



Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Τμήμα Φυσικής
Χειμερινό εξάμηνο 2025-2026
4η εργασία στη Μηχανική Ι

1. Σώμα μάζας m κινείται στο πεδίο ελκτικής κεντρικής δύναμης $V = -\frac{GMm}{r+d}$, όπου GM και d θετικές σταθερές. Η τροχιά του έχει ασπίδες στις ακτίνες r_1 και r_2 , όπου $r_2 > r_1 \gg d$. Κρατώντας μέχρι πρώτης τάξης όρους ως προς d βρείτε:

(α) τη στροφορμή και την ενέργεια του σώματος,

(β) την περίοδο της ακτινικής κίνησης,

(γ) τη γωνιακή μετατόπιση σε μία περίοδο της ακτινικής κίνησης και μέσω αυτής την μετάπτωση του περίκεντρου της τροχιάς.

Υπόδειξη: Δείξτε ότι για μικρά d το πεδίο είναι $V \approx -\frac{GMm}{r} + \frac{GMmd}{r^2}$.

Δίνονται τα ολοκληρώματα $\int_{r_1}^{r_2} \frac{r dr}{\sqrt{(r-r_1)(r_2-r)}} = \pi \frac{r_1+r_2}{2}$, $\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r\sqrt{(r-r_1)(r_2-r)}} = \frac{\pi}{\sqrt{r_1 r_2}}$.

Για να απλοποιηθούν οι πράξεις θεωρήστε σε όλη την άσκηση $m = 1$, $GM = 1$, $r_1 = 1 - \varepsilon$, $r_2 = 1 + \varepsilon$.

2. Σώμα μάζας $m = 1$ κινείται στο κεντρικό πεδίο $V = e^{1/r}$. Αρχικά βρίσκεται σε μεγάλη απόσταση από το κέντρο, έχει ταχύτητα μέτρου $v_\infty = \sqrt{2e}$ και παράμετρο κρούσης $b = 1/\sqrt{e}$ (όλα σε κατάλληλες μονάδες).

(α) Ποια η ελάχιστη απόσταση που φτάνει από το κέντρο;

(β) Γράψτε την διαφορική εξίσωση που πρέπει να λυθεί για να βρεθεί η εξίσωση τροχιάς (δεν χρειάζεται να την επιλύσετε, αλλά προσπαθήστε να την απλοποιήσετε όσο γίνεται).

3. Η κίνηση ενός δέσμιου σωματιδίου στο βαρυτικό πεδίο μιας ακλόνητης σημειακής μάζας είναι μια έλλειψη. Σε ποια σημεία της ελλειπτικής τροχιάς η ταχύτητα απομάκρυνσης και προσέγγισης του σωματιδίου στο βαρυτικό κέντρο γίνεται μέγιστη;

4. Ένα σωματίδιο κινείται στο βαρυτικό κέντρο μιας ακλόνητης σημειακής μάζας. Σε κάθε περιφορά του σωματιδίου και όταν το σωματίδιο διέρχεται από το περίκεντρο, μια έκρηξη της κεντρικής μάζας ωθεί το σωματίδιο ακτινικά προς τα έξω, δίνοντάς του μια στιγμιαία σταθερή ακτινική ταχύτητα v_0 . Αν αρχικά το σωματίδιο κινούνταν σε σχεδόν κυκλική τροχιά ακτίνας r_0 , μετά από πόσες τέτοιες ωθήσεις το σωματίδιο θα πάψει να είναι δέσμιο και θα διαφύγει από το βαρυτικό πεδίο;

Λύσεις

1. (α) Με $\frac{1}{r+d} = \frac{1}{r}(1+d/r)^{-1} \approx \frac{1}{r}(1-d/r)$ (χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα $(1+\epsilon)^\nu \approx 1+\nu\epsilon$ για $|\epsilon| \ll 1$)

είναι $V \approx -\frac{GMm}{r} + \frac{GMmd}{r^2}$ και $V_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r+d} \approx \frac{L^2 + 2GMm^2d}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$ (ουσιαστικά ίδιο με το πρόβλημα Kepler στροφορμής $L_K = \sqrt{L^2 + 2GMm^2d}$).

Οι ασπίδες είναι οι ακτίνες στις οποίες $V_{\text{eff}}(r_1) = V_{\text{eff}}(r_2) = E$ από τις οποίες προκύπτει $L \approx \sqrt{GMm^2p}(1-d/p)$ (θετική χωρίς βλάβη της γενικότητας) και $E \approx -\frac{GMm}{2\alpha}$, όπου $\frac{2}{p} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \Leftrightarrow p = \frac{2r_1r_2}{r_1+r_2}$ και $\alpha = \frac{r_1+r_2}{2}$. Με την προτεινόμενη κανονικοποίηση $L \rightarrow \sqrt{1-\epsilon^2} \left(1 - \frac{d}{1-\epsilon^2}\right)$, $E \rightarrow -\frac{1}{2}$.

(β) $E - V_{\text{eff}}(r) \approx -\frac{GMm}{2\alpha} - \frac{GMm^2p}{2mr^2} + \frac{GMm}{r} = GMm \frac{(r-r_1)(r_2-r)}{2\alpha r^2}$,

$T_r = 2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\dot{r}} = 2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{(2/m)[E - V_{\text{eff}}(r)]}} \approx 2\sqrt{\frac{\alpha}{GM}} \int_{r_1}^{r_2} \frac{r dr}{\sqrt{(r-r_1)(r_2-r)}} = 2\pi\sqrt{\frac{\alpha^3}{GM}} \rightarrow 2\pi$.

(Η ακτινική κίνηση δεν έχει πρώτης τάξης διόρθωση ως προς d , για δεδομένα βέβαια r_1, r_2 .)

(γ) $\Delta\phi = 2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{\dot{\phi}}{\dot{r}} dr = 2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{(L/mr^2) dr}{\sqrt{(2/m)[E - V_{\text{eff}}(r)]}} \approx \left(1 - \frac{d}{p}\right) \int_{r_1}^{r_2} \frac{2\sqrt{r_1r_2} dr}{r\sqrt{(r-r_1)(r_2-r)}} = 2\pi \left(1 - \frac{d}{p}\right)$.

Δύο διαδοχικά περίκεντρα απέχουν γωνιακή απόσταση $-2\pi d/p = -\pi d \frac{r_1+r_2}{r_1r_2} \rightarrow -\frac{2\pi d}{1-\epsilon^2}$.

Το αρνητικό πρόσημο σημαίνει ότι το περίκεντρο μεταπίπτει αντίθετα στην κίνηση του σώματος. Δηλ. ενώ το ϕ του σώματος αυξάνει με τον χρόνο, αν $\phi_{\pi 1}$ ένα περίκεντρο το επόμενο συναντάται σε $\phi_{\pi 2} < \phi_{\pi 1} + 2\pi$.

Η αντίστοιχη γωνιακή ταχύτητα είναι $\frac{-2\pi d/p}{T_r} = -\frac{d\sqrt{2GM}}{r_1r_2\sqrt{r_1+r_2}} \rightarrow -\frac{d}{1-\epsilon^2}$.

Τα ίδια προκύπτουν και από $u'' + u = -\frac{mf}{L^2u^2}$ με $f =$

$-\frac{GMm}{(r+d)^2} \approx -\frac{GMm}{r^2}(1-2d/r) = -GMmu^2(1-2du)$,

οπότε $u'' + (1+2d/P)u = 1/P$, $P = L^2/GMm^2$, με λύση

$u = \frac{1+\epsilon \cos[(1+d/P)\phi]}{P+2d}$, $r = \frac{1}{u}$.

Είναι $\frac{1}{r_1} = \frac{1+\epsilon}{P+2d}$ και $\frac{1}{r_2} = \frac{1-\epsilon}{P+2d}$, οπότε $\frac{2}{P+2d} =$

$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \Leftrightarrow P+2d = \frac{2r_1r_2}{r_1+r_2}$ και $\epsilon = \frac{r_2-r_1}{\frac{2r_1r_2}{r_1+r_2}}$. Επομένως η

εξίσωση τροχιάς είναι $r = \frac{\frac{2r_1r_2}{r_1+r_2}}{1 + \frac{r_2-r_1}{r_1+r_2} \cos[(1+d\frac{r_1+r_2}{2r_1r_2})\phi]}$.

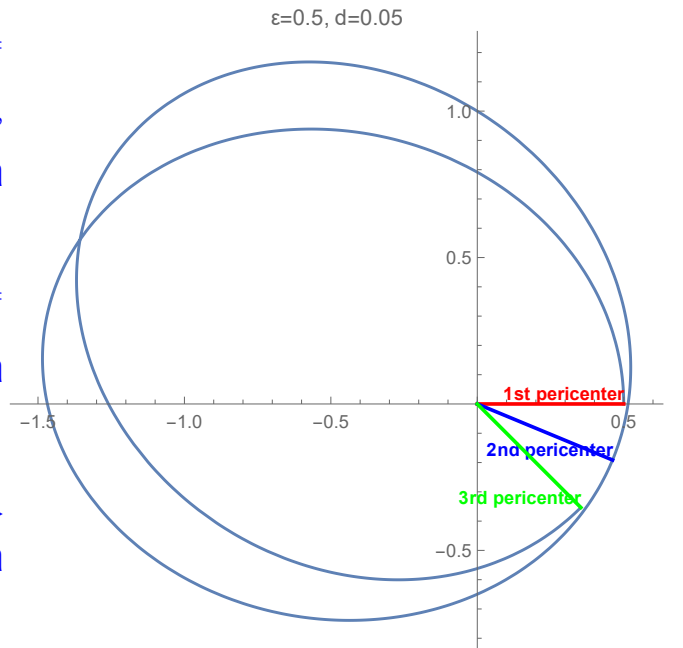
Τα περίκεντρα αντιστοιχούν σε $(1+d\frac{r_1+r_2}{2r_1r_2})\phi = 2k\pi \Leftrightarrow$

$\phi \approx 2k\pi(1 - d\frac{r_1+r_2}{2r_1r_2})$ και απέχουν γωνιακή απόσταση $-\pi d \frac{r_1+r_2}{r_1r_2}$.

Τα ίδια προκύπτουν και από $V_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r+d} \approx \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}(1-d/r) \approx \frac{L_K^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$ με

$L_K = \sqrt{L^2 + 2GMm^2d} \approx L(1+d/p)$, οπότε $\dot{\phi} = \frac{L}{mr^2} = \frac{L_K(1-d/p)}{2mr^2}$, δηλ. $\phi = \phi_K(1-d/p)$ όπου ϕ_K είναι

η γωνία για το πρόβλημα Kepler για το οποίο $V_{\text{eff}}(r) = \frac{L_K^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$, $\dot{\phi}_K = \frac{L_K}{mr^2}$.



2. Το σώμα έχει στροφορμή με μέτρο $L = mv_\infty b = \sqrt{2}$ και ενέργεια $E = \frac{mv_\infty^2}{2} + V|_{r=\infty} = e + 1$.

(α) Η $V_{\text{eff}} = \frac{L^2}{2mr^2} + V = \frac{1}{r^2} + e^{1/r}$ είναι φθίνουσα, μεταβάλλεται από $V_{\text{eff}}|_{r=0^+} = +\infty$ σε $V_{\text{eff}}|_{r=\infty} = 1$.

Η ελάχιστη απόσταση $r_{\min}$ είναι η μόνη λύση της εξίσωσης $V_{\text{eff}}(r) = E \Leftrightarrow \frac{1}{r^2} + e^{1/r} = e + 1$, δηλ. $r_{\min} = 1$.

(β) $u'' + u = -\frac{mf}{L^2 u^2}$ με $f = -\frac{dV}{dr} = \frac{1}{r^2} e^{1/r} = u^2 e^u$, δηλ. $u'' + u = -\frac{1}{2} e^u$. Πρέπει να επιλυθεί με αρχικές

συνθήκες $u = 0$ και $u' = \frac{-\dot{r}/r^2}{\dot{\phi}} = \frac{mv_\infty}{L} = \frac{1}{b} = \sqrt{e}$ αν επιλέξουμε άξονες ώστε η στροφορμή να είναι

θετική, π.χ. το σώμα έχει αρχικά $x = +\infty$ και $y = +b$, οπότε αρχικά $\phi = 0^+$ και η ϕ αυξάνει με το χρόνο.

Μπορούμε να ολοκληρώσουμε μία φορά την εξίσωση αν πολλαπλασιάσουμε με u' (ισοδύναμα αν γράψουμε

$u'' = u' \frac{du'}{du}$). Έτσι $u' u'' + u' u = -\frac{1}{2} u' e^u \Leftrightarrow u'^2 + u^2 + e^u = \text{σταθερά} = e + 1$ από αρχικές συνθήκες. Δηλ.

ισχύει $u'^2 + u^2 + e^u = e + 1$.

Η διαφορική αυτή εξίσωση πρώτης τάξης θα μπορούσε να βρεθεί κατευθείαν από το ολοκλήρωμα ενέργειας

$\frac{m\dot{r}^2}{2} + V_{\text{eff}}(r) = E$ θέτοντας $\dot{r} = \dot{\phi} \frac{dr}{d\phi} = \frac{L}{mr^2} \frac{dr}{d\phi} = -\frac{L}{m} u'$. Έτσι προκύπτει $u'^2 + u^2 + e^u = e + 1$.

Η εξίσωση πρώτης τάξης που προέκυψε είναι χωριζομένων μεταβλητών και ανάγεται σε ολοκλήρωμα. Μέχρι το σώμα να φτάσει στο $r_{\min}$ είναι $u' > 0$ (αφού $L > 0$), οπότε $u' = +\sqrt{e + 1 - u^2 - e^u}$. Χωρίζοντας μετα-

βλητές και ολοκληρώνοντας έχουμε εξίσωση τροχιάς $\int_0^{1/r} \frac{du}{\sqrt{e + 1 - u^2 - e^u}} = \phi$.

Ένας άλλος τρόπος να βρεθεί η σχέση αυτή είναι να

ολοκληρώσουμε την $d\phi = \frac{\dot{\phi}}{\dot{r}} dr$. Με $\dot{\phi} = \frac{L}{mr^2} = \frac{\sqrt{2}}{r^2}$ και

$\dot{r} = -\sqrt{\frac{2}{m} [E - V_{\text{eff}}(r)]} = -\sqrt{2} \sqrt{e + 1 - \frac{1}{r^2} - e^{1/r}}$

(αρνητική όσο το σώμα πλησιάζει προς το κέντρο), δίνει

$$\int_0^\phi d\phi = \int_\infty^r \frac{dr}{-r^2 \sqrt{e + 1 - \frac{1}{r^2} - e^{1/r}}}.$$

Με αλλαγή μεταβλητής $r = 1/u$ καταλήγουμε στη σχέση

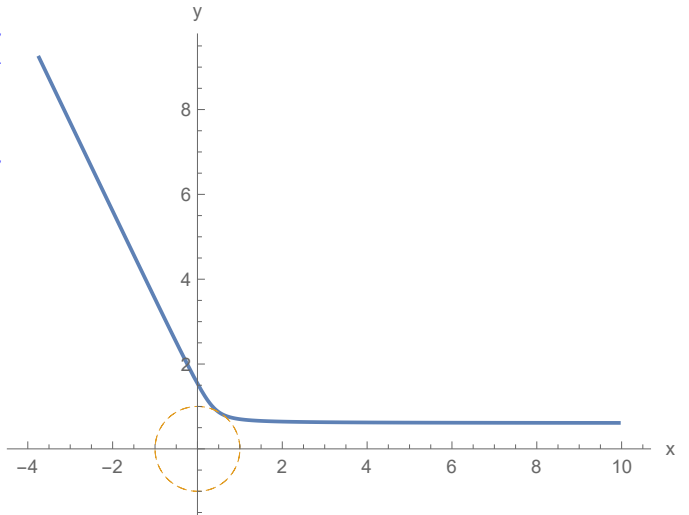
που βρέθηκε και πριν $\phi = \int_0^{1/r} \frac{du}{\sqrt{e + 1 - u^2 - e^u}}$.

Η αριθμητική ολοκλήρωση δίνει ότι μέχρι να φτάσει στο

$r_{\min} = 1$ διαγράφεται γωνία $\phi \approx 58^\circ$. Άλλη τόση

γωνία διαγράφεται μέχρι το σώμα να απομακρυνθεί από

το $r_{\min} = 1$ στο άπειρο.



3. Το μέτρο της ακτινικής ταχύτητας $|\dot{r}|$ γίνεται μέγιστο όταν η $V_{\text{eff}}(r)$ γίνεται ελάχιστη (αφού $\frac{m\dot{r}^2}{2} + V_{\text{eff}}(r) =$

σταθερά). Είναι $V_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$ και $\frac{dV_{\text{eff}}}{dr} = 0 \Leftrightarrow \frac{L^2}{mr^3} = \frac{GMm}{r^2} \Leftrightarrow r = \frac{L^2}{GMm^2}$.

Αλλιώς: $r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \phi} \Rightarrow \dot{r} = \frac{dr}{d\phi} \dot{\phi} = \frac{L\varepsilon}{mp} \sin \phi$, άρα η $|\dot{r}|$ γίνεται μέγιστη για $\phi = \pm\pi/2$, όταν $r = p$.

4. Σε κάθε ώθηση η ενέργεια αυξάνεται κατά $\frac{mv_0^2}{2}$ (αφού $\Delta \vec{v} \perp \vec{v}_{\text{αρχική}}$ οπότε $v_{\text{τελική}}^2 = v_{\text{αρχική}}^2 + v_0^2$). Αφού

αρχικά $E = -\frac{GMm}{2r_0}$ η ενέργεια γίνεται θετική μετά από n ωθήσεις με $-\frac{GMm}{2r_0} + n\frac{mv_0^2}{2} \geq 0 \Leftrightarrow n \geq \frac{GM}{r_0 v_0^2}$.

Επομένως το πλήθος των απαιτούμενων ωθήσεων ισούται με τον ακέραιο $n \in \left[\frac{GM}{r_0 v_0^2}, \frac{GM}{r_0 v_0^2} + 1 \right)$.