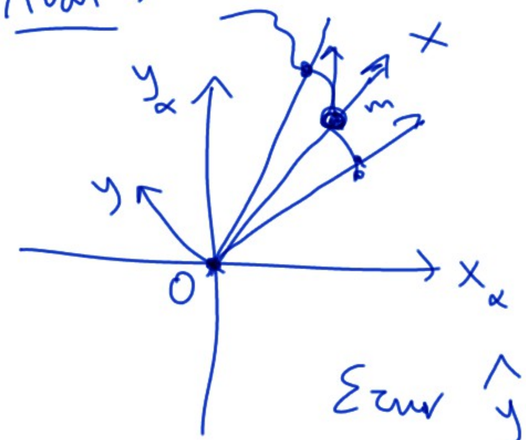
Επίπεδη κίνηση σε πεδίο $\bar{F} = f(r)\hat{r}$.

Ένας παρατηρητής βρίσκεται στο κέντρο και περιστρέφεται με τρόπο ώστε να βλέπει το σώμα πάντα πάνω στον x άξονα.

Πως περιγράφει την κίνηση;

$$\bar{r} = x\hat{x}, \quad \bar{v}_\sigma = \dot{x}\hat{x}, \quad \bar{\alpha}_\sigma = \ddot{x}\hat{x}, \quad \bar{\omega} = \omega\hat{z}$$

Λύση:



$$\underbrace{m\bar{\alpha}_\sigma}_{m\ddot{x}\hat{x}} = \underbrace{-m\bar{\alpha}_0}_{0} \underbrace{-2m\bar{\omega}\times\bar{v}_\sigma}_{-2m\omega\hat{z}\times\dot{x}\hat{x} = -2m\omega\dot{x}\hat{y}} \underbrace{-m\bar{\omega}\times(\omega\times\bar{r})}_{m\omega^2\bar{r} = m\omega^2 x\hat{x}} \underbrace{-m\dot{\bar{\omega}}\times\bar{r}}_{-m\dot{\omega}\hat{z}\times x\hat{x} = -m\dot{\omega}x\hat{y}} + \overbrace{f(r)\hat{r}}^{f(x)\hat{x}}$$

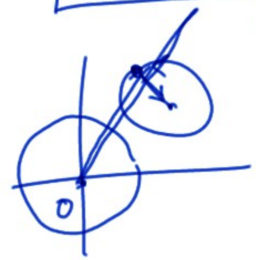
Στην $\hat{y}$: $0 = \underline{-2m\omega\dot{x} - m\dot{\omega}x} \Leftrightarrow 0 = 2m\frac{\dot{x}}{x} + m\frac{\dot{\omega}}{\omega} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 0 = 2m\frac{d}{dt}\ln x + m\frac{d\ln\omega}{dt} \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\ln(x^2\omega) = 0 \Leftrightarrow m x^2\omega = \text{σταθ} \Leftrightarrow \boxed{m\omega x^2 = L = \text{σταθ}} \quad (1)$$

Στην $\hat{x}$: $m\ddot{x} = m\omega^2 x + f(x) \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \boxed{m\ddot{x} = \frac{L^2}{mx^3} + f(x)} \quad (2)$

$$m(\ddot{x} - \omega^2 x) = f(x)$$

$$\bar{\alpha} = (\ddot{\varrho} - \varrho\dot{\varphi}^2)\hat{\varrho} + \frac{1}{\varrho}\frac{d}{dt}(\varrho^2\dot{\varphi})\hat{\varphi}$$



Ταλαντωτής $m=1$ με $w_0=1$.

Ασκείται διέγερση $10\cos^2(wt)$

(α) Για ποια w ο διεγέρτης προσφέρει τη μέγιστη ισχύ;

(β) Ποια η μόνιμη απόκριση αν $w=w_0$ και η δύναμη απόσβεσης είναι $-2\dot{x}$;

$$\left(\underline{K = m w_0^2} \quad m\ddot{x} = -kx \quad \ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0, \quad \frac{k}{m} \to w_0^2 \right)$$

<u>Λύση:</u>

(α) $m\ddot{x} + 2m\gamma\dot{x} + m w_0^2 x = F \Leftrightarrow \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + x = 10\cos^2(wt)$

$$\cos^2(wt) = \frac{1+\cos(2wt)}{2} \quad \text{δηλ.} \quad F = \underset{\uparrow}{5} + \underline{5\cos(2wt)}$$

Συντονισμός όταν $2w = w_0 \Leftrightarrow w = \frac{1}{2}$.

(β) $\ddot{x} + 2\dot{x} + x = 5 + 5\cos(2t)$, $x \approx x_{μερ} = A + B\sin(2t) + \Gamma\cos(2t)$

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + x = 5 + 5\cos(2t)$$

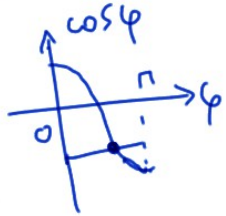
$x = \mathrm{Re}\, z$ με $\ddot{z} + 2\dot{z} + z = 5 + 5e^{2it}$

Μερική λύση $z = 5 + z_0 e^{2it}$, $\dot{z} = 2i z_0 e^{2it}$, $\ddot{z} = -4 z_0 e^{2it}$

$$-4z_0 e^{2it} + 4i z_0 e^{2it} + z_0 e^{2it} \cancel{+5} = \cancel{5} + 5e^{2it}$$

$$\Leftrightarrow z_0(-3+4i) = 5 \Leftrightarrow z_0 = \frac{5}{-3+4i}, \quad z = \frac{5}{-3+4i}e^{2it} + 5$$

$-3+4i = \underbrace{\sqrt{(-3)^2+4^2}}_{5}\, e^{i\varphi}$ με $\boxed{\cos\varphi = -\frac{3}{5}}$, $\sin\varphi = \frac{4}{5}$



$\cos(\pi-\varphi) = \frac{3}{5}$, $\sin(\pi-\varphi) = \frac{4}{5}$

$\pi - \varphi = \arctan\frac{4}{3} \Leftrightarrow \varphi = \pi - \arctan\frac{4}{3}$

$$z = 5 + \frac{5}{5e^{i\varphi}} e^{2it} = 5 + e^{i(2t-\varphi)}$$

$\boxed{x = 5 + \cos(2t-\varphi) \text{ όπου } \varphi = \pi - \arctan\frac{4}{3}}$