frac{\partial E}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial t} \right) dr = \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{m}{\sqrt{2m(E - V)}} (m\dot{r})\ddot{r} dr = - \int_{r_{min}}^{r_{max}} dV = 0, \end{aligned}$$

δηλ., η δράση J είναι μιά σταθερά της κινήσεως.

Γράφοντας τη μετατόπιση $r(t) = A_o \cos \omega t$, το ολοκλήρωμα της δράσεως J είναι,

$$J = \int_0^T mA_o^2 \omega^2 \sin^2 \omega t dt = \frac{E}{\omega} \int_0^{2\pi} 2 \sin^2 \phi d\phi = \left(\frac{E}{\omega} \right) 2\pi = \text{σταθ.}.$$

Στην περίπτωση αυτού του περιοδικού συστήματος, το ολοκλήρωμα της δράσεως J είναι μιά σταθερά της κινήσεως.

2.10.2 Συστήματα που είναι κοντά στην περιοδικότητα

Εάν διαταραχθεί ελαφρά η περιοδικότητα του συστήματος έτσι ώστε το σύστημα να μην είναι ακριβώς περιοδικό, αποδεικνύεται ότι η ποσότητα της κινήσεως J παραμένει προσεγγιστικά επίσης σταθερή. Ελαφρά διαταραχή σημαίνει ότι η διάρκεια της διαταραχής

δt είναι πολύ μικρότερη της περιόδου του συστήματος, $\delta t \ll T$. Για παράδειγμα, έστω ότι οι ταλαντώσεις του προηγούμενου συστήματος έχουν ένα αργά μειούμενο πλάτος,

$$r(t) = A(t) \cos \omega t, \quad A(t) = A_0 e^{-\frac{t}{\tau}},$$

όπου τ είναι η αργή περίοδος της μεταβολής του πλάτους,

$$\tau \gg T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Τότε, το ολοκλήρωμα της δράσεως J είναι,

$$J = \int_0^{2\pi} \frac{mA^2}{\omega} \left[\left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dt} \right)^2 \cos^2 \phi + \omega^2 \sin^2 \phi \right] d\phi.$$

Επειδή υποθέσαμε ότι εντός μιάς περιόδου το πλάτος $A(t)$ αλλάζει ελάχιστα, μπορούμε να το βγάλουμε έξω από το ολοκλήρωμα,

$$J \approx \frac{mA^2\omega^2}{2\omega} \left[\frac{1}{\omega^2\tau^2} + 1 \right] 2\pi \approx \frac{mA^2\omega^2}{2\omega} 2\pi = \frac{E}{\omega} 2\pi.$$

Επομένως, σε πρώτη προσέγγιση το J είναι σταθερό, δηλ., είναι μία αδιαβατική αναλλοίωτη.

2.10.3 Περιοδική κίνηση φορτίου σε αργά μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο. Πρώτη αδιαβατική αναλλοίωτη

Την πρώτη αδιαβατική αναλλοίωτη την έχουμε ήδη συναντήσει και είναι η μαγνητική ροπή $\vec{\mu}$ που συνδέεται με την κίνηση Larmor του φορτισμένου σωματιδίου γύρω από τις γραμμές ενός μαγνητικού πεδίου. Σε ένα μαγνητικό πεδίο που μεταβάλλεται χρονικά αντιστοιχεί ένα χωρικά μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό πεδίο, σύμφωνα με το νόμο του Faraday,

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Αυτό το ηλεκτρικό πεδίο μεταβάλλει εν συνεχεία την κινητική ενέργεια του σωματιδίου T_{\perp} μέσα σε μια περίοδο κατά το ποσό,

$$\langle \Delta T_{\perp} \rangle = \oint_C q \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = q \int \int_S \vec{\nabla} \times \vec{E} \cdot d\vec{S} = -\frac{q}{c} \int \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

όπου η ολοκλήρωση είναι στην επιφάνεια S που περικλείει η τροχιά C του σωματιδίου.

Αν το μαγνητικό πεδίο δεν μεταβάλλεται σημαντικά μέσα σε μια τροχιά Larmor ($\partial \vec{B} / \partial t \simeq$ σταθερό) έχουμε,

$$\langle \Delta T_{\perp} \rangle \simeq \frac{q}{c} \frac{\Delta B}{\Delta t} \pi r_L^2 = \frac{q}{c} \Delta B \frac{\omega_L}{2\pi} \pi r_L^2 \simeq T_{\perp} \frac{\Delta B}{B}.$$

Επομένως,

$$\Delta \left(\frac{T_{\perp}}{B} \right) = 0, \quad \implies \mu = \frac{T_{\perp}}{B} \simeq \text{σταθερό.}$$

Ένας άλλος τρόπος να δείξουμε τη σταθερότητα της $\vec{\mu}$ είναι παίρνοντας τις συζυγείς μεταβλητές $p = mv_{\perp}r$, $q = \phi$ και να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα J_{\perp} σε μια κλειστή τροχιά Larmor,

$$J_{\perp} = \oint_C p \cdot dq = \oint_C mv_{\perp}r_L d\phi = 2\pi r_L m v_{\perp} = 2\pi \frac{mv_{\perp}^2}{\omega_L} = 4\pi \frac{mc}{|q|} \mu.$$

Αποδεικνύεται ότι η μ παραμένει σταθερή σε όλες τις τάξεις σε ένα ανάπτυγμα σε δυνάμεις του ω/ω_L . Όταν η συχνότητα μεταβολής του πεδίου ω δεν είναι μικρή εν σχέσει με την συχνότητα Larmor ω_L , η μαγνητική ροπή μ δεν είναι αδιαβατική αναλλοίωτη.

2.10.4 Η δεύτερη αδιαβατική αναλλοίωτη

Στη διαμήκη κίνηση των φορτίων κατά μήκος των μαγνητικών γραμμών έχουμε και το ολοκλήρωμα,

$$J_{\parallel} = \int mv_{\parallel} ds.$$

Πριν αποδείξουμε ότι η ποσότητα J_{\parallel} είναι αδιαβατική αναλλοίωτη, ας θεωρήσουμε το μηχανικό ανάλογο ενός σωματιδίου το οποίο ανακλάται από δύο τοιχώματα που συνεχώς προσεγγίζουν το ένα το άλλο με ταχύτητα V . Η αρχική ορμή του σωματιδίου πριν την ανάκλαση και η τελική μετά είναι,

$$P_{\text{αρχ}} = mv_{\parallel}, \quad P_{\text{τελ}} = m(v_{\parallel} + V).$$

Επομένως, η μεταβολή της ορμής του μετά τη σύγκρουσή του και με τα δύο τοιχώματα είναι,

$$\Delta p_{\parallel} = 2mV.$$

Ο χρόνος (περίοδος) μεταξύ των συγκρούσεων είναι $\Delta t = D/v_{\parallel}$ και επομένως ο μέσος ρυθμός μεταβολής της ορμής του είναι,

$$\frac{\Delta p_{\parallel}}{\Delta t} = \frac{2mVv_{\parallel}}{D}.$$

Αλλά,

$$2V = -\frac{dD}{dt}, \quad p_{\parallel} = mv_{\parallel},$$

και επομένως,

$$\frac{dp_{\parallel}}{dt} = -\frac{p_{\parallel}}{D} \frac{dD}{dt}, \quad \implies \frac{d}{dt}(p_{\parallel}D) = 0.$$

Επομένως, η ποσότητα $p_{\parallel}D$ παραμένει σταθερή και εάν ελαττώνεται η $D(t)$ αυξάνει η $v_{\parallel}(t)$. Για παράδειγμα, χτυπώντας με μια ρακέτα ένα μπαλάκι πάνω σε ένα τοίχο μπορούμε να αυξάνουμε συνεχώς την ενέργειά του!

Εν συνεχεία θα δώσουμε μιá απόδειξη του ότι η J_{\parallel} είναι μιá αδιαβατική αναλλοίωτη. Έστω T η ολική κινητική ενέργεια του σωματιδίου,

$$T = \frac{1}{2}mv_{\parallel}^2 + \frac{1}{2}mv_{\perp}^2 = \frac{1}{2}mv_{\parallel}^2 + \mu B.$$

Η J είναι συνάρτηση των T , s , t ,

$$J = \int_{s_1}^s \left[\frac{2}{m}(T - \mu B) \right]^{1/2} ds, \quad B = B(s, t), \quad \frac{ds}{dt} = v_{\parallel}.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dt} &= \left(\frac{\partial J}{\partial t} \right)_{s,T} + \left(\frac{\partial J}{\partial T} \right)_{s,t} \frac{dT}{dt} + \left(\frac{\partial J}{\partial s} \right)_{T,t} \frac{ds}{dt} \\ \left(\frac{\partial J}{\partial t} \right)_{s,T} &= \int_{s_1}^s \left[\frac{2}{m}(T - \mu B) \right]^{-1/2} \left[-\frac{\mu}{m} \frac{\partial B}{\partial t} \right] ds \\ \left(\frac{\partial J}{\partial T} \right)_{s,t} \frac{dT}{dt} &= \left[v_{\parallel} \dot{v}_{\parallel} + \frac{\mu}{m} \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\mu v_{\parallel}}{m} \frac{\partial B}{\partial s} \right] \int_{s_1}^s \left[\frac{2}{m}(T - \mu B) \right]^{-1/2} ds \\ &\quad - v_{\parallel} \int_{s_1}^s \left[\frac{2}{m}(T - \mu B) \right]^{-1/2} \frac{\mu}{m} \frac{\partial B}{\partial s} ds \\ \left(\frac{\partial J}{\partial s} \right)_{T,t} v_{\parallel} &= v_{\parallel} \left[\frac{2}{m}(T - \mu B) \right]^{1/2} \end{aligned}$$

Στα ‘τοιχώματα’ του ανακλαστήρα $v_{\parallel} = 0$ και

$$\frac{dJ}{dt} = - \int_{s_1}^{s_2} \frac{\mu}{m} \left[\frac{2}{m}(T - \mu B) \right]^{-1/2} \frac{\partial B}{\partial t} ds + \frac{\partial B}{\partial t} \int_{s_1}^{s_2} \frac{\mu}{m} \left[\frac{2}{m}(T - \mu B) \right]^{-1/2} ds.$$

Αν το $\frac{\partial B}{\partial t}$ μεταβάλλεται αργά, ώστε να μπορούμε να το πάρουμε έξω από το ολοκλήρωμα,

$$\frac{dJ}{dt} = 0 \quad \text{και επομένως} \quad J = \text{σταθερό}.$$

2.10.5 Πρόβλημα

Δείξτε ότι η μαγνητική ροή Φ διαμέσου της τροχιάς Larmor είναι σταθερή.

2.10.6 Πρόβλημα

Στη θεωρία Hamilton αποδεικνύεται ότι η ποσότητα $\oint p_i dq_i$ είναι μιá αδιαβατική σταθερά όταν η γενικευμένη συντεταγμένη q_i και η αντίστοιχη γενικευμένη ορμή p_i είναι

περιοδικές με την ίδια συχνότητα. Το ολοκλήρωμα είναι σε πλήρη κύκλο της q_i . Η Lagrangian ενός φορτίου στο e/m πεδίο είναι:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 - e\phi(\vec{r}, t) + \frac{e}{c}\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) ,$$

όπου

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} ,$$

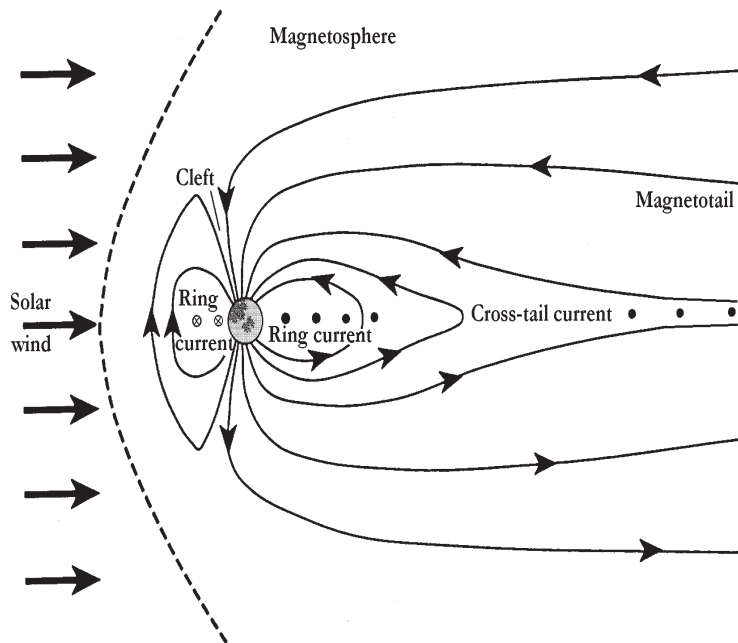
και

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} , \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} .$$

Δείξτε ότι οι αδιαβατικές σταθερές μ και J_{\perp} μπορούν να εξαχθούν από τα ακόλουθα ολοκληρώματα δράσεως,

$$\oint \vec{p}_{\perp} d\vec{r}_{\perp} \text{ και } \oint p_{\parallel} dr_{\parallel} .$$

2.11 Η Μαγνητόσφαιρα της Γης



Σχ. 2.10: Σχηματικό διάγραμμα της Γήινης μαγνητόσφαιρας.

Η μαγνητόσφαιρα είναι η περιοχή του χώρου γύρω από τη Γη, ή γύρω από κάποιο άλλο ουράνιο σώμα, μέσα στην οποία κυριαρχεί το μαγνητικό πεδίο της Γης, ή κάποιου άλλου ουράνιου σώματος. Εκτείνεται πάνω από την ιονόσφαιρα, από ύψος περί τα 100 km μέχρι απόστασης περίπου 10 γήινων ακτίνων προς τη πλευρά του Ήλιου. Προς την αντίθετη πλευρά φτάνει σε απόσταση περικύων εκατοντάδων ακτίνων Γης. Η μορφή της

μαγνητόσφαιρας δημιουργείται από την πίεση του ηλιακού ανέμου στο μεσοπλανητικό διάστημα. Αν δεν υπήρχε ο ηλιακός άνεμος, το γεωμαγνητικό πεδίο θα είχε διπολική μορφή. Επειδή όμως ο ηλιακός άνεμος παραμορφώνει και συμπιέζει το μαγνητικό πεδίο της Γης, η μαγνητόσφαιρα παίρνει το σχήμα σταγόνας που πέφτει στην επιφάνεια της γης. Προς τη σκοτεινή πλευρά της Γης, η περιοχή που αλλάζει η πολικότητα του γεωμαγνητικού πεδίου λέγεται φύλλο πλάσματος ή πλασμόστρωση.

Τα κύρια μορφολογικά χαρακτηριστικά της Γήινης μαγνητόσφαιρας είναι:

- Το κρουστικό κύμα (bow shock), η περιοχή όπου αρχίζει η αλληλεπίδραση ηλιακού ανέμου-γεωμαγνητικού πεδίου. Καθώς ο ηλιακός άνεμος πλησιάζει τη γη με υπερηχητική ταχύτητα, συναντά το «εμπόδιο» του γεωμαγνητικού πεδίου και το παρακάμπτει σαν ρευστό γύρω από κυρτή επιφάνεια.
- Η μαγνητόπαυση (magnetopause), το όριο της περιοχής που κυριαρχεί το μαγνητικό πεδίο της Γης. Η μαγνητόπαυση είναι μία μη ιδανική ασπίδα η οποία επιτρέπει να την διαπερνά πλάσμα χαμηλής ταχύτητας και έτσι δημιουργείται ένας λεπτός φλοιός που εφάπτεται κατά μήκος της μαγνητόπαυσης
- Η μαγνητοθήκη (magnetosheath) είναι ένα παχύ στρώμα πλάσματος με πάχος περίπου $3-6 R_{\oplus}$ γύρω από τον ισημερινό, πυκνότητας $0.3-0.5$ ιόντα/ cm^3 και ενέργεια για τα ιόντα $3-5 keV$. Σε αντίθεση με την εσωτερική μαγνητόσφαιρα που περιλαμβάνει τις ζώνες *VanAllen*, η περιοχή αυτή είναι αρκετα δυναμική: το πάχος και η πυκνότητα ενέργειας ποικίλουν σε μεγάλο βαθμό, και το πλάσμα συχνά ρέει γρήγορα σε διάφορες κατευθύνσεις, κυρίως προς την πλευρά της Γης. Στις «μαγνητικές υποκαταιγίδες» τμήματα της μαγνητοθήκης «συμπιέζονται» προς την πλευρά της Γης και την μαγνητουρά. Τα κινούμενα ιόντα προς την πλευρά της Γης κερδίζουν ενέργεια ενώ αυτά που κινούνται αντίθετα χάνονται στο διάστημα.
- Ο μανδύας Πλάσματος (plasma mantle) Η μαγνητόπαυση περιβάλλεται από μια περιοχή ταραγμένου πλάσματος που λέγεται μαγνητοφλοιός.
- Η πολική χοάνη (polar oval) είναι η περιοχή γύρω από τους μαγνητικούς πόλους όπου το μαγνητικό πεδίο είναι προσεγγιστικά ακτινικό.
- Η πλασμόσφαιρα (plasmasphe) και πλασμόπαυση (plasmopause). Το τμήμα της ιονισμένης ατμόσφαιρας της Γης που περιστρέφεται μαζί με τη Γη λέγεται πλασμόσφαιρα και το όριό της πλασμόπαυση.
- Το δακτυλιοειδές ρεύμα (ring current) μιá δακτυλιοειδής περιοχή γύρω από τη Γη σε απόσταση $3-5 R_{\oplus}$, με το κέντρο της πάνω στον ισημερινό. Κινείται κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού όταν το δούμε από το βόρειο πόλο. Τα φορτισμένα σωματίδια αυτής της περιοχής παράγουν μαγνητικό πεδίο αντίθετο με υατό της Γης και έτσι ένας παρατηρητής στη Γη παρατηρεί μειωμένη ένταση του μαγνητικού της πεδίου σε αυτή την περιοχή. Οι κύριοι φορείς του δακτυλιοειδούς ρεύματος είναι ιόντα, ως επι το πλείστον πρωτόνια.
- Το φύλλο Πλάσματος (plasmashheet)

- Οι ζώνες ακτινοβολίας Van Allen (Van Allen belts)
- Η μαγνητοουρά (magnetic tail) είναι η προέκταση του μαγνητικού πεδίου προς τη σκοτεινή πλευρά της Γης.
- Ο πολικός άνεμος (polar wind). Η υπερηχητική εκροή της ηλιακής ατμόσφαιρας στον μεσοπλανητικό χώρο.

Με αρκετά καλή προσέγγιση, το μαγνητικό πεδίο της Γης \vec{B} , μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι αυτό ενός μαγνητικού διπόλου $B \sim \mu/r^3$, μαγνητικής ροπής $\mu = 7.9 \times 10^{15} Tm^3 = 10^{25.9} Gauss cm^3$,

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{3(\vec{\mu} \cdot \vec{r})\vec{r} - \vec{r}^2}{|\vec{r}|^5}, \quad B_r = -\frac{2\mu \sin \lambda}{r^3}, \quad B_\lambda = \frac{\mu \cos \lambda}{r^3},$$

όπου λ είναι το γεωμαγνητικό πλάτος και μ το μέγεθος της μαγνητικής διπολικής ροπής της Γης με διεύθυνση από Βορρά προς Νότο. Ο γεωμαγνητικός άξονας της Γης σχηματίζει μία γωνία περίπου 11° με τον άξονα περιστροφής της Γης, δηλ., ο γεωμαγνητικός νότος απέχει περί τις 11° από το γεωγραφικό Βορρά, που σχηματίζει γωνία περίπου 11° με τον άξονα περιστροφής της Γης και έχει περίοδο αναστροφής περί τα 700.000 έτη. Το μέγεθος του μαγνητικού πεδίου της Γης στο Ισημερινό επίπεδο είναι

$$B(r) = B_\oplus \left(\frac{R_\oplus}{r} \right)^3,$$

με τιμή της έντασης του μαγνητικού πεδίου της Γης στον ισημερινό, $R_\oplus = 6500 km$, $B_\oplus = 0.32 Gauss$.

2.11.1 Εξίσωση μιας μαγνητικής γραμμής

Ας θεωρήσουμε μία τυχούσα μαγνητική γραμμή που τέμνει την επιφάνεια της Γης σε τόπο γεωγραφικού πλάτους λ_0 , π.χ., τη μαγνητική γραμμή που τέμνει την επιφάνεια της Γης σε τόπο γεωγραφικού πλάτους $\lambda_0 = 80^\circ$.

Ολοκληρώνοντας τη διαφορική εξίσωση που ορίζει τις μαγνητικές γραμμές,

$$\frac{B_r}{B_\lambda} = \frac{dr}{rd\lambda},$$

προκύπτει η πολική εξίσωση της μαγνητικής αυτής γραμμής που τέμνει την επιφάνεια της Γης $r = R_\oplus$ σε τόπο γεωμαγνητικού πλάτους λ_0 ,

$$\frac{r}{R_\oplus} = \frac{\cos^2 \lambda}{\cos^2 \lambda_0}.$$

Είναι εύκολο να υπολογισθεί η μέγιστη και ελάχιστη τιμή του μαγνητικού πεδίου κατά μήκος κάποιας γραμμής και σε ποιές τιμές ακτινικής απόστασης και γεωμαγνητικού πλάτους λ αυτή αντιστοιχεί.

2.11.2 Υπολογισμός της απόστασης της Μαγνητόπαυσης

Για να κατανοήσουμε την αλληλεπίδραση της ροής φορτισμένων σωματιδίων σε μία περιοχή όπου υπάρχει ισχυρό μαγνητικό πεδίο και τη δημιουργία της μαγνητόπαυσης στη γήινη μαγνητόσφαιρα, μπορούμε να θεωρήσουμε το εξής απλοποιημένο παράδειγμα (φύλλο ρεύματος Chapman-Ferraro). Σε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων $Oxyz$ έστω ότι υπάρχει ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο $B_z \hat{z}$ στην περιοχή $y < 0$. Έστω ότι έχουμε μία ροή φορτισμένων σωματιδίων, πρωτονίων και ηλεκτρονίων που προσπίπτουν στη διεύθυνση $-\hat{y}$ στο επίπεδο $y = 0$. Όταν ένα πρωτόνιο ή ένα ηλεκτρόνιο εισέρχεται με ταχύτητα $\vec{v} = -v\hat{y}$ στην περιοχή $y < 0$ υφίσταται μια δύναμη Lorentz, $\vec{v} \times \vec{B}$ η οποία και το εξαναγκάζει σε κυκλική τροχιά με ακτίνα r_L , αριστερόστροφα για το πρωτόνιο, δεξιόστροφα για το ηλεκτρόνιο. Έτσι, το πρωτόνιο και το ηλεκτρόνιο αφού διαγράψουν ένα ημικύκλιο Larmor με αντίθετες φορές εξέρχονται με ταχύτητα $\vec{v} = v\hat{y}$, πάλι στην περιοχή $y > 0$ από όπου προήλθαν. Η κίνηση όμως των πρωτονίων και ηλεκτρονίων στις διευθύνσεις \hat{x} και $-\hat{x}$, αντίστοιχα, δημιουργεί ένα ηλεκτρικό ρεύμα στη διεύθυνση \hat{x} . Συγκεκριμένα, μπορούμε να υπολογίσουμε τον αριθμό των πρωτονίων που «κόβουν» το επίπεδο $x - z$, π.χ., το επίπεδο $y = y_0$ ανά μονάδα χρόνου. Επειδή nev είναι ο αριθμός των πρωτονίων που διέρχονται από τη μονάδα της επιφάνειας $dz dy$, τότε $2r_L nev$ είναι ο αριθμός των πρωτονίων που διέρχονται ανά μονάδα μήκους dz προς την διεύθυνση \hat{x} . Αυτό αντιστοιχεί σε ένα ρεύμα στη διεύθυνση $-\hat{x}$, με ένταση δI_x ανά μονάδα μήκους dz ,

$$\frac{\delta I_x}{dz} = 2r_L nev = \frac{2nm_p c}{B_z} v^2,$$

επειδή $r_L = mvc/eB$. Εφαρμόζοντας το νόμο του Ampere, αυτό το ρεύμα αντιστοιχεί στο πεδίο,

$$B_z = \frac{4\pi}{c} \frac{\delta I_x}{dz}.$$

Αντικαθιστώντας την τιμή του $\delta I_x/dz$, έχουμε,

$$nm_p v^2 = \frac{B_z^2}{8\pi}.$$

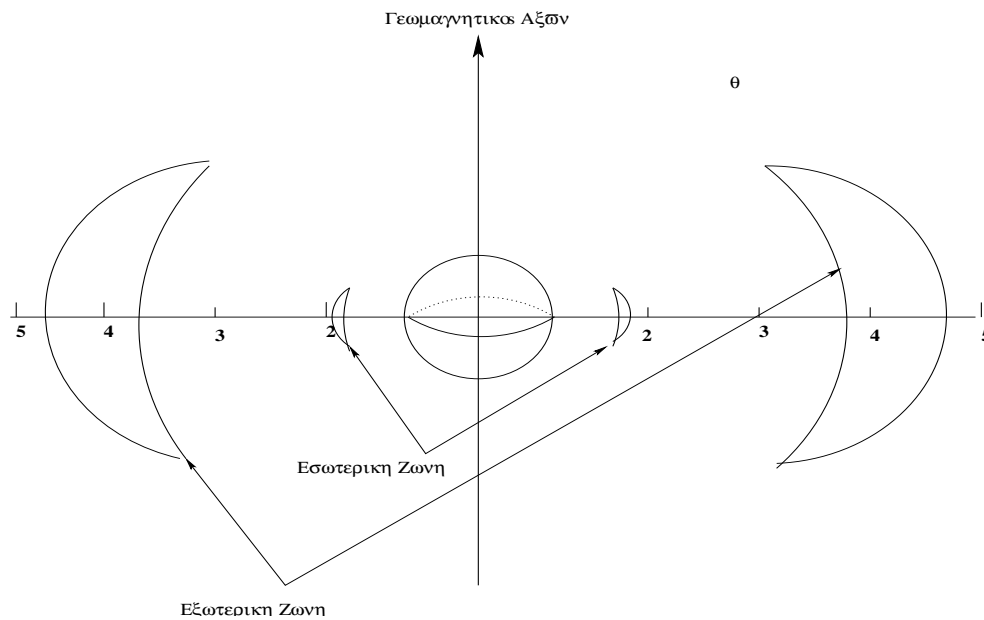
Με άλλα λόγια, η απόσταση της μαγνητόπαυσης R_{mp} υπολογίζεται εξισώνοντας την πίεση του μαγνητικού πεδίου της Γης με τη δυναμική πίεση του ηλιακού ανέμου, $(1/2)\rho_{sw} V_{sw}^2$, όπου $2\rho_{sw} \approx n_{sw} m_p$ και V_{sw} είναι η πυκνότητα και ταχύτητα του ηλιακού ανέμου στην απόσταση της μαγνητόπαυσης, αντίστοιχα. Έτσι,

$$\frac{R_{mp}}{R_{\oplus}} = \left(\frac{B_{\oplus}^2}{4\pi\rho_{sw} V_{sw}^2} \right)^{1/6}.$$

Από αυτή τη σχέση, μπορούμε να δείξουμε ότι για τις τυπικές τιμές της πυκνότητας $n = n_{sw} = 7 \text{ cm}^{-3}$ και ταχύτητας του Ηλιακού ανέμου, $v = V_{sw} = 400 \text{ km/sec}$, η ακτίνα της Μαγνητόπαυσης είναι $R_{mp} \approx 9.4 R_{\oplus}$.

2.11.3 Οι ζώνες ακτινοβολίας Van Allen

Οι περιοχές της γήινης μαγνητόσφαιρας όπου ευρίσκονται παγιδευμένες μεγάλες πυκνότητες ενεργειακών φορτισμένων σωματιδίων ονομάζονται ζώνες Van Allen. Η προέλευση αυτών των σωματιδίων είναι είτε ο Ηλιακός Άνεμος, είτε η ιονόσφαιρα. Η ενέργειά τους κυμαίνεται από eV έως MeV (τυπική ενέργεια των πρωτονίων είναι περί τα $50 keV$ για τα πρωτόνια και κάπως χαμηλότερη για τα ηλεκτρόνια) και οι τυπικές πυκνότητες είναι περίπου 1 σωματίδιο ανά cm^3 . Τα υψηλότερης ενέργειας σωματίδια προέρχονται από παγιδευμένες κοσμικές ακτίνες (Κ.Α.) καθώς και τα προϊόντα διάσπασης νετρονίων που παράγουν οι Κ. Α. καθώς αλληλεπιδρούν με την ατμόσφαιρα. Η εσωτερική ζώνη van Allen επικεντρώνεται σε απόσταση περί τις $2R_{\oplus}$ και η εξωτερική περί τις $4R_{\oplus}$. Ανακαλύφθηκαν από την ερευνητική ομάδα του van Allen η οποία ανέλυε δεδομένα παρατηρήσεων που ελήφθησαν με ανιχνευτές Geiger πάνω στο δορυφόρο Explorer I το 1958.



Σχ. 2.11: Σχηματικό διάγραμμα των ζωνών ακτινοβολίας van Allen.

2.11.4 Γωνία κλίσης ενός φορτισμένου σωματιδίου σε τυχόν γεωμαγνητικό πλάτος λ

Εαν η γωνία κλίσης ενός φορτισμένου σωματιδίου στον ισημερινό είναι α_0 , μπορούμε να υπολογίσουμε τη γωνία κλίσης του $\alpha(\lambda)$ σε κάποιο γεωμαγνητικό πλάτος λ κατά μήκος μιά τυχούσας μαγνητικής γραμμής που τέμνει την επιφάνεια της Γης σε τόπο γεωμαγνητικού πλάτους λ_0 . Επειδή το μέγεθος του μαγνητικού πεδίου είναι,

$$B(r, \lambda) = \frac{\mu}{r^3}(1 + 3 \sin^2 \lambda)^{1/2},$$

τότε, κατά μήκος μιά μαγνητικής γραμμής που τέμνει την επιφάνεια της Γης σε τόπο γεωμαγνητικού πλάτους λ_o έχουμε, $r/R_{\oplus} = \cos^2 \lambda / \cos^2 \lambda_o$, οπότε

$$B(\lambda) = \frac{\mu}{R_{\oplus}^3} \frac{\cos^6 \lambda_o}{\cos^6 \lambda} (1 + 3 \sin^2 \lambda)^{1/2},$$

$$B_{min} = B(\lambda = 0) = \frac{\mu}{R_{\oplus}^3} \cos^6 \lambda_o,$$

$$B_{max} = B(\lambda_o) = \frac{\mu}{R_{\oplus}^3} (1 + 3 \sin^2 \lambda_o)^{1/2},$$

και χρησιμοποιώντας την εξίσωση του μαγνητικού καθρέπτη έχουμε,

$$\sin^2 a(\lambda) = \sin^2 a_o \frac{B(\lambda)}{B_{min}}, \quad \sin^2 a(\lambda) = \sin^2 a_o \frac{(1 + 3 \sin^2 \lambda)^{1/2}}{\cos^6 \lambda}.$$

Στη δεδομένη μαγνητική γραμμή που τέμνει την επιφάνεια της Γης σε τόπο γεωγραφικού πλάτους $\lambda = \lambda_o$, πάνω στον ισημερινό η αρχική γωνία κλίσης των ηλεκτρονίων που τελικά φθάνουν στην ιονόσφαιρα στη συγκεκριμένη γραμμή $\lambda = \lambda_o$ πρέπει να είναι μεταξύ 0 και μιάς μέγιστης τιμής α_{max} ,

$$\sin^2 \alpha_{max} = \frac{B_{min}}{B_{max}} = \frac{\cos^6 \lambda_o}{(1 + 3 \sin^2 \lambda_o)^{1/2}}.$$

Όλα τα φορτισμένα σωματίδια που ξεκινούν από τον ισημερινό με γωνία κλίσης α τέτοια $0 < \alpha < \alpha_{max}$ εισέρχονται στην ιονόσφαιρα και παράγουν το Πολικό Σέλας.

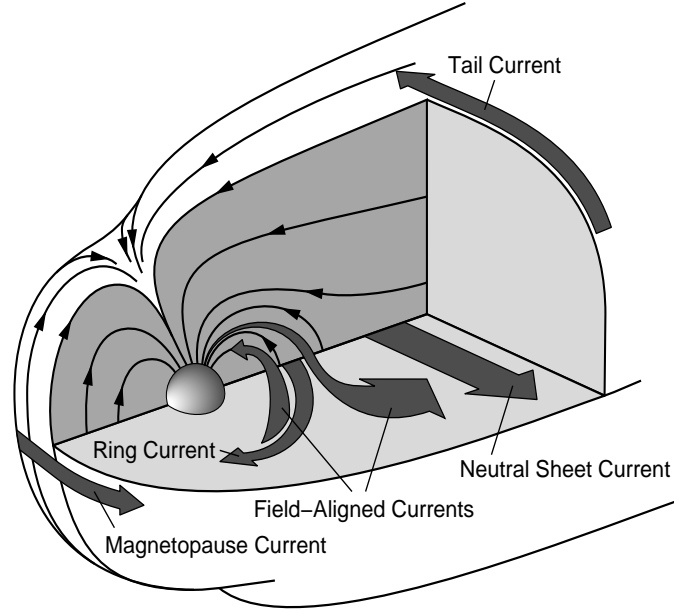
2.11.5 Ποσοστό ηλεκτρονίων που φθάνουν στην ιονόσφαιρα

Άς υποθέσουμε ότι τα προσπίπτοντα ηλεκτρόνια στον γεωμαγνητικό ισημερινό έχουν ισοτροπική κατανομή ταχύτητας, δηλ., το διάνυσμα της ταχύτητάς \vec{v} ευρίσκεται πάνω σε τυχόν σημείο της σφαίρας ακτίνας v στο χώρο των ταχυτήτων. Τί ποσοστό από αυτά ολισθύνοντας κατά μήκος των γραμμών θα φθάσει στην ιονόσφαιρα γιά να δώσει εκεί το Πολικό Σέλας ;

Το ποσοστό P των ηλεκτρονίων που φθάνει στην ιονόσφαιρα αντιστοιχεί μόνο σε εκείνα που στο χώρο των ταχυτήτων έχουν το διάνυσμα της ταχύτητάς τους να ευρίσκονται μέσα σε στερεά γωνία Ω γύρω από τη διεύθυνση της μαγνητικής γραμμής, ανοίγματος α_{max} γύρω από τον άξονα z , δηλ., έχουν γωνία κλίσης μεταξύ 0 και α_{max} . Επειδή η στοιχειώδης στερεά γωνία $d\Omega$ είναι ίση με $d\Omega = 2\pi(v \sin a)(v da)/v^2$, έχουμε

$$P = \frac{\Omega}{4\pi} = \frac{2}{4\pi} \int_0^{\alpha_{max}} 2\pi \sin a da = 1 - \cos \alpha_{max} = 1 - (1 - \sin^2 \alpha_{max})^{1/2},$$

όπου το $\sin^2 \alpha_{max}$ δίδεται από την προηγούμενη σχέση.



Σχ. 2.12: Τριδιάστατη αναπαράσταση των διαφόρων ρευμάτων της γήινης μαγνητόσφαιρας.

2.11.6 Περίοδος μεταξύ δύο διαδοχικών ανακλάσεων ενός φορτισμένου σωματιδίου

Η περίοδος T_2 μεταξύ δύο ανακλάσεων ενός φορτισμένου σωματιδίου στο μαγνητικό καθρέπτη του πεδίου της Γης είναι,

$$T_2 = 4 \int_0^{\lambda_m} \frac{1}{v_{\parallel}} \left(\frac{ds}{d\lambda} \right) d\lambda = \frac{4}{v} \int_0^{\lambda_m} \frac{ds/d\lambda}{\cos \alpha(\lambda)} d\lambda.$$

Αντικαθιστώντας στην ολοκληρωτέα συνάρτηση,

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\lambda^2}, \quad \frac{r}{R_{\oplus}} = \frac{\cos^2 \lambda}{\cos^2 \lambda_o},$$

έχουμε

$$\frac{ds}{d\lambda} = \frac{R_{\oplus}}{\cos^2 \lambda_o} \cos \lambda (1 + 3 \sin^2 \lambda)^{1/2} d\lambda.$$

Επίσης,

$$\cos \alpha(\lambda) = [1 - \sin^2 \alpha(\lambda)]^{1/2}, \quad \sin^2 \alpha(\lambda) = \sin^2 \alpha_o \frac{(1 + 3 \sin^2 \lambda)^{1/2}}{\cos^6 \lambda}.$$

Τα φορτισμένα σωματίδια από τον ισημερινό ($\lambda = 0$) φθάνουν μέχρι πλάτος λ_{max} όπου και ανακλώνται, $\alpha(\lambda) = \pi/2$,

$$\sin^2 \alpha(\lambda) = 1 = \sin^2 \alpha_o \frac{(1 + 3 \sin^2 \lambda_{max})^{1/2}}{\cos^6 \lambda_{max}},$$

$$\implies \cos^6 \lambda_{max} - \sin^2 a_o (1 + 3 \sin^2 \lambda_{max})^{1/2} = 0.$$

Η εξίσωση αυτή μας προσδιορίζει το λ_{max} για δεδομένο a_o στον ισημερινό. Ολοκληρώνοντας από 0 μέχρι λ_{max} , έχουμε τελικά,

$$T_2 = \frac{4R_{\oplus}}{v \cos^2 \lambda_o} I, \quad I = \int_0^{\lambda_{max}} \frac{\cos \lambda (1 + 3 \sin^2 \lambda)^{1/2} d\lambda}{[1 - \sin^2 a_o \frac{(1+3 \sin^2 \lambda)^{1/2}}{\cos^6 \lambda}]}$$

Το ολοκλήρωμα I υπολογίζεται αριθμητικά, $I \approx 1.30 - 0.56 \sin a_o$. Έτσι, έχουμε τελικά,

$$T_2 \approx \frac{4R_{\oplus}}{v \cos^2 \lambda_o} (1.30 - 0.56 \sin a_o).$$

Προσεγγιστικά, ο χρόνος T_2 είναι,

$$T_2 = \frac{2L_b}{\langle v_{\parallel} \rangle} \approx (5 \text{ min}) \left(\frac{L_b}{10 R_{\oplus}} \right) \left(\frac{m}{m_p} \right)^{1/2} \left(\frac{1 \text{ keV}}{E_{\parallel}} \right)^{1/2},$$

όπου L_b είναι η απόσταση ανάμεσα στα σημεία ανάκλασης, κατά μήκος της μαγνητικής γραμμής.

2.11.7 Το δακτυλιοειδές ρεύμα της μαγνητόσφαιρας

Έστω ότι έχουμε πρωτόνια ενέργειας $E = 1 \text{ eV}$ και ηλεκτρόνια ενέργειας $E = 30 \text{ keV}$ με πυκνότητα $n = 10 \text{ cm}^{-3}$ στο γήινο μαγνητικό πεδίο $B = 0.3/R^3 \text{ Gauss}$ στην απόσταση $R = 5R_{\oplus}$. Θα υπολογίσουμε την ταχύτητα ολίσθησης $\vec{v}_{\nabla B}$, τη διεύθυνση ολίσθησης, το χρόνο για μία πλήρη περιφορά γύρω από τη Γή καθώς και την πυκνότητα του αντίστοιχου ρεύματος.

Κατ' αρχήν, το μέτρο της ταχύτητας ολίσθησης είναι:

$$\vec{v}_{\nabla B} = \pm \frac{1}{2} v_{\perp} r_L \frac{|\vec{B} \times \vec{\nabla} B|}{B^2} \simeq \frac{1}{2} v_{\perp} r_L \left| \frac{\vec{\nabla} B}{B} \right|,$$

$$\left| \frac{\vec{\nabla} B}{B} \right| = \frac{3}{5R_{\oplus}}, \quad \frac{1}{2} v_{\perp} r_L = \frac{1}{2} \frac{v_{\perp}^2}{\omega_L} = \frac{1}{2} \frac{2kT/m}{qB/mc}.$$

Επομένως,

$$|\vec{v}_{\nabla B}| = c \frac{kT}{qB} \frac{3}{5R_{\oplus}} = \frac{3 \times 10^{10} (kT)_{eV} \times 1.6 \times 10^{-12}}{4.8 \times 10^{-10} \times \frac{0.3}{125}} \frac{3}{5 \times 6.4 \times 10^8},$$

$$|\vec{v}_{\nabla B}| = 39 (kT)_{eV} \text{ cm/sec}.$$

Για τα πρωτόνια, $v_{\nabla B}^p = 39 \text{ cm/sec}$ με διεύθυνση κίνησης από ανατολικά προς τα δυτικά, ενώ για τα ηλεκτρόνια, $v_{\nabla B}^e = -1.17 \times 10^6 \text{ cm/sec}$ με διεύθυνση κίνησης από δυτικά προς τα ανατολικά.

Ο χρόνος T για μια περιφορά γύρω από τη $\Gamma\eta$ είναι για τα ηλεκτρόνια,

$$T_e = \frac{2\pi r}{|\vec{v}_{\nabla B}^e|} = \frac{\pi \times 6.4 \times 10^9}{1.17 \times 10^6} \simeq 1.72 \times 10^4 \text{ sec} \Rightarrow T_e \sim 4.8 \text{ ώρες},$$

ενώ για τα πρωτόνια,

$$T_p = T_e \frac{|\vec{v}_{\nabla B}^e|}{|\vec{v}_{\nabla B}^p|} = 3 \times 10^4 T_e \simeq 16.4 \text{ έτη}.$$

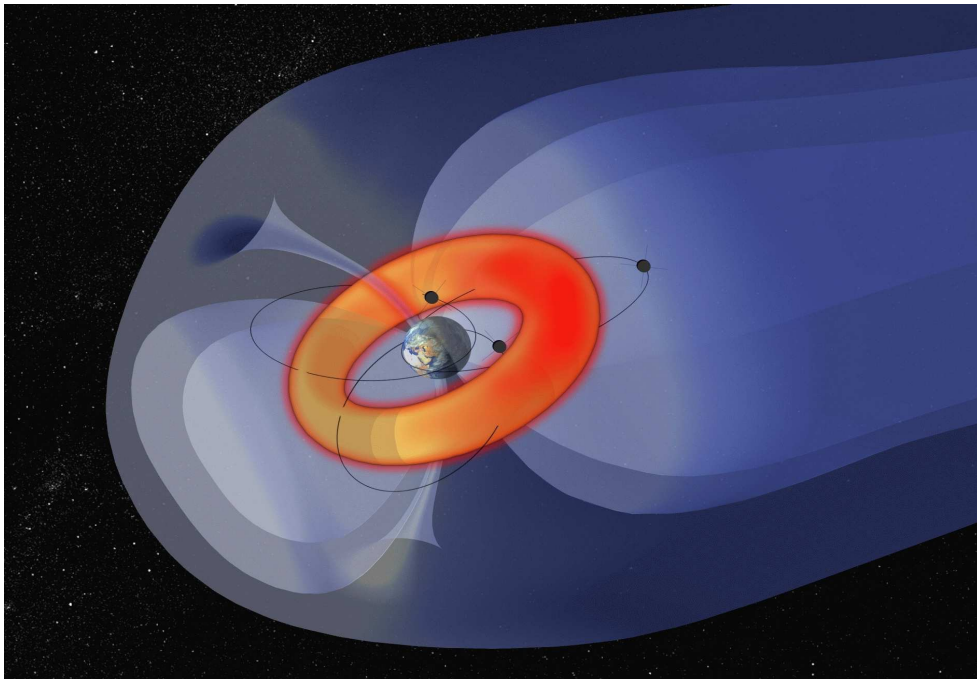
Το ρεύμα που αντιστοιχεί στην κίνηση των ηλεκτρονίων με ταχύτητα $\vec{v}_{\nabla B}^e$ έχει πυκνότητα,

$$|\vec{J}_e| = ne|\vec{v}_{\nabla B}^e| = 10^7 \times 1.6 \times 10^{-19} \times 1.17 \times 10^4 \text{ A/m}^2 = 1.87 \times 10^{-8} \text{ A/m}^2.$$

ενώ το ρεύμα λόγω της κίνησης των πρωτονίων με ταχύτητα $\vec{v}_{\nabla B}^p$ είναι αμελητέο:

$$|\vec{J}_p| = ne|\vec{v}_{\nabla B}^p| = 10^7 \times 1.6 \times 10^{-19} \times 0.39 = \frac{1}{30000} |\vec{J}_e|.$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι κατά τη διάρκεια των μαγνητικών καταιγίδων, το δακτυλιοειδές ρεύμα αυξάνει σημαντικά και μεγάλο μέρος της ενέργειάς του καταναλίσκεται στην πολική χοάνη και το πολικό σέλας.



Σχ. 2.13: Σχηματική αναπαράσταση της Μαγνητόσφαιρας της Γής με το δακτυλιοειδές ρεύμα.

2.11.8 Χαρακτηριστικοί χρόνοι κίνησης σωματιδίων στη Μαγνητόσφαιρα της Γης

Αξίζει να υπολογίσουμε τους χαρακτηριστικούς χρόνους των περιοδικών κινήσεων των φορτίων στη Γήινη μαγνητόσφαιρα : Ο χρόνος T_1 για μια πλήρη περιστροφή στην τροχιά Larmor είναι,

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_L} = \frac{2\pi\gamma mc}{qB} \approx (0.66 \text{ sec}) \frac{100 \text{ nT}}{B} \frac{m}{m_p},$$

όπου m/m_p είναι ο λόγος της μάζας του σωματιδίου προς την μάζα του πρωτονίου ($=1/1836$ για το ηλεκτρόνιο) και $1 \text{ nanotesla (nT)} = 10^{-9} \text{ Tesla} = 10^{-5} \text{ Gauss}$.

Η ακτίνα Larmor είναι,

$$r_L = \frac{mv_{\perp}}{|q|B} \approx (46 \text{ km}) \left(\frac{m}{m_p}\right)^{1/2} \left(\frac{E_{\perp}}{1 \text{ keV}}\right)^{1/2} \frac{100 \text{ nT}}{B}.$$

Ήδη έχουμε υπολογίσει το χρόνο T_2 της ανακλασης στο γήινο καθρέπτη,

$$T_2 = \frac{2L_b}{\langle v_{\parallel} \rangle} \approx (5 \text{ min}) \left(\frac{L_b}{10 R_{\oplus}}\right) \left(\frac{m}{m_p}\right)^{1/2} \left(\frac{1 \text{ keV}}{E_{\parallel}}\right)^{1/2},$$

όπου L_b είναι η απόσταση ανάμεσα στα σημεία ανάκλασης, κατά μήκος της μαγνητικής γραμμής

Τέλος, ο χρόνος T_3 για μια πλήρη περιφορά του φορτίου γύρω από τη Γη είναι,

$$T_3 = \frac{2\pi r}{|v_{\nabla B}|} \approx (56 \text{ h}) \left(\frac{r}{5R_{\oplus}}\right)^2 \frac{B}{100 \text{ nT}} \frac{1 \text{ keV}}{E}.$$

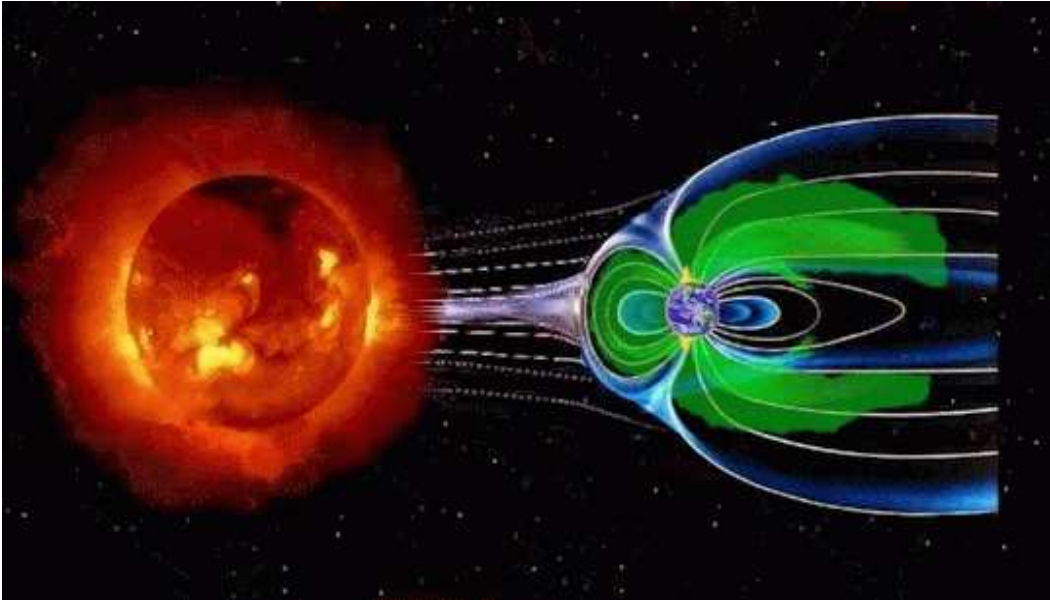
Στον ακόλουθο πίνακα δίδονται οι προηγούμενοι χαρακτηριστικοί χρόνοι σε ύψος 2000 km στον Ισημερινό.

Ενέργεια	Φορτίο	$r_L(\text{cm})$	$T_1(\text{sec})$	$T_2(\text{sec})$	$T_3(\text{min})$
50keV	e^{\pm}	5×10^3	2×10^{-6}	0.25	690
1MeV	e^{\pm}	3×10^4	7×10^{-6}	0.10	53
1MeV	p	1×10^6	4×10^{-3}	2.2	32
10MeV	p	3×10^6	4×10^{-3}	0.65	3
500MeV	p	3×10^7	6×10^{-3}	0.11	0.08

Παρατηρούμε ότι $T_1 \ll 1 \text{ sec}$, $T_2 < 1 \text{ sec}$, ενώ η περίοδος μίας πλήρους περιστροφής γύρω από τη Γη T_3 είναι της τάξεως των ωρών.

2.12 Διαστημικός Καιρός

Το μεσοπλανητικό διάστημα περιέχει χαμηλής ενέργειας φορτισμένα σωματίδια, φωτόνια, ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία, σκόνη και κοσμικές ακτίνες. Αν και η πυκνότητα



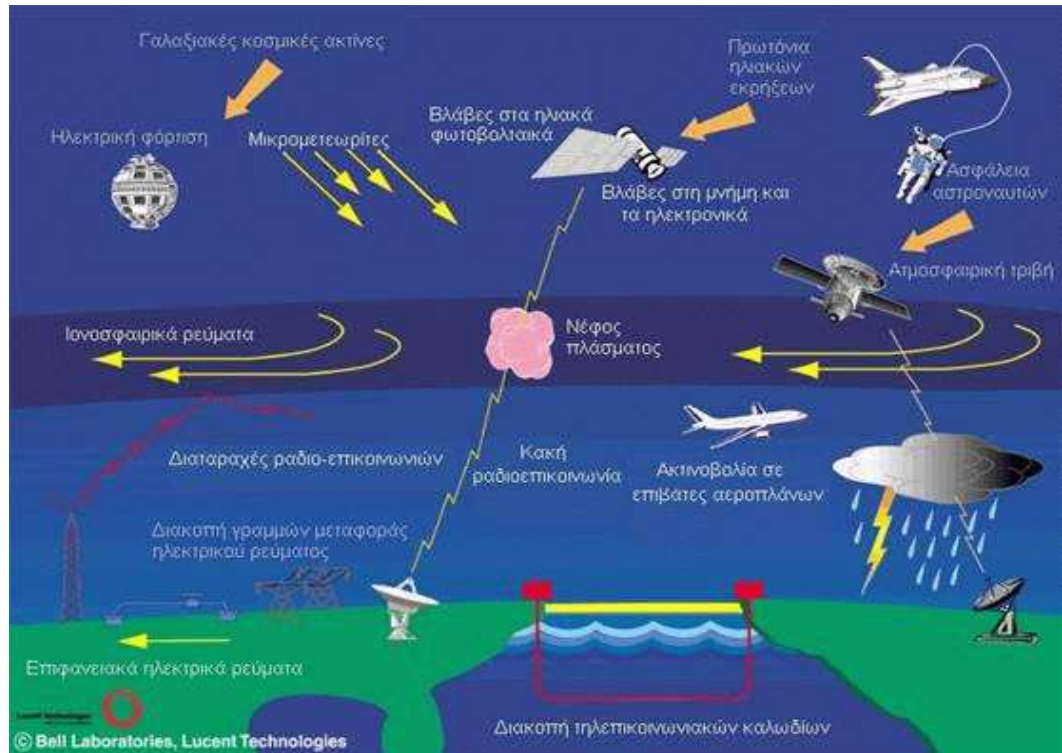
Σχ. 2.14: Σχηματική σύνοψη των διαφόρων επιδράσεων της ηλιακής δραστηριότητας στη μαγνητόσφαιρα της Γης. Αποσπώμενα νέφη ηλιακού πλάσματος διαταράσσουν το μεσοπλανητικό διάστημα και προκαλούν μαγνητικές καταιγίδες και άλλες διαταραχές στη μαγνητόσφαιρα της Γης, οι μαγνητικές γραμμές της οποίας συμπιέζονται από τον ηλιακό άνεμο στην φωτιζόμενη πλευρά της Γης. Οι μαγνητικές αυτές διαταραχές στη μαγνητόσφαιρα παρακολουθούνται από το διαστημόπλοιο SOHO που ευρίσκεται στο σημείο του Langrange L1.

αυτών είναι χαμηλή σε σύγκριση με την ατμοσφαιρική πυκνότητα στην επιφάνεια της Γης (10^{19} cm^{-3}), είναι ωστόσο σημαντική για να επιδράσει σε διαστημόπλοια και αστροναύτες, εκτός της επίδρασης που προκαλεί στις ανθρώπινες δραστηριότητες στη Γη. Μερικές φορές επίσης συμβαίνουν καταιγιστικά φαινόμενα στο διαπλανητικό διάστημα, που εμφανίζονται στις πολικές περιοχές της Γης ως έντονο πολικό σέλας. Όλα αυτά τα φαινόμενα απαρτίζουν αυτό που ονομάζουμε Διαστημικό Καιρό.

Σήμερα, περισσότεροι από 200 τηλεπικοινωνιακοί δορυφόροι ευρίσκονται σε τροχιά γύρω από τη Γη και ενεργητικά ιόντα και ηλεκτρόνια στο μεσοπλανητικό διάστημα μπορούν να τους δημιουργήσουν σημαντικά προβλήματα. Για παράδειγμα, ένα σύνθητες πρόβλημα είναι η ισχυρή φόρτιση δορυφόρων, συνήθως αρνητική, της τάξεως των 500 *Volts*. Εάν η φόρτιση αυτή είναι ομογενής, απλά επιδρά στη καταμέτρηση φορτισμένων σωματιδίων που ενδεχομένως εκτελούν διάφορα επιστημονικά όργανα του δορυφόρου (π.χ. απωθώντας ηλεκτρόνια), ενώ αν η φόρτιση αυτή είναι διαφορετική σε διάφορα τμήματα του δορυφόρου, τα επαγόμενα ηλεκτρικά ρεύματα μπορούν να έχουν καταστρεπτικές συνέπειες στα όργανα του δορυφόρου.

Φορτισμένα σωματίδια με υψηλή ενέργεια μπορούν και καταστρέφουν τα φωτοκύτταρα των δορυφόρων, ή, ακόμα μπορούν να διαπεράσουν τα ηλεκτρικά κυκλώματα και να προξενήσουν καταστροφές, ή, να δώσουν λανθασμένα σήματα.

Ένα από τα αποτελέσματα των μαγνητικών καταιγίδων και υποκαταιγίδων είναι η δημιουργία πολύ ισχυρών ρευμάτων που ρέουν μεταξύ της Γης και του διαπλανητικού



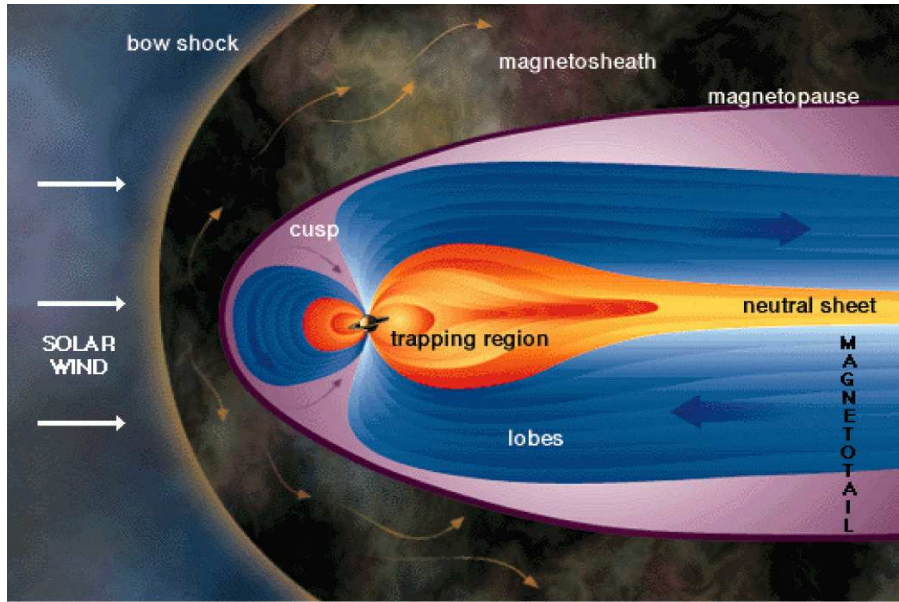
Σχ. 2.15: Σχηματική σύνοψη των διαφόρων επιδράσεων της ηλιακής δραστηριότητας στη Γη.

χώρου. Αυτά τα ρεύματα συνδέονται με την εμφάνιση του πολικού σέλαος και κατευθύνονται στην πολική χοάνη από τη μαγνητοουρά της γήινης μαγνητόσφαιρας και αντιστρόφως. Κατά τη διάρκεια μαγνητικών καταιγίδων τα ρεύματα εξαπλώνονται προς τον ισημερινό οπότε και το πολικό σέλας φθάνει σε χαμηλά γεωγραφικά πλάτη και πιο πυκνοκατοικημένες περιοχές του πλανήτη μας.

Οι μαγνητικές καταιγίδες και υποκαταιγίδες επάγουν ηλεκτρικά ρεύματα σε γραμμές μεταφοράς ηλεκτρικής ισχύος τις οποίες υπερφορτώνουν και έχουν σαν αποτέλεσμα μερικές φορές τη διακοπή τους και έτσι την εκτεταμένη ηλεκτρική συσκότιση περιοχών.

Για την παρακολούθηση όλων αυτών των φαινομένων έχει δημιουργηθεί ένα εκτεταμένο δίκτυο δορυφόρων πολλοί από τους οποίους ευρίσκονται σε γεωσύγχρονη τροχιά (απόγειο $6.6 R_{\oplus}$) και παρακολουθούν διάφορα ηλιακά φαινόμενα πολλά από τα οποία είναι υπεύθυνα για σημαντικές διαταραχές της μαγνητόσφαιρας. Μια στεμματική εκτίναξη μάζας δημιουργεί κρουστικά κύματα τα οποία φθάνουν στη Γη σε 5-6 ημέρες και δημιουργούν τις μαγνητικές καταιγίδες. Γι' αυτό το λόγο είναι απαραίτητη η συνεχής παρακολούθηση του Ήλιου ο οποίος είναι τελικά και υπεύθυνος για όλα αυτά τα μαγνητικά φαινόμενα στη Γη.

Επίσης, δορυφόροι στην απόσταση Lagrange L_1 ($4R_{\Sigma\epsilon\lambda\eta\nu\eta\varsigma} = 4 \times 384.000 \text{ km}$) παρακολουθούν συνεχώς τον Ήλιο και μπορούν να προβλέψουν επερχόμενες μαγνητικές καταιγίδες και υψηλής ενέργειας φορτισμένα σωματίδια που φθάνουν από τον Ήλιο στη Γη εντός περίπου μίας ώρας και είναι επικίνδυνα για αστροναύτες που ευρίσκονται στο διάστημα. Είναι λοιπόν σαφές γιατί η συνεχής παρακολούθηση του διαστημικού καιρού



Σχ. 2.16: Σχηματικό διάγραμμα της μαγνητόσφαιρας του Κρόνου.

αποτελεί μία ιδιαίτερα χρήσιμη δραστηριότητα στην ηλεκτρονική και διαστημική εποχή μας.

2.13 Μαγνητόσφαιρες των άλλων πλανητών

2.13.1 Εξωτερικοί πλανήτες

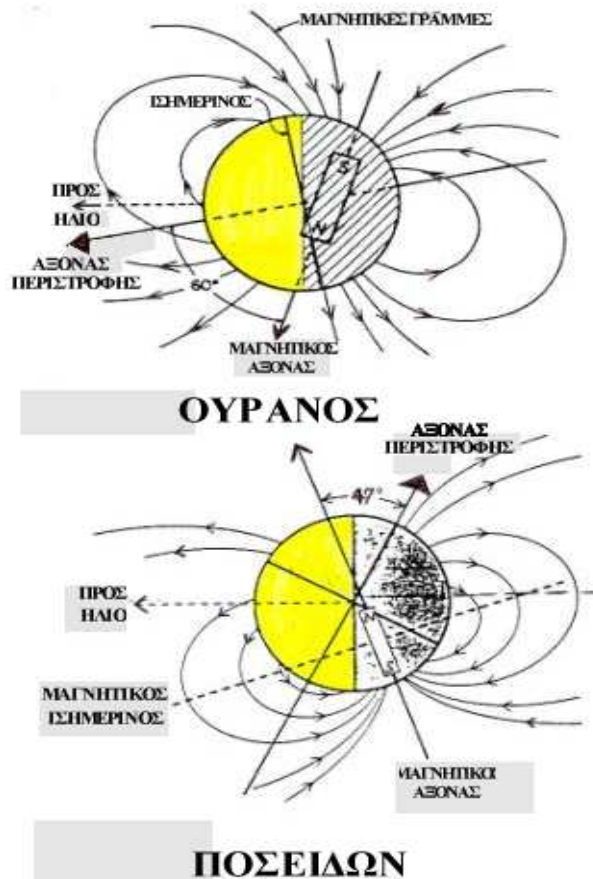
Οι μεγάλοι πλανήτες (Δίας - Κρόνος - Ουρανός - Ποσειδών) έχουν ισχυρά μαγνητικά πεδία τα οποία παίζουν σημαντικό ρόλο στην αλληλεπίδραση του Ηλιακού Ανέμου με τον πλανήτη. Τα πεδία αυτά δεν είναι ακριβώς διπολικά και γενικά δεν είναι ευθυγραμμισμένα με τον άξονα περιστροφής του πλανήτη. Το μαγνητικό πεδίο του Δία και του Κρόνου είναι παρόμοιο με αυτό της Γης, ενώ του Ουρανού και του Ποσειδώνα είναι αρκετά πιο περίπλοκα και μεταβλητά.

Η μαγνητόσφαιρα του Δία εκτείνεται σε μεγάλες αποστάσεις και η ακτίνα της μαγνητόπαυσης είναι $R_{mp}^J \simeq 50-100 R_J$, δηλαδή, πρόκειται για μια τεράστια μαγνητόσφαιρα (για σύγκριση, $R_J = 12 R_{\oplus}$ ενώ $R_{mp}^{\oplus} \simeq 10 R_{\oplus}$). Για τον Κρόνο $R_{mp}^S \simeq 20 R_S$, για τον Ουρανό $R_{mp}^U \simeq 18 R_U$ και τον Ποσειδώνα $R_{mp}^N \simeq 25 R_N$. Τα μαγνητικά πεδία στις επιφάνειες των πλανητών αυτών είναι αντίστοιχα : $B_J \simeq 40000 \text{ Gauss}$, $B_S \simeq 2 \times 10^4 \text{ Gauss}$, $B_U \simeq 2.5 \times 10^{-4} \text{ Gauss}$ και $B_N \simeq 0.14 \text{ Gauss}$.

Στην πλασμόσφαιρα (περιοχή της μαγνητόσφαιρας που έχει την ίδια γωνιακή ταχύτητα με τον πλανήτη) οι πυκνότητες του πλάσματος είναι:

$$n^{\oplus} \simeq 1000 - 5000 \text{ cm}^3 \sim n^J, \quad n^S \sim 100 \text{ cm}^{-3}, \quad n^U \simeq n^N \simeq 3 \text{ cm}^{-3}.$$

Στη Γήινη μαγνητόσφαιρα, αυτό το πλάσμα τροφοδοτείται από τον Ηλιακό Άνεμο και την Ιονόσφαιρα. Στους εξωτερικούς πλανήτες όμως επιπλέον πλάσμα προέρχεται από

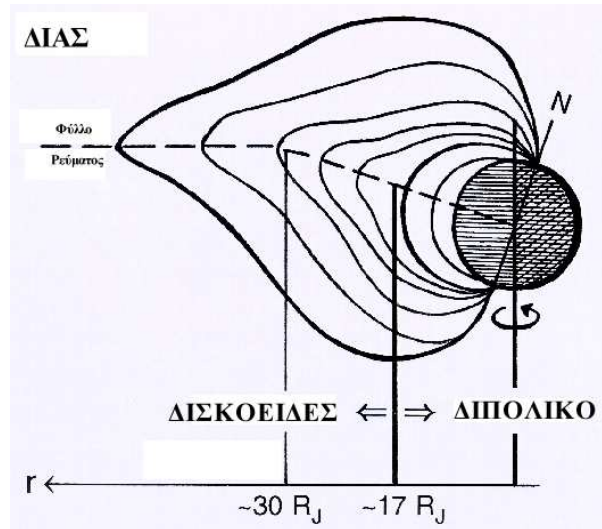


Σχ. 2.17: Το μαγνητικό πεδίο των πλανητών Ουρανού και Ποσειδώνας.

τους δικούς τους δορυφόρους οι οποίοι κινούνται μέσα στη δική τους μαγνητόσφαιρα. Έτσι, στον Δία, η Ιώ ($r_I = 5.9 R_J$) έχει ηφαιστειακή δραστηριότητα και ατμόσφαιρα SO_2 , στον Κρόνο ο δορυφόρος του Τιτάνας και στον Ποσειδώνα ο δορυφόρος του Τρίτων έχουν ατμόσφαιρα με N_2 . Αξίζει να σημειωθεί ότι η ένταση του δακτυλιοειδούς ρεύματος στο Δία είναι τεράστια, με ένταση $I_J \sim 20 \times 10^6$ A.

2.13.2 Εσωτερικοί πλανήτες

Ο πλανήτης Ερμής έχει ένα ασθενές μαγνητικό διπολικό πεδίο. Το διαστημόπλοιο Mariner 10 μέτρησε μαγνητική ροπή $\mu_M = 4 \times 10^{-4} m_{\oplus}$, ενώ έχει επίσης μαγνητόπαυση και τοξοειδές κρουστικό κύμα παρόμοιο με αυτό της Γης. Ο Ερμής δεν έχει ατμόσφαιρα ή ιονόσφαιρα και η απόσταση της μαγνητόπαυσης είναι $R_{mp}^M \simeq 1.3 R_M$, αρκετά μικρή λόγω της ισχυρής πίεσης του Ηλιακού Ανέμου. Ο πλανήτης Άρης επίσης έχει πολύ αδύνατο μαγνητικό πεδίο και η ιονόσφαιρά του έχει ιονισμένο H, O και CO_2 . Ο Άρης, διέθετε και αυτός μαγνητόσφαιρα στο ξεκίνημα της ζωής του. Φαίνεται όμως ότι έχασε τη μαγνητόσφαιρά του εδώ και περίπου 4 εκατ. έτη, όπως έχει διαπιστωθεί από μαγνητισμένα βράχια που έχουν βρεθεί και χρονολογηθεί. Όσο ήταν αρκετά ζεστός ο πυρήνας του ώστε να αποτελείται από υγρό σίδηρο (Fe) και νικέλιο (Ni), η μαγν-



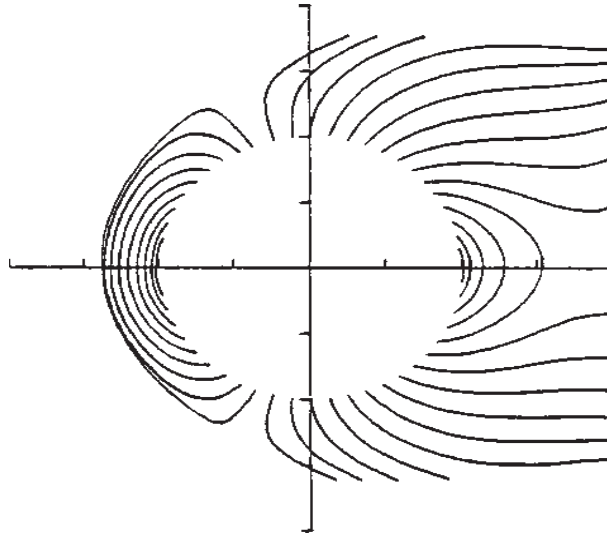
Σχ. 2.18: Το μαγνητικό πεδίο του πλανήτη Δία.

ητόσφαιρα λειτουργούσε και προστάτευε την ατμόσφαιρά του από τον ηλιακό άνεμο και τις φοβερές εκλάμπεις του ήλιου. Όταν όμως ο πυρήνας του ψύχθηκε τόσο ώστε ο υγρός σίδηρος να στερεοποιηθεί, έπαψε να λειτουργεί το δυναμό του και να παράγει το μαγνητικό του πεδίο. Αυτό είχε σαν αποτέλεσμα οι υδρατμοί στην ατμόσφαιρα του να διασπώνται από τα ενεργητικά ιόντα σε αέριο υδρογόνο και οξυγόνο. Στην συνέχεια το ελαφρύ αέριο υδρογόνο διέφυγε στο διάστημα εξαιτίας της χαμηλής ταχύτητας διαφυγής στον Άρη. Η βαρύτερη έλξη στον Άρη, η οποία είναι το μισό της γήινης, δεν είναι αρκετή για να κρατήσει το υδρογόνο πάνω στον πλανήτη. Το οξυγόνο οξειδωσε τα περισσότερα υλικά του εδάφους, ενώ το υδρογόνο και άλλα ελαφρά αέρια διέφυγαν αφήνοντας πίσω βασικά κυρίως το διοξείδιο του άνθρακα.

Ο πλανήτης Αφροδίτη έχει ένα πολύ αδύνατο μαγνητικό πεδίο και ο Ηλιακός Άνεμος αλληλεπιδρά μόνο με την ιονόσφαιρά της, που τερματίζεται στην ιονόπαυση. Στην δική της περίπτωση όμως οι λόγοι για την έλλειψη είναι διαφορετικοί από τον Άρη. Η Αφροδίτη δεν απέκτησε ποτέ μαγνητόσφαιρα διότι αν και διαθέτει υγρό σίδηρο και νικέλιο στον πυρήνα της, η ταχύτητα περιστροφής γύρω από τον εαυτό της είναι πολύ μικρή, 243 ημέρες.

2.14 Κοσμικές Ακτίνες (Κ.Α.)

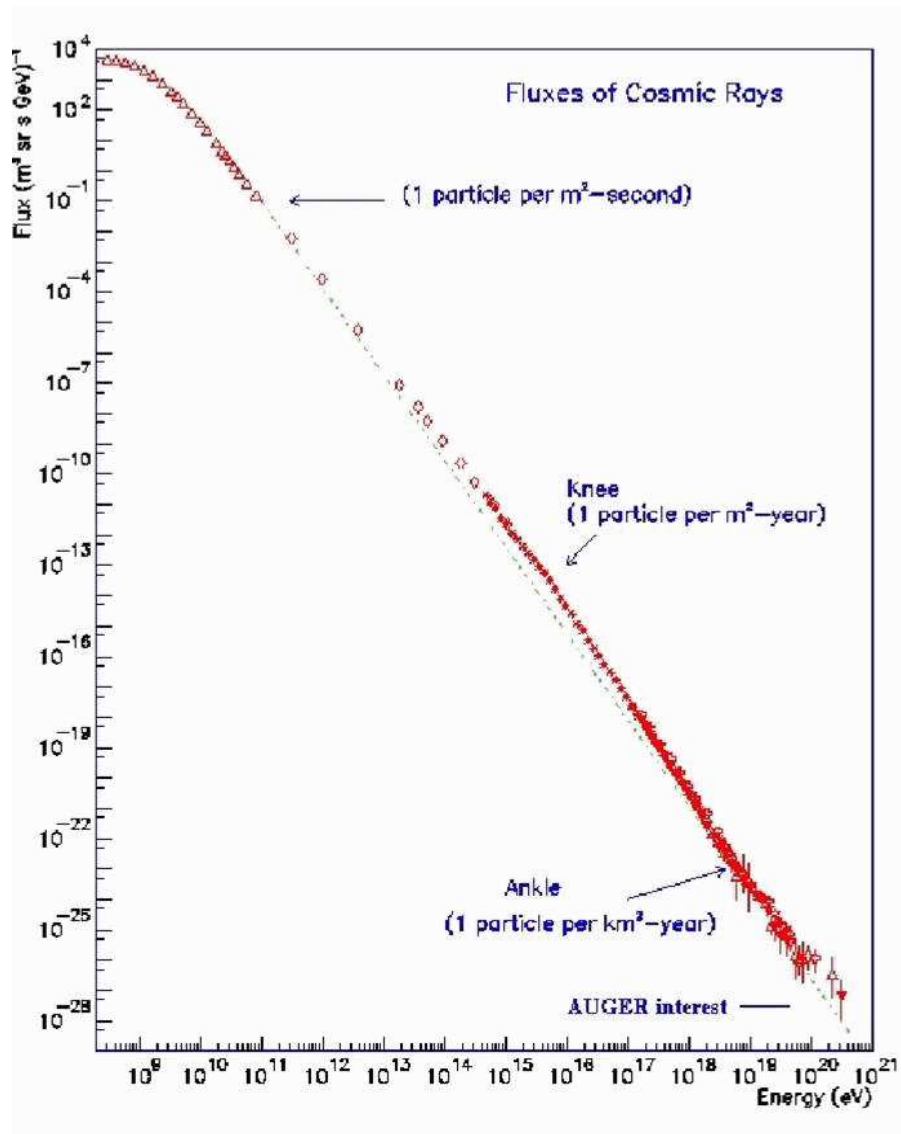
Τα άτομα και τα μόρια του αέρα του δωματίου μας ($T \sim 300 \text{ }^\circ\text{K}$) έχουν μικρή ενέργεια $E \sim 1/40 \text{ eV}$. Το πλάσμα της ηλιακής ατμόσφαιρας έχει υψηλότερες θερμοκρασίες και ενέργεια, από $E \sim 1 \text{ eV}$ στη φωτόσφαιρα ($T \sim 5500 \text{ }^\circ\text{K}$) έως $E \sim 1000 \text{ eV}$ στο στέμμα ($T \sim 10^6 \text{ }^\circ\text{K}$). Τα ηλεκτρόνια στο πολικό σέλας και τα πρωτόνια στην ουρά της γήινης μαγνητόσφαιρας έχουν ακόμη υψηλότερες ενέργειες $E \sim 1000 - 10000 \text{ eV}$. Τα πρωτόνια του δακτυλοειδούς ρεύματος της μαγνητόσφαιρας έχουν ενέργειες $E \sim 20000 - 100000 \text{ eV}$. Τα πρωτόνια στην εσωτερική ζώνη Van Allen της μαγνητόσφαιρας έχουν ενέργειες $E \sim 10 - 100 \text{ MeV}$. Πρωτόνια υψηλότερης ενέργειας



Σχ. 2.19: Το μαγνητικό πεδίο του πλανήτη Ερμή.

καθώς και άλλα ιόντα με ενέργειες $10^7 < E < 10^{20}$ eV έχουν προέλευση εκτός του ηλιακού μας συστήματος. Αντίθετα με τις ηλιακές κοσμικές ακτίνες οι γαλαξιακές υψηλοενεργειακές κοσμικές ακτίνες είναι ισότροπες και με περίπου σταθερή ροή \sim ένα σωματίδιο ανά cm^2 και ανά sec .

Οι κοσμικές ακτίνες είναι φορτισμένα σωματίδια (πρωτόνια, e^- , e^+ , βαρέα ιόντα) που κινούνται με ταχύτητες κοντά στην ταχύτητα του φωτός. Ανακαλύφθηκαν για πρώτη φορά από τον Hess στην αρχή του αιώνα (1912) σε παρατηρήσεις με αερόστατο, αφού οι πρωτογενείς Κ.Α. δεν φθάνουν στην επιφάνεια της Γης παρά μόνο τα προϊόντα της διάσπασής τους. Όπως και στα άστρα, οι πυρήνες Υδρογόνου (πρωτόνια) αποτελούν το 90% περίπου των Κοσμικών Ακτίνων, ενώ το 9% αυτών είναι πυρήνες Ηλίου και το υπόλοιπο 1% βαρύτερα ιόντα. Οι ελαφρείς πυρήνες Li, Be, B είναι πιο άφθονοι στις Κοσμικές Ακτίνες από ότι στον Ήλιο. (Ο λόγος στον Ήλιο (Li-Be-B)/He $\sim 10^{-7}$ ενώ στις κοσμικές ακτίνες (Li-Be-B)/He $\sim 10^{-2}$). Αυτό οφείλεται στο ότι τα βαρέα ιόντα έχουν διασπασθεί καθ' οδόν από τις εξω-ηλιακές τους πηγές. Η ισοτροπία των γαλαξιακών Κοσμικών Ακτίνων οφείλεται στις πολλαπλές σκεδάσεις που υφίστανται από το γαλαξιακό μαγνητικό πεδίο. Έτσι, το μαγνητικό πεδίο του Γαλαξία μας εμποδίζει να 'δούμε' τις πηγές των Κοσμικών Ακτίνων. Μόνο εξαιρετικά υψηλής ενέργειας Κοσμικές Ακτίνες που έχουν εξωγαλαξιακή προέλευση δεν αποκλίνουν σημαντικά από το γαλαξιακό μαγνητικό πεδίο. Ας σημειωθεί ότι η ακτίνα Larmor για ένα πρωτόνιο ενέργειας 10^{20} eV είναι της τάξεως της ακτίνας του Γαλαξία. Ενώ οι γαλαξιακές Κοσμικές Ακτίνες φαίνεται να προέρχονται και να επιταχύνονται από τα κρουστικά κύματα των *supernova*, οι υψηλότερης ενέργειας Κοσμικές Ακτίνες προέρχονται από ενεργούς γαλαξιακούς πυρήνες, Quasars, κ.ά. Στο εργαστήριο δεν είναι δυνατόν να επιταχύνουμε σωματίδια σε αυτές τις υψηλές ενέργειες. Οι υψηλότερες ενέργειες στις οποίες μπορούμε να επιταχύνουμε σωματίδια σε επιταχυντές είναι της τάξεως των $E \sim TeV$. Για σύγκριση, αξίζει να σημειώσουμε ότι η μάζα ηρεμίας του πρωτονίου είναι $E \sim 10^9$ eV. Απομένει μόνο η επιτάχυνση των σωματιδίων στην γήινη μαγνητόσφαιρα



Σχ. 2.20: Ενεργειακό φάσμα της κοσμικής ακτινοβολίας.

και η μελέτη των Κοσμικών Ακτίνων με δορυφορικά όργανα για να κατανοήσουμε τους μηχανισμούς επιτάχυνσής τους.

Το προηγούμενο διάγραμμα δίνει την ένταση των Κοσμικών Ακτίνων που φθάνουν στη Γη. Για ενέργειες $E > 2 \times 10^9 \text{ eV}$ η ροή των Κοσμικών Ακτίνων είναι:

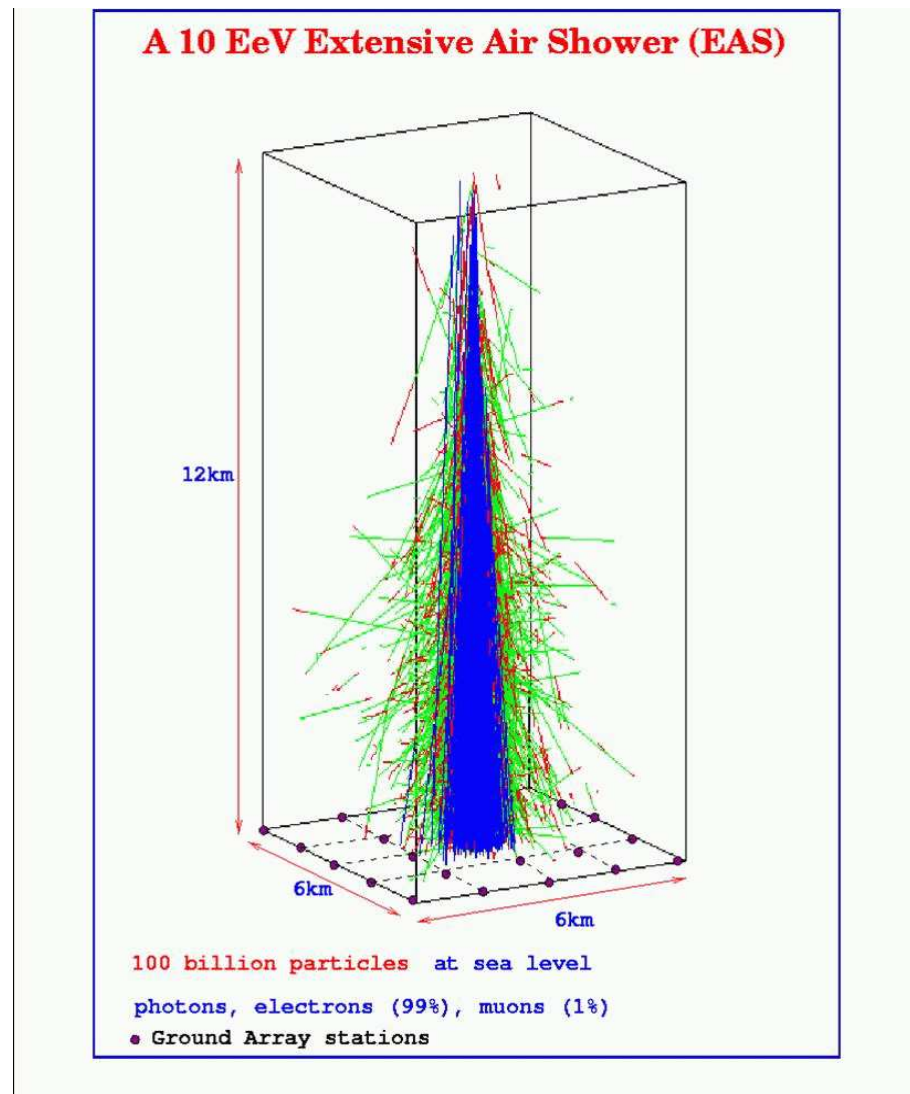
$$N(E >) = \frac{K}{(E + 0.931)^{1+\gamma}}$$

όπου $N(E >)$ δηλώνει τη ροή των σωματιδίων με κινητική ενέργεια μεγαλύτερη μιας τιμής E (σε GeV).

Στις 'χαμηλές' ενέργειες των TeV έχουμε \sim ένα σωματίδιο/ $m^2 \text{ sec}$. Στις ψηλότερες ενέργειες των PeV= 10^{15} eV έχουμε \sim ένα σωματίδιο/ m^2 -έτος. Στις ακόμη πιο ψηλές ενέργειες, $E \text{ eV} = 10^{18} \text{ eV}$ έχουμε \sim ένα σωματίδιο/ km^2 -έτος. Τέλος στις πάρα πολύ

ψηλές ενέργειες, 10^{21} eV έχουμε \sim ένα σωματίδιο/ km^2 -αιώνα.

Η προέλευση των Κοσμικών Ακτίνων εξαιρετικά υψηλής ενέργειας παραμένει άγνωστη. Πιθανές πηγές αυτών των Κ.Α. αναμένεται να είναι περιοχές σύγκρουσης μελανών οπών ή αστέρων νετρονίων.



Σχ. 2.21: Σχηματική παράσταση κατακόρυφου καταιγισμού κοσμικών ακτίνων και δικτύου καταμέτρησης

2.14.1 Πρόβλημα

Εάν σε μια ηλιακή έκλαμψη διατίθεται ενέργεια 10^{23} ergs/sec σε πρωτόνια, μπορεί να εξηγηθεί η επιτάχυνση των γαλαξιακών Κοσμικών Ακτίνων από αστρικές εκλάμψεις ;

Λύση:

Με 10^{11} αστέρες στο Γαλαξία μας, η ολική ενέργεια που διατίθεται είναι

$$10^{23} \times 10^{11} = 10^{34} \text{ ergs/sec},$$

Οι Κοσμικές Ακτίνες απαιτούν $\sim 10^{42} \text{ ergs/sec}$ και επομένως δεν είναι δυνατόν να επιταχύνονται σε αστρικές εκλάμψεις.

2.14.2 Πρόβλημα

Συγκρίνετε την ενεργειακή πυκνότητα των Κοσμικών Ακτίνων με την ενεργειακή πυκνότητα του μαγνητικού πεδίου του Γαλαξία ($B \sim 5 \times 10^{-6} \text{ Gauss}$) και την ενεργειακή πυκνότητα της διάχυτης κοσμικής ακτινοβολίας υποβάθρου των $3 \text{ }^\circ\text{K}$ ($1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-12} \text{ erg}$).

Λύση:

- Η ενεργειακή πυκνότητα του γαλαξιακού μαγνητικού πεδίου είναι:

$$U_M = \frac{B^2}{8\pi} \sim 10^{-12} \text{ erg/cm}^3 \sim 1 \text{ eV/cm}^3.$$

- Η ενεργειακή πυκνότητα της διάχυτης κοσμικής ακτινοβολίας υποβάθρου των 3°K είναι:

$$U_g = \frac{4\sigma T^4}{c} = \frac{4 \times 5.67 \times 10^{-5} \times 3^4}{3 \times 10^{10}} \frac{\text{erg}}{\text{cm}^3} \sim 6 \times 10^{-13} \text{ erg/cm}^3 \sim 1 \text{ eV/cm}^3.$$

- Η ενεργειακή πυκνότητα των Κοσμικών Ακτίνων είναι:

$$U_{CR} \sim \frac{1 \text{ σωματίδιο}}{10 \text{ cm}^2 \text{ sec c}} \sim 10^{-12} \frac{\text{erg}}{\text{cm}^3} \sim 1 \text{ eV/cm}^3.$$

- Η ολική ενέργεια των Κοσμικών Ακτίνων στο Γαλαξία μας είναι:

$$\left(10^{-12} \frac{\text{ergs}}{\text{cm}^3}\right) \times (5 \times 10^{22} \text{ cm}^3)^3 \sim 10^{56} \text{ ergs}.$$

- Εάν αυτές οι Κ.Α. μένουν παγιδευμένες από τα μαγνητικά πεδία για περίπου 10×10^6 έτη, ο ρυθμός απώλειας της ενέργειας των Κοσμικών Ακτίνων από το Γαλαξία είναι:

$$10^{56} / (3 \times 10^{14}) \sim 10^{42} \text{ ergs/sec}$$

- Εάν έχουμε 1 έκρηξη υπερκαινοφανούς (supernova) ανά 100 έτη στο Γαλαξία και η ενέργεια που διατίθεται σε πρωτόνια είναι περί τα 10^{51} ergs , τότε η διαθέσιμη ενεργειακή παροχή για την επιτάχυνση των Κ.Α. από τα χροστικά κύματα των supernova είναι,

$$10^{51} / 3 \times 10^9 \sim 10^{42} \text{ ergs/sec}.$$

Επομένως είναι δυνατόν τα χροστικά κύματα που δημιουργούν οι εκρήξεις supernova να επιταχύνουν και να τροφοδοτήσουν ενεργειακά τις Κ.Α. του Γαλαξία.

2.15 Το πρόβλημα της επιτάχυνσης των Κοσμικών Ακτίνων

Στα επόμενα θα δώσουμε μια απλή κατανόηση της επιτάχυνσης των Κοσμικών Ακτίνων όπως επροτάθηκε από τον Fermi.

2.15.1 Μηχανισμός Fermi επιτάχυνσης μη σχετικιστικών Κοσμικών Ακτίνων

Ο Fermi πρότεινε τον ακόλουθο έξυπνο μηχανισμό για την επιτάχυνση των Κ.Α. Έστω ότι ένα φορτισμένο σωματίδιο κινείται με ταχύτητα v ως προς ένα αδρανειακό σύστημα S . Το σωματίδιο αυτό ευρίσκεται μέσα σε μια μαγνητική φιάλη η στένωση της οποίας ευρίσκεται μέσα σε ένα μαγνητισμένο μεσοαστρικό νεφέλωμα το οποίο κινείται αντίθετα από αυτό με ταχύτητα V . Δηλ., έχουμε μιά μετωπική σύγκρουση του φορτισμένου σωματιδίου με το στένωμα της φιάλης. Στο σύστημα S' του νεφελώματος το σωματίδιο έχει ταχύτητα $v+V$. Όταν ανακλάται (ελαστικά) στα άκρα της μαγνητικής φιάλης έχει ταχύτητα $-(v+V)$ ως προς το νεφέλωμα S' . Η τελική ταχύτητα του σωματιδίου είναι $v+2V$ ως προς το αδρανειακό σύστημα S . Επομένως, η μεταβολή (αύξηση) της ενέργειας του σωματιδίου από μιά τέτοια ανάκλαση είναι

$$\Delta E_+ = \frac{1}{2}m(v+2V)^2 - \frac{1}{2}mv^2 = 2mV(v+V).$$

Μπορεί όμως να συναντήσει και ένα νεφέλωμα που απομακρύνεται από αυτό με ταχύτητα V . Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι σε αυτή την περίπτωση της οπισθοσκέδασης, η μεταβολή (ελάττωση) της ενέργειάς του είναι,

$$\Delta E_- = \frac{1}{2}m(v-2V)^2 - \frac{1}{2}mv^2 = -2mV(v-V).$$

Η πιθανότητα μετωπικών ανακλάσεων είναι ανάλογη της σχετικής ταχύτητας $v+V$, ενώ η πιθανότητα ανακλάσεων του σωματιδίου από νεφέλωμα το οποίο απομακρύνεται από αυτό (οπισθοανακλάσεις) είναι ανάλογη της αντίστοιχης ταχύτητας $v-V$. Επομένως, η μέση αύξηση της ταχύτητας του σωματιδίου σε τυχαίες ανακλάσεις εκ των οποίων οι μισές είναι μετωπικές και οι άλλες μισές είναι οπισθοανακλάσεις θα είναι

$$\langle \Delta E \rangle = \Delta E_+ \frac{v+V}{2v} + \Delta E_- \frac{v-V}{2v} = 4mV^2 = 4E \left(\frac{V}{c} \right)^2.$$

συναρτήσει της ολικής ενέργειας του σωματιδίου $E = mc^2$, ένα αποτέλεσμα που ισχύει και στο πλαίσιο της ειδικής σχετικότητας.

Έστω L η μέση απόσταση ανάμεσα σε δύο ανακλάσεις. Το γεγονός αυτό ότι η αύξηση της ενέργειας είναι ανάλογη της ενέργειας μπορούμε να το γράψουμε και ως εξής,

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} \approx \frac{dE}{dt} = \frac{4V^2}{Lc} E = \alpha E, \quad \alpha = \frac{4V^2}{Lc}.$$

Η λύση της προηγούμενης εξίσωσης είναι,

$$E(t) = E_0 \exp(\alpha t),$$

όπου E_0 είναι η αρχική ενέργεια.

Έστω ότι όλα τα N_0 σωματίδια εκκινούν με την ίδια ενέργεια E_0 και σε ένα χαρακτηριστικό για το σύστημα χρόνο διαφυγής, $t = t_\delta$, έχουν αυξήσει σημαντικά την ταχύτητά τους και επομένως διαφύγουν τα μισά από αυτά τα φορτισμένα σωματίδια, δηλ.,

$$N(t) = N_0 \exp\left(-\frac{t \ln 2}{t_\delta}\right).$$

Τότε στο χρονικό διάστημα μεταξύ $(t, t + dt)$ ο αριθμός των σωματιδίων που θα έχουν διαφύγει είναι,

$$|dN| = \left| \frac{N_0 \ln 2}{t_\delta} \exp\left(-\frac{t \ln 2}{t_\delta}\right) dt \right|.$$

Αντικαθιστώντας,

$$t = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{E}{E_0}.$$

έχουμε,

$$|dN| = \frac{N_0 \ln 2}{\alpha t_\delta E_0} \left(\frac{E}{E_0}\right)^{-\left(1 + \frac{\ln 2}{\alpha t_\delta}\right)} dE.$$

μιά έκφραση που δίνει τον αριθμό των φορτισμένων σωματιδίων που φεύγουν με ενέργειες από E έως $E + dE$.

Έτσι έχουμε για τον αριθμό των φορτισμένων σωματιδίων με ενέργεια E που διαφεύγουν ένα νόμο δύναμης,

$$N(E) \propto E^{-\left(1 + \frac{\ln 2}{\alpha t_\delta}\right)}.$$

Η θεωρία αυτή του Fermi ονομάζεται μηχανισμός επιτάχυνσης δευτέρας τάξεως επειδή η αύξηση της ενέργειας εξαρτάται από το τετράγωνο του λόγου της ταχύτητας του νεφελώματος-μαγνητικού καθρέπτη προς την ταχύτητα του φωτός. Αν και ο μηχανισμός αυτός αναπαράγει σωστά την παρατηρούμενη ενεργειακή κατανομή των Κ.Α., δεν είναι προφανές πως υπολογίζονται οι παράμετροι α και τ . Επιπρόσθετα, επειδή τα νεφελώματα κινούνται με μή σχετικιστικές ταχύτητες και η αύξηση της ενέργειας σε κάθε ανάκλαση είναι ανάλογη της μικρής ποσότητας $(V/c)^2$, ο μηχανισμός του Fermi δευτέρας τάξεως δεν φαίνεται να είναι ιδιαίτερα αποδοτικός για να εξηγήσει επαρκώς τις παρατηρούμενες υπερυψηλές ενέργειες των Κ.Α.

Για να επιλυθεί το πρόβλημα αυτό της χαμηλής αποδοτικότητας του μηχανισμού του Fermi επιτάχυνσης δευτέρας τάξεως, έχει προταθεί ο μηχανισμός επιτάχυνσης πρώτης τάξεως. Σε αυτόν το μηχανισμό, τα σωματίδια πραγματοποιούν μόνο μετωπικές συγκρούσεις με νεφελώματα και όχι οπισθοσυγκρούσεις. Έτσι, όταν $v \gg V$ η επιτάχυνση είναι ανάλογη του λόγου των ταχυτήτων V/c και ο μηχανισμός είναι πιο αποδοτικός. Μπορεί όμως να συμβαίνει αυτό στο Σύμπαν; Έχει προταθεί ότι αυτό μπορεί να συμβαίνει σε κρουστικά κύματα που δημιουργούν οι υπερκαινοφανείς αστέρες. Εκεί τα σωματίδια μπορεί να εγκλωβισθούν σε διάφορες ανωμαλίες που εμφανίζονται στα δι-αστελλόμενα κελύφη των κρουστικών κυμάτων και επιταχύνονται επειδή υφίστανται

συνεχείς μετωπικές συγκρούσεις σε αυτά τα κρουστικά κύματα. Ο μηχανισμός αυτός επιτάχυνσης πρώτης τάξεως παραμένει ο πλέον αποδεκτός μηχανισμός επιτάχυνσης των Κ.Α.

2.15.2 Επιτάχυνση μή σχετικιστικού φορτίου σε μαγνητική φιάλη

Θεωρήστε ένα φορτίο q μάζας m παγιδευμένο σε ένα μαγνητικό καθρέπτη, π.χ. το μαγνητικό πεδίο ανάμεσα σε δύο πυκνά νεφελώματα A, B . Έστω ότι τα 'άκρα' του καθρέπτη κινούνται με ταχύτητα V προς το κέντρο K του. Αρχικά το φορτίο βρίσκεται στο μέσο της απόστασης $A - B$ με αρχική μη σχετικιστική ταχύτητα v_0 που έχει γωνία κλίσης α_0 ως προς τον άξονα του καθρέπτη. Η αρχική κινητική ενέργεια του φορτισμένου σωματιδίου είναι :

$$E_o = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m(v_{\perp,o}^2 + v_{\parallel,o}^2) ,$$

ενώ οι αρχικές συνιστώσες της ταχύτητάς του στο κέντρο του καθρέπτη είναι,

$$v_{\perp,o} = v_0 \sin \alpha_0 = \sqrt{\frac{2E_o}{m}} \sin \alpha_0 , \quad v_{\parallel,o} = v_0 \cos \alpha_0 = \sqrt{\frac{2E_o}{m}} \cos \alpha_0 .$$

Θέλουμε να υπολογίσουμε την τελική κινητική ενέργεια E του φορτισμένου σωματιδίου στο κέντρο του μαγνητικού καθρέπτη μετά από N διαδοχικές ανακλάσεις στο μαγνητικό αυτό καθρέπτη.

- Καθώς το φορτίο ανακλάται στο μαγνητικό καθρέπτη, επανέρχεται στο κέντρο K διατηρώντας τη μαγνητική του ροπή μ . Επομένως, η κάθετη συνιστώσα της ταχύτητάς του, v_{\perp} , παραμένει σταθερή, $v_{\perp} = v_{\perp,o}$,

$$\frac{1}{2}mv_{\perp}^2 = \mu B \Rightarrow v_{\perp}(B) = \text{σταθερή}.$$

- Όμως, η παράλληλη συνιστώσα της ταχύτητάς του, v_{\parallel} , αυξάνει μετά από κάθε ανάκλαση από τον κινούμενο μαγνητικό καθρέπτη. Αυτό συμβαίνει γιατί, στο σύστημα του καθρέπτη, το σωματίδιο έρχεται με ταχύτητα $v_{\parallel} + V$ προς αυτό και ανακλάται με την ίδια ταχύτητα, υποθέτοντας ελαστική σκέδαση. Στο σύστημα του εργαστηρίου τότε, η ταχύτητα του ανακλώμενου σωματιδίου είναι $(v_{\parallel} + V) + V = v_{\parallel} + 2V$. Άρα, σε κάθε ανάκλαση, η παράλληλη ταχύτητα του σωματιδίου αυξάνει κατά $2V$.
- Το φορτίο θα διαφύγει από τα άκρα A ή B όταν η ταχύτητά του στο K έχει γωνία κλίσης α_{κ} τέτοια ώστε η γωνία κλίσης στα άκρα A ή B να είναι 90° ,

$$\frac{\sin^2 \alpha_{\kappa}}{B_{\min}} = \frac{\sin^2 90^\circ}{B_{\max}} = \frac{1}{B_{\max}} \Rightarrow \sin^2 \alpha_{\kappa} = \frac{B_{\min}}{B_{\max}} = \frac{1}{R}$$

όπου $B_{\max}/B_{\min} = R$ είναι ο «λόγος του μαγνητικού καθρέπτη».

- Για να υπολογίσουμε το λόγο των τελικών συνιστωσών της ταχύτητας του σωματιδίου v_{\parallel}/v_{\perp} στο σημείο K παρατηρούμε ότι :

$$\sin^2 \alpha_{\kappa} = \frac{v_{\perp}^2}{v^2} = \frac{v_{\perp}^2}{v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2} = \frac{1}{1 + \frac{v_{\parallel}^2}{v_{\perp}^2}} = \frac{1}{R} \Rightarrow \frac{v_{\parallel}}{v_{\perp}} = \sqrt{R-1},$$

όπου v_{\parallel} , v_{\perp} είναι οι τελικές ταχύτητες στο σημείο K.

- Επειδή στο σημείο K, $v_{\perp,o} = v_{\perp}$ (λόγω διατήρησης της ροπής μ) έχουμε,

$$v_{\parallel} = v_{\perp,o} \sqrt{R-1} = \sqrt{(R-1)} v_0 \sin \alpha_0.$$

- Επομένως, η τελική κινητική ενέργεια του σωματιδίου στο σημείο K είναι,

$$E = \frac{1}{2} m v_{\parallel}^2 + \frac{1}{2} m v_{\perp}^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{2E_o}{m} \right) (R-1) \sin^2 \alpha_0 + \frac{1}{2} m \left(\frac{2E_o}{m} \right) \sin^2 \alpha_0,$$

δηλ.,

$$E = R \sin^2 \alpha_0 E_o.$$

- Ο αριθμός των «ανακλάσεων» N στον μαγνητικό καθρέπτη είναι:

$$N = \frac{v_{\parallel} - v_{\parallel,o}}{2V} = \sqrt{\frac{2E_o}{m}} \frac{\sqrt{R-1} \sin \alpha_0 - \cos \alpha_0}{2V}.$$

2.15.3 Πρόβλημα

Συνεχίζοντας το προηγούμενο πρόβλημα της επιτάχυνσης των κοσμικών ακτίνων, δείξτε ότι η μέση ταχύτητα $\langle v_{\parallel} \rangle$ του φορτίου στη διάρκεια της επιτάχυνσης είναι:

$$\langle v_{\parallel} \rangle = \frac{v_0}{2} (\sqrt{R-1} \sin \alpha_0 + \cos \alpha_0),$$

ενώ η μεταβολή της ταχύτητάς του, $\Delta v_{\parallel} = v_{\parallel} - v_{\parallel,o}$,

$$\Delta v_{\parallel} = v_0 (\sqrt{R-1} \sin \alpha_0 - \cos \alpha_0) = 2NV.$$

Εν συνεχεία, θεωρείστε τη δεύτερη αδιαβατική σταθερά,

$$J_{\parallel} = \int v_{\parallel} ds \simeq v_{\parallel} \cdot D = \text{σταθερό}.$$

Χρησιμοποιώντας το ότι $J_{\parallel} \simeq \text{σταθερό}$, δείξτε ότι ο χρόνος που απαιτείται για την επιτάχυνση, $T \equiv \Delta v_{\parallel} / \dot{v}_{\parallel}$, είναι:

$$T \equiv \frac{\Delta v_{\parallel}}{\dot{v}_{\parallel}} = \frac{\Delta v_{\parallel}}{\langle v_{\parallel} \rangle} \frac{D}{2V}.$$

Συγκρίνετε αυτό το χρόνο με το χρόνο που απαιτείται στο σωματίδιο να κινηθεί N φορές την απόσταση D με τη μέση ταχύτητά του $\langle v_{\parallel} \rangle$,

$$T' = N \frac{D}{\langle v_{\parallel} \rangle}.$$

2.15.4 Πρόβλημα

Σαν εφαρμογή των ανωτέρω, θεωρήστε ένα πρωτόνιο ενέργειας αρχικής $E_0 = 1 \text{ keV}$ παγιδευμένο μέσα σε μια μεσοαστρική μαγνητική φιάλη με λόγο $R = B_{\max}/B_{\min} = 10$ και μήκος $D = 10^{18} \text{ cm} \simeq 1$ έτος φωτός όπου τα τοιχώματα A, B προσεγγίζουν με ταχύτητα $V = 10 \text{ km/sec}$. Υπολογίστε τα E, N, T αν $\alpha_0 = 45^\circ$.

2.16 Επιτάχυνση σχετικιστικών φορτισμένων σωματιδίων σε μαγνητική φιάλη

Δύο μαγνητισμένα μεσοαστρικά νεφελώματα σε αρχική απόσταση $D_0 = 10^{17} \text{ cm}$ το ένα από το άλλο σχηματίζουν μιά μαγνητική φιάλη και κινούνται με ταχύτητα $V = 7 \text{ km/sec}$ το ένα προς το άλλο. Το σύστημα δρά σαν μαγνητικός καθρέπτης έτσι ώστε ένα φορτισμένο σωματίδιο ενέργειας $E = 10^{10} \text{ eV}$, να αυξάνει την ταχύτητά του κατά $\Delta v = 2V$ κάθε φορά που συναντά τα δύο νεφελώματα. Θέλουμε να υπολογίσουμε πόσες ανακλάσεις ένα πρωτόνιο ενέργειας E θα υποστεί έως ότου διπλασιάσει την ενέργειά του. Θα έπαιρνε τον ίδιο χρόνο να διπλασιάσει την ενέργειά του σε ένα ηλεκτρόνιο ;

Η μάζα ηρεμίας του πρωτονίου είναι

$$m_0 c^2 \sim 10^9 \text{ eV}, \quad E = \gamma m_0 c^2 \implies \gamma_{\alpha p \chi} = 10,$$

και,

$$\gamma_{\alpha p \chi}^2 = \frac{1}{1 - \beta_{\alpha p \chi}^2} \implies \beta_{\alpha p \chi}^2 = 1 - \frac{1}{\gamma_{\alpha p \chi}^2} = 1 - 0.01 \implies \beta_{\alpha p \chi} \sim 1 - 0.005.$$

Η τελική ταχύτητα του πρωτονίου είναι,

$$\gamma_{\tau \epsilon \lambda}^2 = \frac{1}{1 - \beta_{\tau \epsilon \lambda}^2} \implies \beta_{\tau \epsilon \lambda}^2 = 1 - \frac{1}{\gamma_{\tau \epsilon \lambda}^2} = 1 - 0.0025 \implies \beta_{\tau \epsilon \lambda} \simeq 1 - 0.00125,$$

δηλαδή τα πρωτόνια είναι σχετικιστικά. Επομένως, για να διπλασιασθεί η ενέργεια ενός πρωτονίου με αρχική ενέργεια $E = 10 \text{ GeV}$ πρέπει να αυξηθεί η ταχύτητά του κατά,

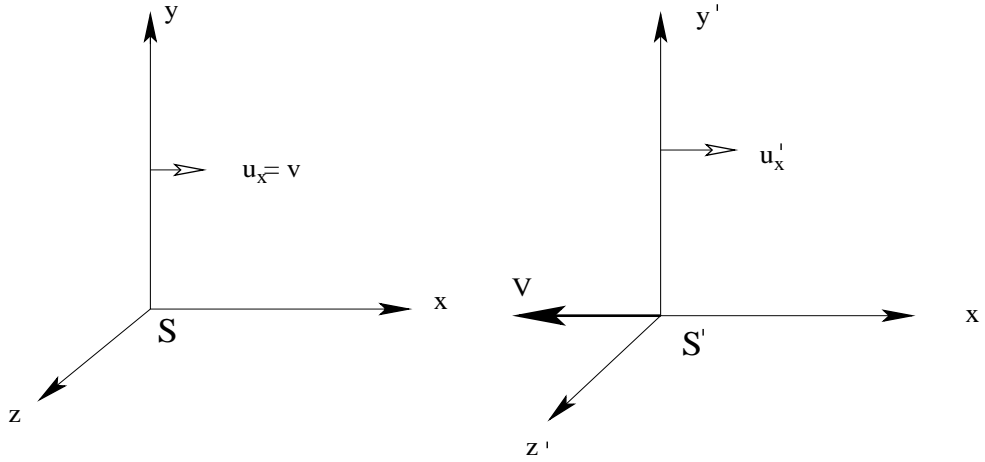
$$\Delta v = v^{\tau \epsilon \lambda} - v^{\alpha p \chi} = 0.00375 c = 1.1 \times 10^3 \text{ km/sec}.$$

Έστω ένα σύστημα S' που πλησιάζει ένα ακίνητο σύστημα S με μή σχετικιστική ταχύτητα V . Στο S τα πρωτόνια έχουν ταχύτητα $v_x = v$ ενώ στο S' (σύστημα του καθρέπτη) έχουν ταχύτητα v'_x :

$$v'_x = \frac{v_x + V}{1 + v_x V/c^2} = \frac{v + V}{1 + vV/c^2}.$$

Μετά την ανάκλασή τους στον καθρέπτη του S' τα πρωτόνια αναστρέφουν το διάνυσμα \vec{v}'_x της ταχύτητάς τους και επομένως έχουν ταχύτητα ως προς το S' ,

$$v'_x = -\frac{v + V}{1 + vV/c^2}.$$



Σχ. 2.22: Ένα σύστημα S' πλησιάζει ένα ακίνητο σύστημα S με μη σχετικιστική ταχύτητα V .

Η ταχύτητά τους $v_x^{\text{τελ}}$ στο σύστημα S είναι μετά την ανάκλαση στον καθρέπτη:

$$v_x = \frac{v'_x - V}{1 - v'_x V/c^2} = \frac{-\frac{(v+V)}{1+vV/c^2} - V}{1 + \frac{(v+V)V/c^2}{1+vV/c^2}} = -\frac{2V + v(1 + V^2/c^2)}{1 + \frac{2Vv}{c^2} + \frac{V^2}{c^2}},$$

Επειδή $V \ll c$ παραλείπουμε όρους $V^2/c^2 \rightarrow 0$,

$$v_x \simeq -(v + 2V) \left(1 - \frac{2Vv}{c^2}\right) \simeq -v - 2V \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + \Theta(V^2/c^2),$$

και επομένως το μέτρο της ταχύτητάς του είναι,

$$v^{\text{τελ}} = -v_x \simeq v + 2V \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right).$$

Η αύξηση της ταχύτητας είναι,

$$\Delta v = v^{\text{τελ}} - v \simeq 2V \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{2V}{\gamma_{\text{αρχ}}^2}.$$

Αυτή είναι η αύξηση της ταχύτητας του πρωτονίου μετά από 1 ανάκλαση στον μαγνητικό καθρέπτη. Μετά από N ανακλάσεις η ταχύτητά του έχει αυξηθεί έτσι ώστε το τελικό γ να είναι $\gamma = 20 = 2\gamma_{\text{αρχ}}$.

Παίρνοντας τη μέση τιμή του γ^2 , $\bar{\gamma}^2 \simeq 250$,

$$\frac{2V}{\bar{\gamma}^2} = \frac{14}{250} \text{ km/sec} \simeq 0.05 \text{ km/sec}.$$

Επομένως, ο αριθμός των ανακλάσεων για να αυξήσει την τελική του ταχύτητα κατά $v_{\text{τελ}} \simeq 10^3 \text{ km/sec}$ είναι $N = 2 \times 10^4$. Ο χρόνος που απαιτείται είναι περί τα 5000 έτη.

Το ηλεκτρόνιο έχει 1836 φορές μικρότερη μάζα από το πρωτόνιο και εάν είχε την ίδια ενέργεια με το πρωτόνιο, θα είχε πολύ υψηλότερο γ και επομένως θα υφίσταται μικρότερη αύξηση της ταχύτητάς του στον ίδιο χρόνο. Ωστόσο ο αριθμός των ανακλάσεων θα ήταν ο ίδιος.

2.17 Άλλα Προβλήματα

1: Ένα καλώδιο ακτίνας r_1 διαρρέεται από ρεύμα εντάσεως I ενώ συγχρόνως είναι φορτισμένο στο δυναμικό $V(r = r_1) = V_0$ ενώ $V(r = r_2) = 0$, σε κάποια απόσταση $r = r_2 \gg r_1$.

Ένα e τοποθετείται εν ηρεμία σε απόσταση r , στο σημείο A .

- (α) Εξηγήστε τι ολισθήσεις θα κάνει το e καθώς και τις διευθύνσεις προς τις οποίες θα ολισθήσει.
- (β) Υπολογίστε το μέγεθος αυτών των ολισθήσεων όταν $r_1 = 0.1 \text{ cm}$, $r = 1 \text{ cm}$, $r_2 = 10 \text{ cm}$, $V_0 = 500 \text{ Volts}$, $I = 500 \text{ A}$.

2: Μια στήλη πλάσματος διαπερνάται από ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο $B = 10^4 \text{ Gauss}$. Η ενέργεια των e και ιόντων είναι $kT = 1 \text{ eV}$.

Η πυκνότητα του πλάσματος της στήλης έχει την ακόλουθη ακτινική εξάρτηση,

$$n(r) = n_0 \exp[-r^2/\alpha^2 - 1], \quad \alpha = 1 \text{ cm}.$$

- (α) Υπολογίστε την ταχύτητα ολίσθησης $\vec{v}_E(r)$ υποθέτοντας κατανομή Boltzmann, $n = n_0 \exp[e\phi/kT]$. Πόση είναι η $|\vec{v}_E|(\text{max})$.
- (β) Συγκρίνετε την $v_{E,\text{max}}$ με την ταχύτητα ολίσθησης v_g λόγω του πεδίου βαρύτητας της Γης.
- (γ) Για ποιά τιμή του B τα ιόντα He^+ έχουν ακτίνα Larmor ίση με α ;

3: Υποθέστε ότι το μαγνητικό πεδίο μιας μαγνητικής φιάλης έχει συνιστώσα $B_z(z) = B_0(1 + z^2/z_0^2)$.

- (α) Υπολογίστε τη συνιστώσα $B_r(r, z)$ ώστε να έχετε μια εικόνα του πεδίου στο χώρο.
- (β) Έστω ότι τοποθετείτε ένα ηλεκτρόνιο στο μέσο αυτής της φιάλης, στο $r = 0$, $z = 0$ με ταχύτητα v_0 και γωνία κλίσης α_0 , έτσι ώστε $v_{\parallel} = v_0 \cos \alpha_0$. Υπολογίστε σε ποιά απόσταση z το e θα ανακλασθεί.
- (γ) Γράψτε την εξίσωση κινήσεως του οδηγού κέντρου στη διεύθυνση \hat{z} για $r = 0$. Δείξτε ότι η κίνηση του οδηγού κέντρου είναι ταλάντωση και υπολογίστε τη συχνότητά της ω_0 .

(δ) Υπολογίστε τη δεύτερη αδιαβατική σταθερά $J_{\parallel} = \int v_{\parallel} ds$ για την κίνηση αυτή.

4: Δείξτε ότι όταν ένα πλάσμα με ισότροπη κατανομή των ταχυτήτων των φορτίων τεθεί σε μια μαγνητική φιάλη με λόγο $B_{\text{max}}/B_{\text{min}} = R$ και οι συγκρούσεις είναι αμελητέες, η πιθανότητα για απώλεια σωματιδίων από τη φιάλη είναι

$$P = 1 - \left[1 - \frac{1}{R}\right]^{1/2}.$$

Με βάση αυτό, υπολογίστε το ποσοστό των σωματιδίων που θα αποπαγιδευθεί σύντομα από μια φιάλη που περιέχει πλάσμα και έχει λόγο καθρέπτη $R = 4$.

5: Συνεχίζοντας το πρόβλημα της επιτάχυνσης των κοσμικών ακτίνων, δείξτε ότι η μέση ταχύτητα $\langle v_{\parallel} \rangle$ του φορτίου στη διάρκεια της επιτάχυνσης είναι:

$$\langle v_{\parallel} \rangle = \frac{v_0}{2}(\sqrt{R-1} \sin \alpha_0 + \cos \alpha_0),$$

ενώ η μεταβολή της ταχύτητάς του, $\Delta v_{\parallel} = v_{\parallel} - v_{\parallel,0}$,

$$\Delta v_{\parallel} = v_0(\sqrt{R-1} \sin \alpha_0 - \cos \alpha_0) = 2NV.$$

Εν συνεχεία, θεωρείστε τη δεύτερη αδιαβατική σταθερά,

$$J_{\parallel} = \int v_{\parallel} ds \simeq v_{\parallel} \cdot D = \text{σταθερό}.$$

Χρησιμοποιώντας το ότι $J_{\parallel} \simeq \text{σταθερό}$, δείξτε ότι ο χρόνος που απαιτείται για την επιτάχυνση, $T \equiv \Delta v_{\parallel} / \dot{v}_{\parallel}$, είναι:

$$T \equiv \frac{\Delta v_{\parallel}}{\dot{v}_{\parallel}} = \frac{\Delta v_{\parallel}}{\langle v_{\parallel} \rangle} \frac{D}{2V}.$$

Συγκρίνετε αυτό το χρόνο με το χρόνο που απαιτείται στο σωματίδιο να κινηθεί N φορές την απόσταση D με τη μέση ταχύτητά του $\langle v_{\parallel} \rangle$,

$$T' = N \frac{D}{\langle v_{\parallel} \rangle}.$$

6: Θεωρείστε ένα πρωτόνιο ενέργειας αρχικής $E_0 = 1 \text{ keV}$ παγιδευμένο μέσα σε μια μεσοαστρική μαγνητική φιάλη με λόγο $R = B_{\max}/B_{\min} = 10$ και μήκος $D = 10^{18} \text{ cm} \simeq 1$ έτος φωτός όπου τα τοιχώματα A, B προσεγγίζουν με ταχύτητα $V = 10 \text{ km/sec}$. Υπολογίστε τα E, N, T αν $\alpha_0 = 45^\circ$.

7: Υπολογίστε την ενέργεια E_m που είναι αποθηκευμένη στη Μαγνητόσφαιρα της Γης,

$$E_m = \int \int \int_V \frac{B^2}{8\pi} dV,$$

εξωτερικά της επιφάνειας της Γης σε όλο το χώρο.

8: Ένας *Pulsar* έχει μάζα $M = 10^{30} \text{ kg}$ και περίοδο 10^{-3} secs ενώ το μαγνητικό του πεδίο έχει μέγεθος $B \simeq 10^9 \text{ Gauss}$. Υπολογίστε την ενέργεια ενός πρωτονίου στην επιφάνεια αυτού του *Pulsar* έτσι ώστε η βαρύτητα να εξισορροπεί τη δύναμη *Lorentz*.

9: Παράγετε την έκφραση της ακτίνας *Larmor* και της συχνότητας *Larmor* για ένα σχετικιστικό σωματίδιο μάζας ηρεμίας m_0 και ταχύτητας $v = \beta c$. Υπολογίστε επίσης τη μαγνητική ροπή ενός τέτοιου σωματιδίου και δείξτε ότι διατηρείται.

10: Ένα σχετικιστικό φορτισμένο σωματίδιο είναι σε ένα χρονικά μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο. Δείξτε ότι η ενέργειά του E μεταβάλλεται με ρυθμό,

$$\frac{dE}{dt} = \frac{P_{\perp}^2}{2\gamma m_0 c^2} \frac{\partial B}{\partial t}$$

με $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$.

11: Κίνηση φορτίου σε μονοχρωματικό, επίπεδο κύμα,

$$E = (0, E, 0), \quad B = (0, 0, B).$$

Ορίστε το δυναμικό $\vec{A} = (0, \alpha(r) \cos \omega r, 0)$ όπου α είναι το πλάτος του κύματος, ω η συχνότητά του και $z = t - x/c$ ώστε,

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A},$$

και,

$$E = B = -\frac{1}{c} \frac{dA}{dr},$$

Γράψτε τη σχετικιστική εξίσωση Lorentz:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) &= \frac{eB}{mc^2} \dot{y} = -\frac{e}{mc^2} \dot{y} \frac{dA}{dr}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{y}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) &= \frac{eB}{mc} (Ec - B\dot{x}) = -\frac{e}{mc^2} (c - \dot{x}) \frac{dA}{dr}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{r}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) &= 0, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{c}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) = \frac{eE}{mc} \dot{y} = -\frac{e}{mc^2} \dot{y} \frac{dA}{dr}, \end{aligned}$$

και δείξτε ότι $1 - \dot{x}/c = \sqrt{1-\beta^2}$ υποθέτοντας ότι το ηλεκτρόνιο είναι αρχικά σε ηρεμία στην αρχή.

Εν συνεχεία δείξτε ότι:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{c}{2} \left(\frac{eA}{mc^2} \right)^2 \frac{dr}{dt} = \frac{c}{2} \left(\frac{\Omega}{\omega} \right)^2 \frac{dr}{dt} \cos^2 \omega r, \\ \dot{y} &= -c \left(\frac{eA}{mc^2} \right) \frac{dr}{dt} = -c \left(\frac{\Omega}{\omega} \right) \frac{dr}{dt} \cos \omega r, \end{aligned}$$

$$\Omega = e\alpha\omega/mc^2.$$

Τέλος, παίρνοντας μέση τιμή σε μια περίοδο $T = 2\pi/\omega$, $\alpha(r)$ μπορεί να θεωρηθεί σταθερά και $\langle \dot{y} \rangle = 0$

$$\langle \dot{x} \rangle = \langle c(\Omega/2\omega)^2 / 1 + (\Omega/2\omega)^2 \rangle.$$

12: Ένα σχετικιστικό πρωτόνιο με ενέργεια $E = 1 \text{ GeV}$ είναι παγιδευμένο ανάμεσα σε δύο νεφελώματα—μαγνητικούς καθρέπτες που απείχαν αρχικά 10^{17} cm και προσεγγίζουν με ταχύτητα $V = 7 \text{ km/sec}$. Να υπολογιστεί ο αριθμός των ανακλάσεων και ο χρόνος για να διπλασιασθεί η ενέργεια του πρωτονίου. Αν αντί του πρωτονίου είχαμε ηλεκτρόνιο της ίδιας ενέργειας, θα είχε διπλασιασθεί η ενέργειά του στον ίδιο χρόνο ;

13: Ένα φορτισμένο σωματίδιο με μάζα m και φορτίο q που είναι αρχικά στην αρχή του συστήματος $Oxyz$ με μηδενική ταχύτητα, αντιλαμβάνεται την ύπαρξη των σταθερών πεδίων $\vec{E} = E\hat{y}$ και $\vec{B} = B\hat{z}$. Δείξτε ότι η τροχιά του πάνω στο επίπεδο xy είναι η κυκλοειδής,

$$x = \frac{E}{\omega_L B} (\omega_L t - \sin \omega_L t),$$

$$y = \frac{E}{\omega_L B} (1 - \cos \omega_L t),$$

όπου $\omega_L = qB/mc$. Η κίνηση είναι περιοδική με τί περιοδικότητα ;