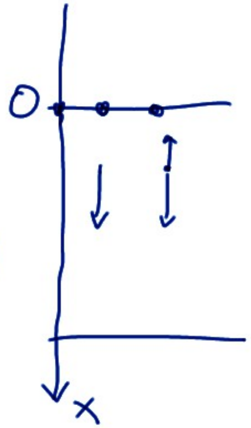
Σώμα πέφτει από ύψος $h$ στο έδαφος σε χρόνο $t_0$ (δρα μόνο το βάρος).

2ο σώμα —"— —"— $t_0+\Delta t$ (δρα το βάρος και αντίσταση $kmv^2$).

Δείξτε ότι για "μικρή" αντίσταση $\Delta t/t_0 \simeq kh/6$




<u>Λύση:</u>

$$\cancel{m}\bar{\alpha} = \cancel{m}\bar{g} - k\cancel{m}v^2\frac{\bar{v}}{|\bar{v}|} \Leftrightarrow \ddot{x} = \underbrace{g - k|\dot{x}|\,\dot{x}}_{g - k\dot{x}^2} \quad (*)$$

$$x = x^{(0)} + x^{(1)}$$

Σε μηδενική τάξη $(*) \rightsquigarrow \ddot{x}^{(0)} = g \Leftrightarrow x^{(0)} = gt^2/2$.

$$h = gt^2/2 \Leftrightarrow t_0 = \sqrt{2h/g}.$$

Κρατώντας μέχρι 1ης τάξης όρους $(*) \rightsquigarrow \cancel{\ddot{x}^{(0)}} + \ddot{x}^{(1)} = \cancel{g} - k\,\dot{x}^{2(0)} \Leftrightarrow$ $\cancel{\left(\dot{x}^{(0)} + \dot{x}^{(1)}\right)^2}$

$$\ddot{x}^{(1)} = -kg^2t^2 \Leftrightarrow \dot{x}^{(1)} = -kg^2t^3/3 + \cancel{C} \Leftrightarrow x^{(1)} = -kg^2t^4/12$$

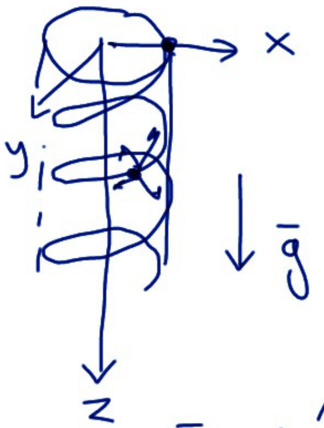
Δηλ. $x \simeq \frac{gt^2}{2} - \frac{kg^2t^4}{12}$. Θέλω $x=h$ για $t=t_0+\Delta t$ άρα $h = \frac{g}{2}\left(t_0^2 + 2t_0\Delta t\right) - \frac{kg^2}{12}t_0^4$

Κίνηση σε έλικα $\varpi = R$, $z = \gamma\varphi$, χωρίς τριβές, με αντίσταση $\bar{F} = -f(|\bar{v}|)\dfrac{\bar{v}}{|\bar{v}|}$ και βάρος $mg\hat{z}$.

(α) εξίσωση κίνησης. (β) Αν $f(|\bar{v}|) = m\lambda|\bar{v}|$ και αρχικά $\varphi=0$, $\bar{v}=0$ ποια η $\varphi(t)$;

(γ) Αν $f(|\bar{v}|) = m\lambda v^2$ και αρχικά $\varphi=0$, $\bar{v}=0$ ποια η ταχύτητα σε κάθε θέση.

Λύση:




(α) $m\dot{\bar{v}} = \bar{N} + m\bar{g} - f(|\bar{v}|)\dfrac{\bar{v}}{|\bar{v}|}$

Χωρίς τριβές σημαίνει $\bar{N}\cdot\bar{v} = 0$

Άρα νόμος Νεύτωνα $\cdot\,\bar{v} \longrightarrow$

$$m\bar{v}\cdot\dot{\bar{v}} = \cancel{\bar{N}\cdot\bar{v}} + m\bar{g}\cdot\bar{v} - f(|\bar{v}|)|\bar{v}| \quad (*)$$

$$\bar{r} = R\hat{\varpi} + \overset{\gamma\varphi}{z}\hat{z}, \quad \bar{v} = \cancel{\dot{\varpi}\hat{\varpi}} + \varpi\dot{\varphi}\hat{\varphi} + \dot{z}\hat{z} = R\dot{\varphi}\hat{\varphi} + \gamma\dot{\varphi}\hat{z}, \quad |\bar{v}| = \sqrt{R^2+\gamma^2}\,|\dot{\varphi}|$$

$$\bar{\alpha} = (\cancel{\ddot{\varpi}} - \varpi\dot{\varphi}^2)\hat{\varpi} + \frac{1}{\varpi}\frac{d}{dt}(\varpi^2\dot{\varphi})\hat{\varphi} + \ddot{z}\hat{z} = -R\dot{\varphi}^2\hat{\varpi} + R\ddot{\varphi}\hat{\varphi} + \gamma\ddot{\varphi}\hat{z}, \quad \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|} = \dots$$

$$(*) \rightarrow \boxed{m(R^2+\gamma^2)\dot{\varphi}\ddot{\varphi} = mg\gamma\dot{\varphi} - f(|\bar{v}|)\sqrt{R^2+\gamma^2}\,|\dot{\varphi}|}$$

(β) $f(|\bar{v}|) = m\lambda|\bar{v}|$ $\qquad \left( m(R^2+\gamma^2)\dot{\varphi}\ddot{\varphi} = mg\gamma\dot{\varphi} - f(\ )\sqrt{R^2+\gamma^2}\,|\dot{\varphi}| \right)$

$$\ddot{\varphi} + \lambda\dot{\varphi} = \frac{g\gamma}{R^2+\gamma^2} \Leftrightarrow \varphi = \underbrace{C_1 + C_2\, e^{-\lambda t}}_{\text{λύση ομογενούς}} + \underbrace{\frac{g\gamma/\lambda}{\cancel{R}^2+\gamma^2}\, t}_{\text{μερική λύση}}$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi\big|_{t=0} &= 0 \\ \dot{\varphi}\big|_{t=0} &= 0 \end{aligned}\right\} \to \begin{aligned} C_1 &= -C_2 \\ C_2 &= \frac{g\gamma/\lambda^2}{R^2+\gamma^2} \end{aligned}$$

(γ) $$\ddot{\varphi} + \lambda\sqrt{R^2+\gamma^2}\,\dot{\varphi}^2 = \frac{g\gamma}{R^2+\gamma^2}$$

Θέλω $\dot{\varphi}$ συνάρτηση της λύσης $\varphi$.

$$\ddot{\varphi} = \frac{d\dot{\varphi}}{dt} = \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi}\dot{\varphi} = \frac{d}{d\varphi}\left(\dot{\varphi}^2/2\right) \qquad \text{ορίζω} \quad f = \dot{\varphi}^2$$

Η διαφ. γίνεται $\dfrac{1}{2}\dfrac{df}{d\varphi} + \lambda\sqrt{R^2+\gamma^2}\, f = \dfrac{g\gamma}{R^2+\gamma^2}$

$$f = C\, e^{-2\lambda\sqrt{R^2+\gamma^2}\,\varphi} + \frac{g\gamma/\lambda}{(R^2+\gamma^2)^{3/2}}.$$