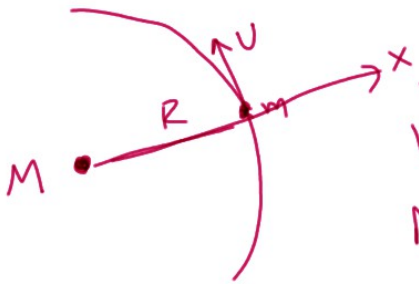
Θέμα 3, 26/4/2010

$$\vec F = -\frac{GM'm}{r^2}\,\hat r$$

$$V = -\frac{GM'm}{r}$$



$M \longrightarrow M'$

$\underbrace{m << M'}\, < M$

Νέα τροχιά; Εκκεντρότητα;

Λύση: Πριν: $r = R$, $\frac{mv^2}{R} = \frac{GMm}{R^2} \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$ και $L = mvr = m\sqrt{GMR}$

Η στροφορμή μένει ίδια και μετά.

$$u'' + u = -\frac{mF}{L^2u^2} = -\frac{m}{m^2 GMR\,\cancel{u^2}}\left(-GM'm\,\cancel{u^2}\right) = \frac{M'}{MR}$$

$u = \frac{M'}{MR} + C_1\cos\varphi + C_2\sin\varphi$ με $u\big|_{\varphi=0} = \frac{1}{R} \Leftrightarrow C_1 = \frac{1}{R}\left(1 - \frac{M'}{M}\right)$

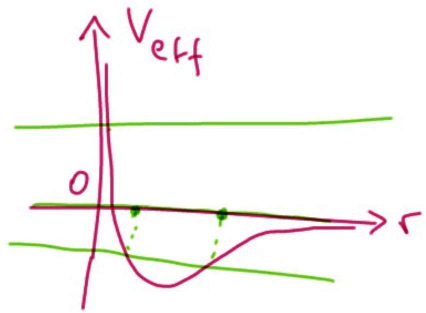
$$u' = \frac{d(1/r)}{d\varphi} = \frac{d(1/r)}{dt}\Big/\dot\varphi = -\frac{1}{r^2}\dot r\Big/\frac{L}{mr^2} = 0$$

$$u'\big|_{\varphi=0} = 0 \Leftrightarrow 0 = C_2$$

Τελικά $u = \frac{M'}{MR} + \frac{1}{R}\left(1 - \frac{M'}{M}\right)\cos\varphi \Leftrightarrow r = \frac{R\,M/M'}{1 + \underbrace{\left(\frac{M}{M'} - 1\right)}_{>0}\cos\varphi}$ δηλ. $\varepsilon = \frac{M}{M'} - 1$

$\varepsilon < 1 \Leftrightarrow \frac{M}{M'} - 1 < 1 \Leftrightarrow M' > \frac{M}{2}$ έλλειψη. $\varepsilon > 1 \Leftrightarrow M' < \frac{M}{2}$ υπερβολή. $\varepsilon = 1 \Leftrightarrow M' = \frac{M}{2}$ παραβ.

Αλλιώς: $V_{eff} = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GM'm}{r}$



$E < 0 \rightsquigarrow$ κλειστή (έλλειψη)

$E = 0 \rightsquigarrow$ ανοικτή (παραβολή)

$E > 0 \rightsquigarrow$ ανοικτή (υπερβολή)

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{GM'm}{r} \quad \text{με} \quad v = \sqrt{\frac{GM}{R}}, \ r = R$$

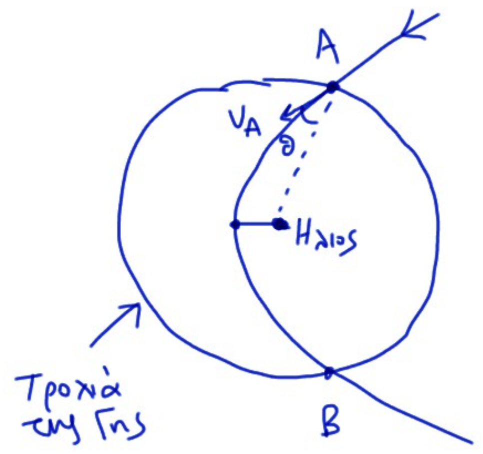
Δηλ. $E = \frac{mGM}{2R} - \frac{GM'm}{R} = \frac{Gm}{R}\left(M' - \frac{M}{2}\right)$

Αν $M' > \frac{M}{2} \rightsquigarrow$ υπερβολή

Αν $M' = \frac{M}{2} \rightsquigarrow$ παραβολή

$M' < \frac{M}{2} \rightsquigarrow$ έλλειψη.

Κομήτης τέμνει την τροχιά της Γης στα Α, Β



Εκεί $v_A = \mu\, v_{Γης}$ και $(\widehat{\bar{v}_A, \hat{r}}) = \theta$

(γνωστά τα μ και θ)

(α) Ποιο το περιήλιο της τροχιάς του;

(β) Ποιο ολοκλήρωμα δίνει το χρόνο κίνησης από Α σε Β;

Λύση:

$$v_{Γης} = \sqrt{\frac{GM}{\alpha}} \quad \left(\text{από: } \frac{m v_{Γης}^2}{\alpha} = \frac{GMm}{\alpha^2}\right) \text{ όπου } \alpha = 1\,AU$$

και M = μάζα του Ήλιου.

$$E = \frac{m v_A^2}{2} - \frac{GMm}{\alpha} = \frac{GMm}{\alpha}\left(\frac{\mu^2}{2} - 1\right)$$

$$L = m\,\alpha\, v_A \sin\theta = m\,\mu\sqrt{GM\alpha}\,\sin\theta$$

$$\bar{L} = \bar{r}\times m\bar{v}$$

$$L = r\,m\,v_\varphi \qquad r\,m\,v\sin$$

$$\cancel{r_\perp m v}$$

$$V_{eff} = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r} = \frac{GMm\,\mu^2\alpha\sin^2\theta}{2r^2} - \frac{GMm}{r}$$

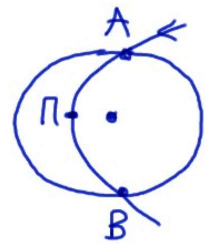
(α) r_π η μικρότερη λύση της $V_{eff} = E \Leftrightarrow E r^2 + GMm\,r - \frac{1}{2}GMm\,\mu^2\alpha\sin^2\theta = 0$

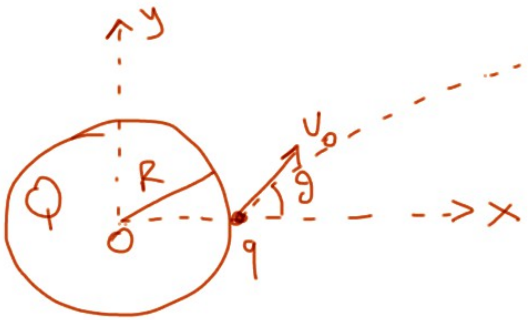
$$\Leftrightarrow \quad r_\Pi = \frac{-GMm + \sqrt{(GMm)^2 + 2EGMm\alpha\sin^2\vartheta}}{2E}$$

$$\Leftrightarrow \quad r_\Pi = \alpha \, \frac{-1 + \sqrt{1 + (\mu^2 - 2)\mu^2 \sin^2\vartheta}}{\mu^2 - 2}$$

(Το ίδιο από $\left.\begin{aligned} \frac{m v_A^2}{2} - \frac{GMm}{\alpha} &= \frac{m v_\Pi^2}{2} - \frac{GMm}{r_\Pi} \\ m v_A \alpha \sin\vartheta &= m v_\Pi r_\Pi \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{aligned} v_\Pi &= \dots \\ r_\Pi &= \dots \end{aligned}$)

(b) $\quad t = \int dt = 2\int_A^\Pi \frac{dr}{\dot r}$ με $\dot r = -\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - V_{eff}(r)\right]}$





Q φορτίο ακτίνας R ακίνητο (με κέντρο το O).

q φορτίο έχει αρχική θέση $r = R$ και $\bar{v} = \bar{v}_0$

με $(\widehat{\bar{v}_0, \hat{r}}) = \theta = \frac{\pi}{4}$, $v_0 = \sqrt{\frac{2k}{mR}}$

Απωστική δύναμη μεταξύ των φορτίων $\bar{F} = \frac{k}{r^2}\hat{r}$, $k>0$

Ποια η τροχιά του q; Πως καταλήγει να κινείται;

Λύση:

$$u'' + u = -\frac{mF}{L^2 u^2} = -\frac{mk\cancel{u^2}}{L^2\cancel{u^2}} \qquad \underline{\underline{L = mRv_0\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{kmR}}} \qquad -\frac{1}{R}$$

$$u = -\frac{1}{R} + C_1\cos\varphi + C_2\sin\varphi$$

$$u\Big|_{\varphi=0} = \frac{1}{R} \Leftrightarrow \frac{1}{R} = -\frac{1}{R} + C_1 \Leftrightarrow C_1 = \frac{2}{R}$$

$$u' = \frac{d(1/r)}{dt}\Big/\dot{\varphi} = -\frac{\dot{r}}{\cancel{r^2}\frac{L}{m\cancel{r^2}}} = -\frac{m}{L}\dot{r}, \qquad u'\Big|_{\varphi=0} = -\frac{m v_0\frac{1}{\sqrt{2}}}{L} = -\frac{1}{R}$$

άρα $-\frac{1}{R} = C_2 \Leftrightarrow C_2 = -1/R$.

$$u = -\frac{1}{R} + \frac{2}{R}\cos\varphi - \frac{1}{R}\sin\varphi \Leftrightarrow r = \frac{R}{-1 + 2\cos\varphi - \sin\varphi}$$

Το r απειρίζεται (ασύμπτωτη της υπερβολής)

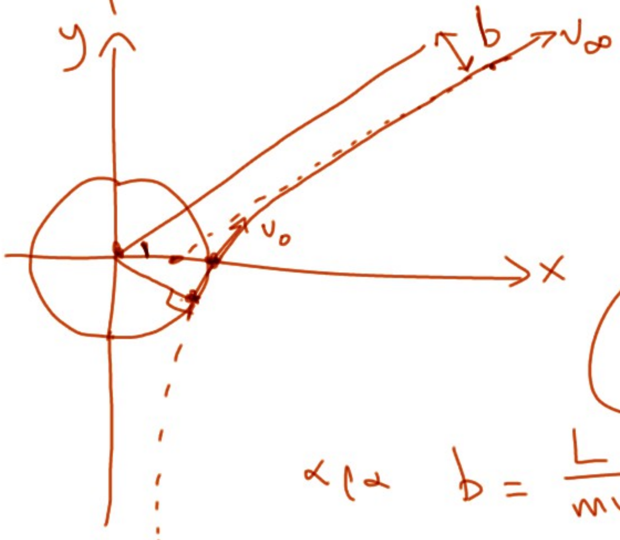
όταν $-1+2\cos\varphi-\sin\varphi=0 \Leftrightarrow \underline{\underline{2}}\cos\varphi-\underline{\underline{\ }}\sin\varphi=1$

$\cos(\alpha+\beta)=\underline{\underline{\cos\alpha}}\cos\beta-\underline{\underline{\sin\alpha}}\sin\beta$

$$\left.\begin{aligned}2&=D\cos\lambda\\ 1&=D\sin\lambda\end{aligned}\right\}\Rightarrow \begin{aligned}D&=\sqrt5\\ \lambda&=\arcsin\frac{1}{\sqrt5}\end{aligned}$$

$$D(\cos\lambda\cos\varphi-\sin\lambda\sin\varphi)=1 \Leftrightarrow D\cos(\varphi+\lambda)=1$$

$$\varphi=-\lambda+\arccos\frac{1}{D}=-\arcsin\frac{1}{\sqrt5}+\arccos\frac{1}{\sqrt5}=0{,}64\ \text{rad}$$



$$L=m\,r_\perp v_\infty=m\,b\,v_\infty$$

$$\cancel{m\,\vec r\times\vec v}\qquad \frac{mv_0^2}{2}+\frac{k}{R}=\frac{mv_\infty^2}{2}+0 \Leftrightarrow v_\infty=v_0\sqrt2$$

$$\left(V=-\int\bar F\cdot d\bar r=-\int\frac{k}{r^2}dr=\frac{k}{r}\right)$$

άρα $b=\dfrac{L}{mv_\infty}=\dfrac{R}{2}$