

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Χειμερινό Εξάμηνο 2025-26

2η εργασία στη Μηχανική I

Πρόβλημα 1 Κατασκευάστε τα διαγράμματα φάσης (για διάφορες τιμές της ενέργειας) για ένα σωματίδιο μάζας m που κινείται σε μία διάσταση υπό την επίδραση δύναμης που προέρχεται από δυναμική ενέργεια της μορφής (α) $V(x) = -kx$, (β) $V(x) = (k/2)x^2$, (γ) $V(x) = -(k/2)x^2$, (δ) $V(x) = (k/4)x^4$, (ε) $V(x) = V_0 \sin(kx)$, με k, V_0 θετικές ποσότητες σε όλες τις περιπτώσεις. Αν οι καμπύλες που σχεδιάσετε είναι κάποιου γνωστού τύπου σημειώστε το.

Πρόβλημα 2 Ένα σωματίδιο μοναδιαίας μάζας, κινούμενο υπό της επίδραση κάποιας ταχυτητοεξαρτώμενης δύναμης $F(u)$, διαγράφει στο χώρο των φάσεων ένα τόξο κύκλου της μορφής $u(x) = \sqrt{R^2 - (x - x_0)^2}$. Καθώς πλησιάζει η αποτύπωση της κίνησης στο διάγραμμα φάσεων στο σημείο $x = x_0 + R$, όπου η ταχύτητα μηδενίζεται, βρείτε αν είναι πεπερασμένος ή όχι ο χρόνος μετάβασης στο τελικό αυτό σημείο. Ποια είναι η υποτιθέμενη δύναμη $F(u)$ που οδηγεί σε μια τέτοια «τροχιά» στο χώρο των φάσεων;

Πρόβλημα 3 [πιο δύσκολο] Μονοδιάστατη «σκέδαση». Ένα σωματίδιο κινείται σε μια διάσταση από το $-\infty$ προς το $+\infty$ έχοντας δυναμική ενέργεια $V(x) = V_0$ και συνολική ενέργεια $E \gg V_0$. Ένα δεύτερο ίδιο σωματίδιο (που φέρει και κάποιου είδους φορτίο) κινείται με την ίδια ολική ενέργεια αλλά η δυναμική ενέργεια σε μια περιοχή γύρω από το $x = 0$ είναι τώρα $V_0 + \delta V - kx^2/2$ (με $\delta V, k$ θετικές σταθερές), ενώ πέρα από αυτή την περιοχή η δυναμική ενέργεια είναι πάλι V_0 (η δυναμική ενέργεια είναι τελικά συνεχής συνάρτηση του x και για το 2ο σωματίδιο). Αφού σχεδιάσετε ποιοτικά τις δύο καμπύλες στο χώρο των φάσεων που θα ακολουθήσουν τα δύο αυτά σωματίδια, να βρείτε πόσο πιο πίσω από το 1ο θα βρίσκεται το 2ο, αν ξεκινήσουν και τα δύο ταυτόχρονα από το ίδιο σημείο μακριά από την επίμαχη περιοχή και διασχίσουν και τα δύο την επίμαχη περιοχή. Χρησιμοποιήστε στην τελική σας έκφραση το εύρος Δx της περιοχής του «καρούμπαλου» της δυναμικής ενέργειας του 2ου σωματιδίου και την πολύ μεγάλη αδιάστατη ποσότητα $\chi = E/\delta V$. Αν δεν γνωρίζατε την τιμή του δV , αλλά ούτε και την τιμή του k , και εκτελούσατε πολλά τέτοια πειράματα με διάφορες μεγάλες τιμές ολικής ενέργειας όπου θα παρατηρούσατε τις αποστάσεις ανάμεσα στα δύο σωματίδια σε κάθε ενεργειακό επίπεδο, θα μπορούσατε να εκτιμήσετε την τιμή κάποιου συνδυασμού των δV και k ;

Απαντήσεις

Πρόβλημα 1

(α) Παραβολές συμμετρικές ως προς τον άξονα x τοποθετημένες η μια μέσα στην άλλη: $x = (mv^2)/(2k) - E/k$, δηλαδή της μορφής $av^2 + x_E$ με $a = m/(2k)$ και $x_E = -E/k$. (β) Ελλείψεις με κέντρο την αρχή των αξόνων $(x/a)^2 + (v/b)^2 = 1$ με ημιάξονες $a = \sqrt{2E/k}$, $b = \sqrt{2E/m}$. (γ) Υπερβολές με κέντρο την αρχή των αξόνων $(x/a)^2 - (v/b)^2 = 1$ με $a = \sqrt{2/k}$, $b = \sqrt{2/m}$ και E οιοδήποτε προσήμου. Για $E = 0$ λαμβάνουμε τις ασύμπτωτες $v = \pm x(b/a)$, για $E > 0$ τους άνω-κάτω κλάδους της υπερβολής και για $E < 0$ τους δεξι-αριστερό κλάδους της υπερβολής. (δ) Παραμορφωμένες (πιο τετραγωνισμένες) «ελλείψεις» της μορφής $(x/a)^4 + (v/b)^2 = 1$ με ημιάξονες $a = \sqrt[4]{4E/k}$, $b = \sqrt{2E/m}$. (ε) Παραμορφωμένες (πιο μυτερές στα πλαϊνά) «ελλείψεις» της μορφής $V_0 \sin(kx) + (v/b)^2 = E$ με $b = \sqrt{2/m}$ για $-V_0 < E < V_0$, επικυλωμένες «ασύμπτωτες υπερβολών» της μορφής $(v/b)^2 = V_0(1 - \sin(kx))$ που διακόπτονται από τα σημεία $v = 0$, $x_n = (4k+1)\pi/(2k)$ συν τα σημεία αυτά για $E = V_0$ και οι συνεχόμενες «κυματιστές γραμμές» $(v/b) = \pm \sqrt{V_0((E/V_0) - \sin(kx))}$ για $E > V_0$.

Πρόβλημα 2

Αφού $u^2 + (x - x_0)^2 = R^2$ για $x = R + x_0 - \epsilon$ και $u = \delta$ με $|\epsilon|, |\delta| \ll 1$ (πολύ μικρές ποσότητες), θα είναι $\delta^2 + R^2 - 2R\epsilon \simeq R^2$ στη χαμηλότερη δυνατή τάξη ως προς δ, ϵ . Οπότε $u = \delta = \pm \sqrt{2R(R + x_0 - x)}$. Λύνοντας βρίσκουμε (θετική η δοσμένη ταχύτητα)

$$\int_{R+x_0-\epsilon(0)}^{R+x_0} \frac{dx}{\sqrt{R+x_0-x}} = \sqrt{2R}\Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{1}{\sqrt{2R}} 2\sqrt{\epsilon(0)}.$$

Δηλαδή ο χρόνος είναι πεπερασμένος. Η μορφή της δύναμης είναι $F = mdu/dt = \mathcal{M}(du/dx)u = d(u^2/2)/dx$. Από την δοθείσα σχέση $u^2 = R^2 - (x_0 - x)^2$ βρίσκουμε

$$F(u) = -(x - x_0) = -\sqrt{R^2 - u^2}$$

γενικά και κοντά στο δοθέν σημείο $F(u) \simeq -R$. Στην προηγούμενη έκφραση η ποσότητα $x - x_0$ είναι θετική καθώς το σωματίδιο πλησιάζει στο $x = x_0 + R$ οπότε κρατήσαμε το αρνητικό πρόσημο κατά τον αποτετραγωνισμό της u .

Πρόβλημα 3

Οι δύο «καμπύλες» έχουν τη μορφή (α) ευθείας για το ελεύθερο σωματίδιο που δεν «βλέπει» το καρούμπαλο δυναμικού. Η ταχύτητά του είναι $v_1 = \sqrt{2(E - V_0)/m}$. (β) Το δεύτερο σωματίδιο μειώνει λίγο ταχύτητα καθώς περνάει πάνω από το καρούμπαλο, ενώ εκτός αυτής της περιοχής έχει ίδια ταχύτητα με το 1. Η ταχύτητα του σωματιδίου καθώς διέρχεται από τη διαταραχή του δυναμικού θα είναι $v_2 = \sqrt{2(E - V_0 - \delta V + kx^2/2)/m} \simeq \sqrt{v_1^2 - 2(\delta V - kx^2/2)/m}$. Αναπτύσσοντας κατά Taylor την παραπάνω ρίζα βρίσκουμε

$$v_2 \simeq v_1 - \frac{\delta V - kx^2/2}{mv_1}$$

Επομένως αν τα δύο σωματίδια ξεκινήσουν ταυτόχρονα θα απέχουν μετά την έξοδο του 2ου από το διαταραγμένο δυναμικό

$$\begin{aligned}\delta x &= \int_0^t (v_1 - v_2) dt \simeq \int_{-\Delta x/2}^{+\Delta x/2} \frac{\delta V - kx^2/2}{mv_1} \frac{dx}{v_2} \simeq \frac{1}{mv_1^2} \int_{-\Delta x/2}^{+\Delta x/2} (\delta V - kx^2/2) dx \\ &= \frac{1}{2E} (\delta V \Delta x - \frac{k\Delta x^3}{8}) = \frac{1}{2E} (\delta V \Delta x - \delta V \Delta x/3) = \frac{\Delta x \delta V}{3E} = \frac{1}{3\chi} \Delta x.\end{aligned}\quad (1)$$

Αν μετρούσαμε πειραματικά πολλά δx για πολλές τιμές της υψηλής ενέργειας και παριστάναμε την τιμή της $\delta x E$ ως συνάρτηση της $1/E$ θα πέρναμε προσεγγιστικά την σταθερή τιμή $\Delta x \delta V/3$ για τιμές της $1/E$ κοντά στο 0. Για λίγο μεγαλύτερες τιμές της $1/E$ θα εμφανίζονταν αποκλίσεις από αυτή την τιμή εξαιτίας των μεγαλύτερης τάξης όρων που αγνοήσαμε στις παραπάνω προσεγγίσεις. Αυτές οι αλλαγές συνδέονται με άλλες ποσότητες-συνδυασμούς των $\delta V, \Delta x$, π.χ. $\delta V^2 \Delta x$.