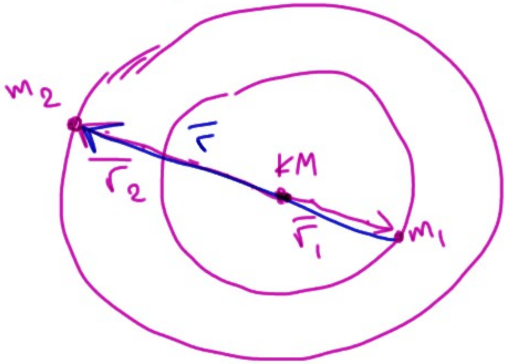
Θέμα 4, εξέταση 21/2/2012

$$\Omega = \sqrt{\frac{GM}{\alpha^3}}, \quad \Omega = \frac{2\pi}{T}$$



1η φάση

Νόμος Kepler

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1+m_2)}\alpha^3$$

(Αλλιώς: $\frac{\cancel{m_1} v_1^2}{r_1} = \frac{G \cancel{m_1} m_2}{\alpha^2}$ όπου $\alpha = r_1 + r_2$ άρα $v_1 = \sqrt{\frac{G m_2 r_1}{\alpha^2}}$

$$T = \frac{2\pi r_1}{v_1}$$

$$\left. \begin{array}{l} m_1 r_1 = m_2 r_2 \\ r_1 + r_2 = \alpha \end{array} \right| \Rightarrow \begin{array}{l} r_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2}\alpha \\ r_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}\alpha \end{array}$$
)

$$\left(M \ddot{\bar R} = \cancel{\bar F_{\varepsilon\xi}} = 0 \right)$$

2η φάση: KM ακίνητο

$$\mu \ddot{\bar r} = \bar F_{12} = -\frac{G m_1 m_2}{r^2}\hat r = -\frac{G\mu(m_1+m_2)}{r^2}\hat r \qquad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$$

$$\left(m \ddot{\bar r} = -\frac{G \overset{m_1+m_2}{M} m}{r^2}\hat r \right)$$

Η κίνηση μονοδιάστατη, δηλ. $\mu \ddot r = -\frac{G\mu(m_1+m_2)}{r^2}$

$$\frac{\mu \dot r^2}{2} - \frac{G\mu(m_1+m_2)}{r} = E = 0 - \frac{G\mu(m_1+m_2)}{\alpha}$$

$$\dot{r} = -\sqrt{2G(m_1+m_2)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\alpha}\right)} \Longrightarrow$$

$$\int_{\alpha}^{0} \frac{dr}{\sqrt{\frac{1}{r}-\frac{1}{\alpha}}} = -\sqrt{2G(m_1+m_2)} \int_0^t dt$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{x}-1}}$$

$$x = \cos^2\xi$$

$$r = \alpha\cos^2\xi \quad , \quad dr = -2\alpha\cos\xi\sin\xi\, d\xi$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{-2\alpha\cos\xi\sin\xi\, d\xi}{\sqrt{\frac{1}{\alpha\cos^2\xi}-\frac{1}{\alpha}}} = \sqrt{\alpha}\int_0^{\pi/2} \cos\xi\, \frac{(-2\alpha)\cancel{\sin\xi}\cos\xi\, d\xi}{\cancel{\sin\xi}} =$$

$$t = \frac{T}{4\sqrt{2}} \quad \text{όπου} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{\alpha^3}{G(m_1+m_2)}}$$

Τελικά

Σώμα m_2 κινείται με ταχύτητα v_0 προς αρχικά ακίνητο σώμα m_1. Η αρχική απόστασή τους είναι πρακτικά άπειρη ενώ η αρχική διεύθυνση κίνησης του m_2 απέχει απόσταση b από το m_1.

Έστω επιλέγουμε αδρανειακό σύστημα αναφοράς στο οποίο οι αρχικές θέσεις είναι $\vec{R}_1 = 0$, $\vec{R}_2 = x_{20}\hat{x} + b\hat{y}$ με x_{20} πρακτικά άπειρο και οι αρχικές ταχύτητες είναι $\dot{\vec{R}}_1 = 0$, $\dot{\vec{R}}_2 = -v_0\hat{x}$.

Θέλουμε να βρούμε τις τελικές ταχύτητες των σωμάτων όταν θα ξαναβρεθούν πάλι σε πρακτικά άπειρη απόσταση, αφού αλληλεπιδράσουν βαρυτικά.

(α) Βρείτε την ταχύτητα του κέντρου μάζας.

(β) Δείξτε ότι η σχετική κίνηση του m_2 ως προς το m_1 είναι ίδια με την κίνηση μοναδιαίας μάζας στο πεδίο ακίνητης μάζας $m_1 + m_2$.

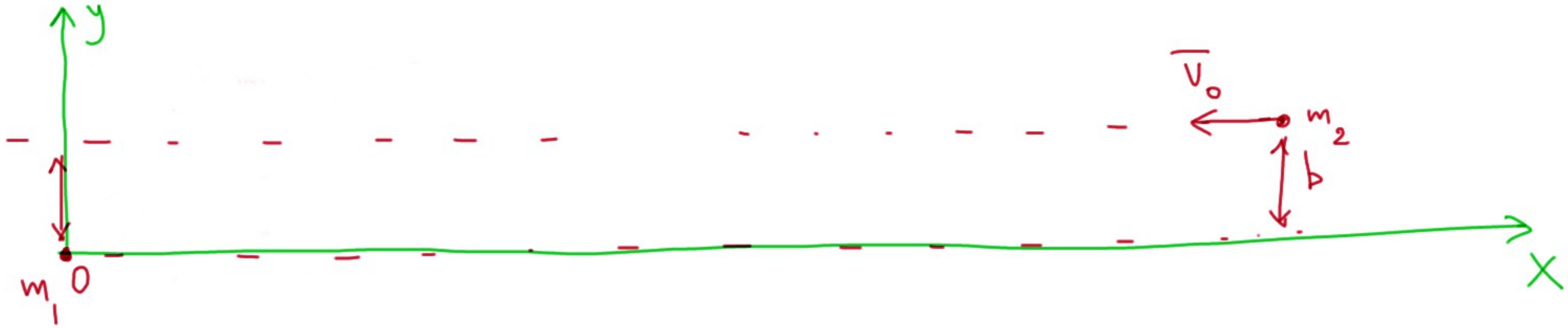
Για την κίνηση αυτή βρείτε:

(β_1) την αρχική ταχύτητα, την ενέργεια και την στροφορμή,

(β_2) την εκκεντρότητα της τροχιάς και την γωνία εκτροπής,

(β_3) την τελική ταχύτητα και τις προβολές της πάνω και κάθετα στην αρχική.

(γ) Βρείτε τις τελικές ταχύτητες των δύο σωμάτων στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς.



Αρχικά $\begin{cases} \bar{R}_1 = 0 \\ \bar{R}_2 = x_{20}\hat{x} + b\hat{y} \text{ με } x_{20} = \infty \end{cases}$ $\quad \dot{\bar{R}}_1 = 0$, $\quad \dot{\bar{R}}_2 = -v_0\hat{x}$

(α)

$(m_1+m_2)\ddot{\bar{R}} = 0$ άρα το ΚΜ εκτελεί ευθύγραμμη και ομαλή κίνηση.

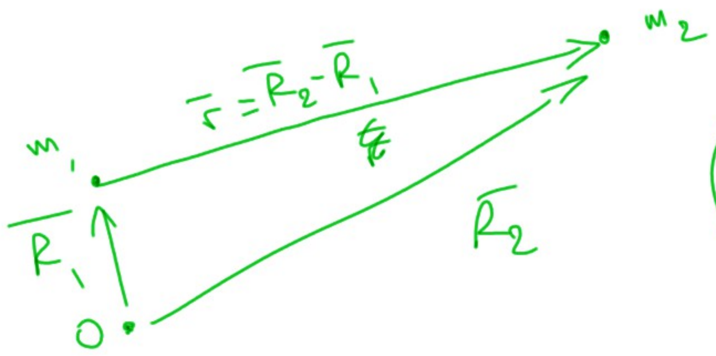
$$\bar{R} = \frac{m_1\bar{R}_1 + m_2\bar{R}_2}{m_1+m_2}$$

$$\dot{\bar{R}} = \frac{m_1\dot{\bar{R}}_1 + m_2\dot{\bar{R}}_2}{m_1+m_2} = \frac{0 + m_2\bar{v}_0}{m_1+m_2}$$

(β) $\bar{r} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1$

$\mu \ddot{\bar{r}} = \bar{F}_{12}$ $\qquad \mu \leftarrow \quad \mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

$\bar{F}_{12} = -\dfrac{G m_1 m_2}{r^2}\hat{r}$

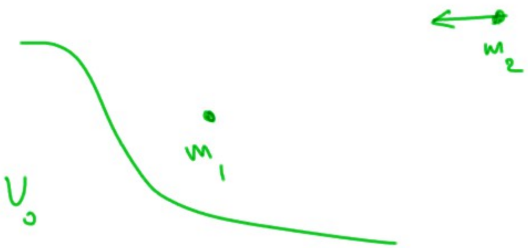


$\dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\ddot{\bar{r}} = -\dfrac{G m_1 m_2}{r^2}\hat{r}$

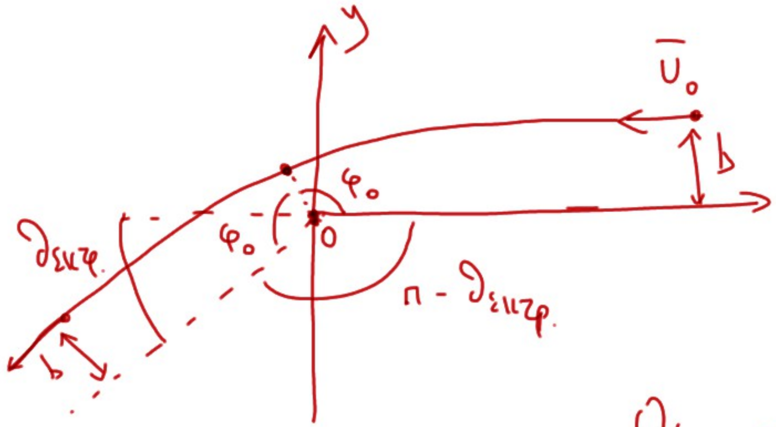
$$\boxed{\ddot{\bar{r}} = -\frac{G(m_1+m_2)}{r^2}\hat{r}}$$

(β1) $\dot{\bar{r}}_0 = \dot{\bar{R}}_{2_0} - \dot{\bar{R}}_{1_0} = \bar{v}_0 - 0 = \bar{v}_0$

Ενέργεια $E = \dfrac{v_0^2}{2}$, $\quad L = |\bar{r} \times \bar{v}| = |\bar{r}_\perp \times \bar{v}| = b v_0$



(β2) $\varepsilon = \sqrt{1 + \dfrac{2EL^2}{mk^2}} = \sqrt{1 + \dfrac{v_0^4 b^2}{G^2(m_1+m_2)^2}}$



$2\varphi_0 + \pi - \theta_{εκτ} = 2\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow \theta_{εκτρ} = 2\varphi_0 - \pi$

$$r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos(\varphi-\varphi_0)}$$

Οι ασύμπτωτες αντιστοιχούν σε $r=\infty$

Η αρχική γωνία $\varphi=0$ είναι μία από αυτές.

Άρα $1+\varepsilon\cos\varphi_0 = 0 \Leftrightarrow \varphi_0 = \arccos\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right)$

$\cos\varphi_0 = -1/\varepsilon$, $\sin\varphi_0 = \sqrt{1-\cos^2\varphi_0} = \sqrt{1-1/\varepsilon^2}$.

$$\tan\frac{\theta_{εκτρ}}{2} = -\cot\varphi_0 = -\frac{\cos\varphi_0}{\sin\varphi_0} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}} = \frac{G(m_1+m_2)}{v_0^2 b}.$$

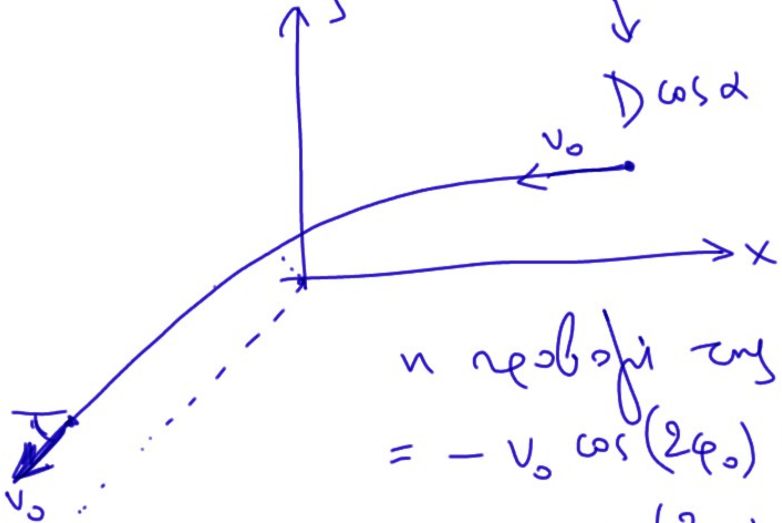
Αλλιώς: $u'' + u = -\frac{mF}{L^2u^2} = +\frac{G(m_1+m_2)}{b^2v_0^2} \Leftrightarrow u = \frac{G(m_1+m_2)}{b^2v_0^2} + C_1\cos\varphi + C_2\sin\varphi$

$u|_{\varphi=0} = 0 \Leftrightarrow C_1 = -\frac{G(m_1+m_2)}{b^2v_0^2}$, $u' = \frac{d(1/r)}{d\varphi} = -\frac{1}{r^2}\frac{\dot r}{\dot\varphi} = -\frac{\dot r m}{L} \Rightarrow u'|_{\varphi=0} = -\frac{(-v_0)\cdot 1}{v_0 b} = \frac{1}{b}$

$$r = \frac{1}{\frac{G(m_1+m_2)}{b^2 v_0^2}\left(1-\cos\varphi\right) + \frac{1}{b}\sin\varphi} = \frac{p}{1+\varepsilon\left(\qquad\right)}$$

$$\cos\alpha\cos\varphi + \sin\alpha\sin\varphi = \cos(\varphi-\alpha)$$

$$\underbrace{(A)}_{D\cos\alpha}\cos\varphi + \underbrace{(B)}_{D\sin\alpha}\sin\varphi = D\cos(\varphi-\alpha)$$



(β_3) Η τελική ταχύτητα έχει μέτρο v_0

η προβολή της στην αρχική είναι $v_0 \cos\theta_{\varepsilon\kappa\tau} =$

$= -v_0\cos(2\varphi_0) = v_0 \frac{\varepsilon^2-2}{\varepsilon^2}$ και κάθετα $v_0 \sin\theta_{\varepsilon\kappa\tau} =$

$= -v_0\sin(2\varphi_0) = v_0 \frac{2\sqrt{\varepsilon^2-1}}{\varepsilon^2}$

Άρα $\bar{v} = -v_0 \frac{\varepsilon^2-2}{\varepsilon^2}\hat{x} - v_0 \frac{2\sqrt{\varepsilon^2-1}}{\varepsilon^2}\hat{y}$.

(γ) $\dot{R}_1 = \dot{R} - \frac{m_2}{m_1+m_2}\dot{r}$ και $\dot{R}_2 = \dot{R} + \frac{m_1}{m_1+m_2}\dot{r}$ με $\dot{r} = \bar{v}$

Λύση:
Θα χρησιμοποιήσουμε τις ακόλουθες σχέσεις που ισχύουν για προβλήματα δύο σωμάτων.

$$\left.\begin{array}{r}\vec{R}=\dfrac{m_1\vec{R}_1+m_2\vec{R}_2}{m_1+m_2}\\ \vec{r}=\vec{R}_2-\vec{R}_1\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\vec{R}_1=\vec{R}-\dfrac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r}\\ \vec{R}_2=\vec{R}+\dfrac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r}\end{array}\right.$$

$$(m_1+m_2)\ddot{\vec{R}}=\vec{F}_{1,\varepsilon\xi\omega\tau}+\vec{F}_{2,\varepsilon\xi\omega\tau},$$

$$\mu\ddot{\vec{r}}=\vec{F}_{2,\varepsilon\sigma\omega\tau}+\frac{\mu}{m_2}\vec{F}_{2,\varepsilon\xi\omega\tau}-\frac{\mu}{m_1}\vec{F}_{1,\varepsilon\xi\omega\tau},\quad \mu=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}.$$

(α) Εξωτερικές δυνάμεις δεν υπάρχουν, άρα η ταχύτητα του κέντρου μάζας είναι σταθερή και ίση με την αρχική της τιμή $\dot{\vec{R}}=\dfrac{m_1\dot{\vec{R}}_1+m_2\dot{\vec{R}}_2}{m_1+m_2}=\dfrac{m_2\vec{v}_0}{m_1+m_2}$.

(β) Η εξίσωση για την σχετική θέση $\mu\ddot{\vec{r}}=\vec{F}_{2,\varepsilon\sigma\omega\tau}=-\dfrac{Gm_1m_2}{r^2}\hat{r}$ γράφεται $\ddot{\vec{r}}=-\dfrac{k}{r^2}\hat{r}$ με $k=G(m_1+m_2)$, δηλ. είναι ίδια με κίνηση μάζας $m=1$ στο πεδίο ακίνητης μάζας m_1+m_2.

(β_1) Η αρχική τιμή της ταχύτητας $\vec{v}=\dot{\vec{r}}=\dot{\vec{R}}_2-\dot{\vec{R}}_1$ είναι $\vec{v}_0$, η ενέργεια είναι $E=\dfrac{v_0^2}{2}$ και η στροφορμή $L=|\vec{r}\times\vec{v}|=|\vec{r}_\perp\times\vec{v}|=bv_0$ (διότι $r_\perp=b$ αρχικά).

(β_2) Η εκκεντρότητα είναι $\varepsilon=\sqrt{1+\dfrac{2EL^2}{mk^2}}=\sqrt{1+\dfrac{v_0^4b^2}{G^2(m_1+m_2)^2}}$. Η εξίσωση υπερβολικής τροχιάς είναι $r=\dfrac{p}{1+\varepsilon\cos(\phi-\phi_0)}$, οι ασύμπτωτες που αντιστοιχούν στην αρχική ($\phi=0$) και τελική διεύθυνση κίνησης είναι $\cos(\phi-\phi_0)=-\dfrac{1}{\varepsilon}$, δηλ. είναι οι $\phi=0$ και $\phi=2\phi_0$ όπου $\cos\phi_0=-\dfrac{1}{\varepsilon}$, $\sin\phi_0=\dfrac{\sqrt{\varepsilon^2-1}}{\varepsilon}$ και η γωνία εκτροπής είναι $\theta_\varepsilon=2\phi_0-\pi$.
Είναι $\tan\dfrac{\theta_\varepsilon}{2}=-\cot\phi_0=\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}=\dfrac{G(m_1+m_2)}{v_0^2b}$.

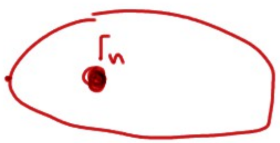
(β_3) Η τελική ταχύτητα έχει μέτρο v_0 (όσο η αρχική). Η προβολή της πάνω στην αρχική ταχύτητα είναι $v_0\cos\theta_\varepsilon=-v_0\cos(2\phi_0)=v_0(1-2\cos^2\phi_0)=v_0\dfrac{\varepsilon^2-2}{\varepsilon^2}$ και κάθετα $v_0\sin\theta_\varepsilon=-v_0\sin(2\phi_0)=-2v_0\sin\phi_0\cos\phi_0=v_0\dfrac{2\sqrt{\varepsilon^2-1}}{\varepsilon^2}$. Άρα $\vec{v}=-v_0\dfrac{\varepsilon^2-2}{\varepsilon^2}\hat{x}-v_0\dfrac{2\sqrt{\varepsilon^2-1}}{\varepsilon^2}\hat{y}$.

(γ) Από τις σχέσεις $\dot{\vec{R}}_1=\dot{\vec{R}}-\dfrac{m_2}{m_1+m_2}\dot{\vec{r}}$, $\dot{\vec{R}}_2=\dot{\vec{R}}+\dfrac{m_1}{m_1+m_2}\dot{\vec{r}}$ προκύπτουν οι τελικές ταχύτητες των σωμάτων $\dot{\vec{R}}_1=\dfrac{m_2}{m_1+m_2}\dfrac{2v_0}{\varepsilon}\dfrac{-\hat{x}+\sqrt{\varepsilon^2-1}\hat{y}}{\varepsilon}$, $\dot{\vec{R}}_2=-v_0\hat{x}-\dfrac{m_1}{m_2}\dot{\vec{R}}_1$.

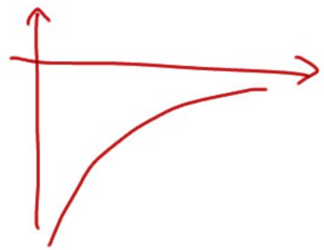
Δορυφόρος της Γης, ελλειπτική τροχιά εκκεντρ. ε, ημιάξονας α, περίοδος T.
(α) Ποια η μέγιστη ταχύτητά του; (β) Ποια η μέγιστη ακτινική ταχύτητά του;

<u>Λύση</u>:

$$F = -k/r^2$$



(α) Μέγιστη ταχύτητα στο περίγειο



$$r_\pi = \alpha(1-\varepsilon)$$

$$\left(r_\pi = \frac{p}{1+\varepsilon}, \; r_\alpha = \frac{p}{1-\varepsilon}, \; \alpha = \frac{r_\alpha + r_\pi}{2} \Leftrightarrow p = \alpha(1-\varepsilon^2) \right)$$

και $v_\pi = \dfrac{L}{m r_\pi}$ όπου $p = \dfrac{L^2}{mk} = \alpha(1-\varepsilon^2) \Leftrightarrow L = \sqrt{mk\alpha(1-\varepsilon^2)}$

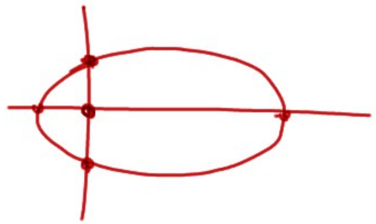
Δηλ. $v_\pi = \sqrt{\dfrac{k}{m\alpha}\dfrac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}$.

$k = GMm$ από $T^2 = \dfrac{4\pi^2\alpha^3}{k/m} \Leftrightarrow \dfrac{k}{m} = \dfrac{4\pi^2\alpha^3}{T^2}$

Τελικά $v_{max} = \dfrac{2\pi\alpha}{T}\sqrt{\dfrac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}$.

(β) Μέγιστη ακτινική ταχύτητα

$$\frac{\dot r^2}{2} + V_{eff} = E$$



$$r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$$

$$\dot r = +\frac{\varepsilon p \sin\varphi}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2}\,\dot\varphi = \qquad \dot\varphi \to \frac{L}{mr^2}$$

$$\dot r = \frac{\varepsilon \cancel{p} \sin\varphi \, L}{m p}$$

$\dot r_{max}$ για $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$\dot r_{max} = \frac{\varepsilon L}{m p}$$

$$v_\pi = \frac{L}{m r_\pi} = \frac{L(1+\varepsilon)}{m p}$$

Άρα $\dfrac{\dot r_{max}}{v_\pi} = \dfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \Rightarrow \dot r_{max} = \dfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\,\dfrac{2\pi a}{T}\sqrt{\dfrac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}$

$$= \frac{2\pi a}{T}\,\frac{\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$$