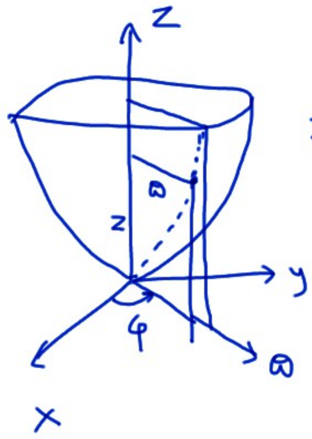
Σώμα m κινείται στο εσωτερικό του λείου χωνιού με σχήμα $z=\lambda\varpi^2$.



$z=\lambda\varpi^2$

$\bar g = -g\hat z$

Σκέψεις: $m\bar\alpha = m\bar g + \bar N$ $\quad \bar N \perp \bar v \Leftrightarrow \bar N\cdot\bar v = 0$

$\bar N = N_\varpi\hat\varpi + N_z\hat z$

Άγνωστοι $\varpi, \varphi, N_\varpi, N_z$.

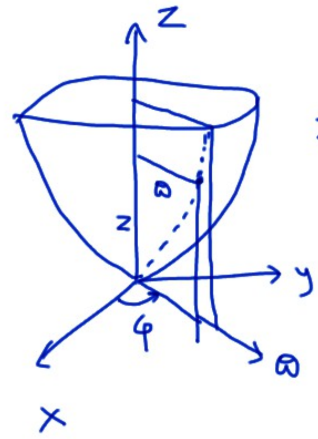
Απαλείφω το $\bar N$ κάνω $m\bar\alpha\cdot\bar v = m\bar g\cdot\bar v + \cancel{\bar N\cdot\bar v} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow m\dot{\bar v}\cdot\bar v = m\bar g\cdot\frac{d\bar r}{dt} \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right) + \frac{d}{dt}\left(-m\bar g\cdot\bar r\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{mv^2}{2} - m\underbrace{\bar g\cdot\bar r}_{-gz} = E = \sigma\tau\alpha\theta$$

$$\bar F\cdot\hat\varphi = 0 \Leftrightarrow \bar L\cdot\hat z = \sigma\tau\alpha\theta = L \quad \text{δηλ.} \quad m\varpi^2\dot\varphi = L = \sigma\tau\alpha\theta$$

$$\bar v = \dot\varpi\hat\varpi + \varpi\dot\varphi\hat\varphi + \underbrace{\dot z}_{2\lambda\varpi\dot\varpi}\hat z$$

Σώμα m κινείται στο εσωτερικό του λείου μπωλ με σχήμα $z=\lambda\varpi^2$.



$z=\lambda\varpi^2$

$\bar{g}=-g\hat{z}$

Λύση:

$\bar{F}\cdot\hat{\varphi}=0 \Leftrightarrow$ διατήρηση $\hat{z}$ στροφορμής $\Leftrightarrow \boxed{m\varpi^2\dot{\varphi}=L}=$ σταθ (1)

Δυνάμεις συντηρητικές (για το βάρος $V=mgz=mg\lambda\varpi^2$, η κάθετη αντίδραση $\bar{N}$ δεν παράγει έργο) άρα $\frac{mv^2}{2}+V=E=$ σταθ

Αντικαθιστώ $\bar{v}=\dot{\varpi}\hat{\varpi}+\varpi\dot{\varphi}\hat{\varphi}+2\lambda\varpi\dot{\varpi}\hat{z}$

$$\boxed{\frac{m}{2}\dot{\varpi}^2\left(1+4\lambda^2\varpi^2\right)+\frac{m\varpi^2\dot{\varphi}^2}{2}+mg\lambda\varpi^2=E} = \text{σταθ} \quad (2)$$

(1) $\rightarrow$ $\dot{\varphi}=L/m\varpi^2$ Αντικαθιστώ στην (2) $\rightarrow$

$$\underbrace{\frac{m}{2}\dot{\varpi}^2\left(1+4\lambda^2\varpi^2\right)}_{\geqslant 0}+\underbrace{\frac{L^2}{2m\varpi^2}+mg\lambda\varpi^2}_{V_{eff}(\varpi)}=E$$

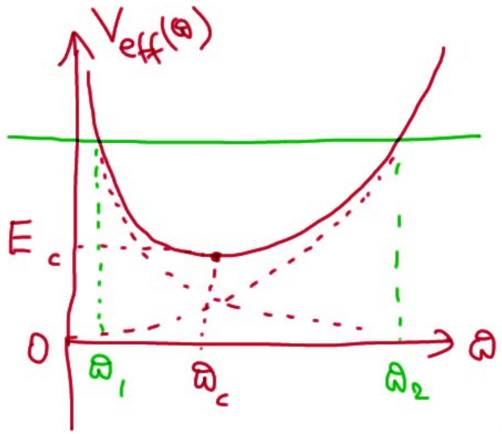
Το πρόβλημα ανάχθηκε σε μονοδιάστατο

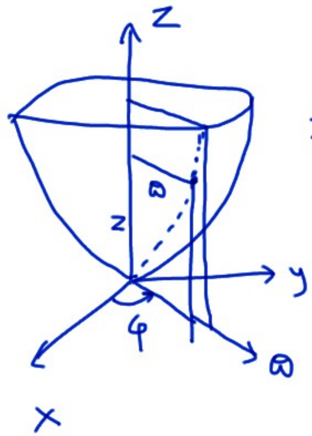
$$V_{eff}(\varpi) = \frac{L^2}{2m\varpi^2} + mg\lambda\varpi^2$$

$$V'_{eff}(\varpi) = -\frac{L^2}{m\varpi^3} + 2mg\lambda\varpi$$

$$V'_{eff}(\varpi_c) = 0 \Leftrightarrow \varpi_c = \left(\frac{L^2}{2m^2 g\lambda}\right)^{1/4}$$

$$E_c = V_{eff}(\varpi_c) = \frac{L^2}{m\varpi_c^2}$$





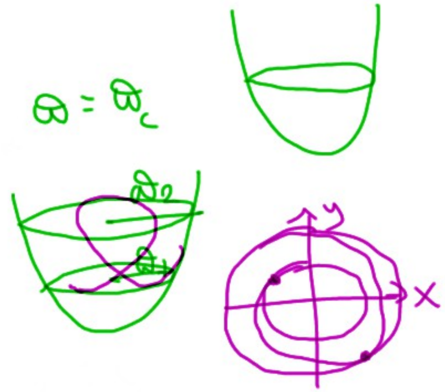
$z = \lambda\varpi^2$

$\bar{g} = -g\hat{z}$

Από $V_{eff}(\varpi) \le E$ μπορώ να περιγράψω την κίνηση:

Για $E = E_c$ τότε το σώμα κινείται κυκλικά σε κύκλο $\varpi = \varpi_c$

Για $E > E_c$ τότε $\varpi_1 \le \varpi \le \varpi_2$ όπου $V_{eff}(\varpi) = E$.



$$\dot{\varphi} = \frac{L}{m\varpi^2} \qquad \Delta\varphi\Big|_{\varpi=\varpi_1\to\varpi_2} = \int d\varphi = \int_{\varpi_1}^{\varpi_2} \frac{\dot{\varphi}}{\dot{\varpi}}\, d\varpi$$

με $\dot{\varphi} = \frac{L}{m\varpi^2}$ και $\dot{\varpi} = +\sqrt{\frac{2}{m(1+4\lambda^2\varpi^2)}\left[E - V_{eff}(\varpi)\right]}$

Υποάσκηση: Έστω αρχικά $\varpi=\varpi_0$ και $\bar{v} = v_0 \hat{\varphi}$.

Ποια η v_0 ώστε το σώμα να φτάσει σε $\varpi_{max} = 2\varpi_0$;

Λύση:

$$L = m\varpi_0 v_0 \quad , \quad E = \frac{m v_0^2}{2} + mg\lambda\varpi_0^2$$

Στα άκρα της ακτινική κίνησης $\dot{\varpi} = 0 \Leftrightarrow V_{eff}(\varpi) = E$

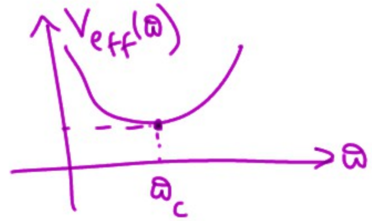
Πρέπει $V_{eff}(2\varpi_0) = E$

Δηλ. $V_{eff}(2\varpi_0) = V_{eff}(\varpi_0) \Leftrightarrow \dfrac{L^2}{2m(2\varpi_0)^2} + mg\lambda(2\varpi_0)^2 = \dfrac{L^2}{2m\varpi_0^2} + mg\lambda\varpi_0^2$

$L = m\varpi_0 v_0$

$\Longleftrightarrow \quad v_0 = \pm \varpi_0 \sqrt{8g\lambda}$

Υποάσκηση: Για ποια v_0 η κίνηση είναι κυκλική; (Αρχικά $\varpi = \varpi_0$, $\bar{v} = v_0 \hat{\varphi}$)

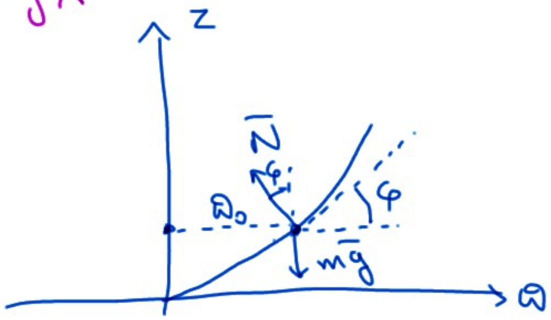


<u>Λύση</u>: $L = m \varpi_0 v_0$

Πρέπει $\varpi_0 = \varpi_c \Leftrightarrow \varpi_0 = \left(\frac{L^2}{2m^2 g \lambda} \right)^{1/4} \xLeftarrow{L = \dots}$

$$\varpi_0^4 = \frac{m^2 \varpi_0^2 v_0^2}{2 m^2 g \lambda} \Leftrightarrow v_0 = \pm \sqrt{2 \lambda g \varpi_0^2}$$

<u>Αλλιώς</u>:



$$\left.\begin{array}{l} N_z = mg \\ N_\varpi = m v_0^2 / \varpi_0 \\ \bar{N} \text{ κάθετο στην επιφάνεια} \\ \tan\varphi = \frac{dz}{d\varpi} = 2\lambda\varpi_0 = \frac{N_\varpi}{N_z} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$2\lambda\varpi_0 = \frac{m v_0^2 / \varpi_0}{mg} \Leftrightarrow v_0 = \pm \sqrt{2\lambda g \varpi_0^2}.$$

Μικρές ταλαντώσεις (δηλ. αποκλίσεις από την κυκλική ευσταθή κίνηση)

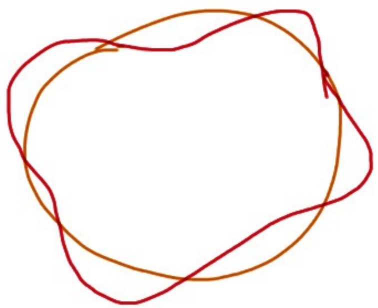
Με $q = \varpi - \varpi_c$ αναπτύσσω κατά Taylor το

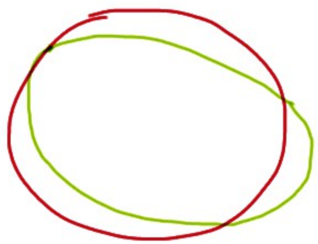
$$\frac{m\dot{\varpi}^2}{2}\left(1+4\lambda^2\varpi^2\right) + V_{eff}(\varpi) = E \longrightarrow$$

$$\frac{m\dot{q}^2}{2}\left(1+4\lambda^2\varpi_c^2\right) + V_{eff}(\varpi_c) + \cancel{V'_{eff}(\varpi_c)}\, q + \frac{1}{2}V''_{eff}(\varpi_c)\,q^2 = E \overset{\text{παραγ}}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow m\dot{q}\ddot{q}\left(1+4\lambda^2\varpi_c^2\right) + V''_{eff}(\varpi_c)\,q\dot{q} = 0 \xLeftrightarrow{\dot{q}\neq 0}$$

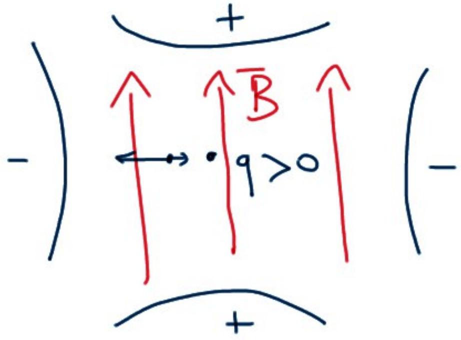
$\ddot{q} + \omega^2 q = 0$ με $$\omega = \sqrt{\frac{V''_{eff}(\varpi_c)}{m\left(1+4\lambda^2\varpi_c^2\right)}}$$





Penning trap :

Dehmelt (nobel 1984)



(Το $\bar{E}$ στο κενό είναι ασταθής κινήσεις

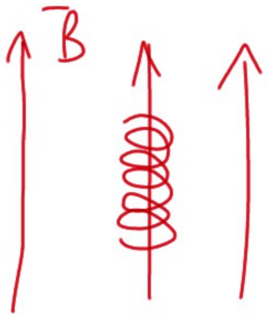
Απόδειξη:

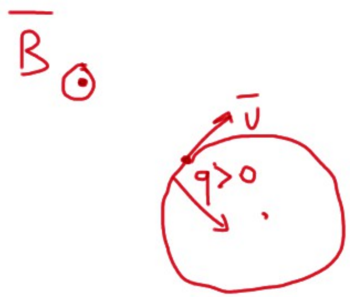
κενό $\nabla\cdot\bar{E} = 0 \overset{\bar{E}=-\nabla\phi}{\underset{V=q\phi}{\Longleftrightarrow}} \nabla^2 V = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$

Τουλάχιστον ένας όρος είναι αρνητικός, π.χ. $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0$

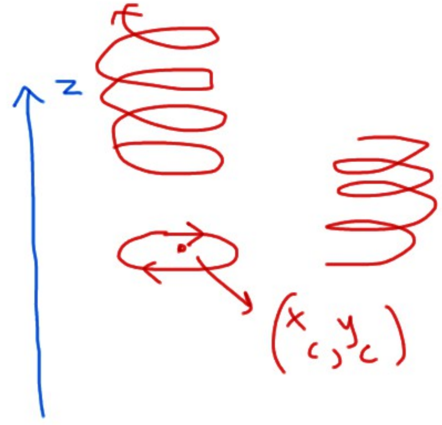
αστάθεια.)

$\bar{F}_{\bar{B}} = q\,\bar{v} \times \bar{B}$





Κίνηση φορτίου $q>0$ σε ομογενές μαγνητικό πεδίο $\bar{B}$.



<u>Λύση:</u>

$\bar{B} = B_0 \hat{z}$ με $B_0 > 0$

$$m\dot{\bar{v}} = q\,\bar{v}\times\bar{B} \quad (*) \;\underset{\omega = \frac{qB_0}{m}}{\Longleftrightarrow}\; \begin{cases} \dot{v}_x = \omega v_y & (1) \\ \dot{v}_y = -\omega v_x & (2) \\ \dot{v}_z = 0 & (3) \end{cases}$$

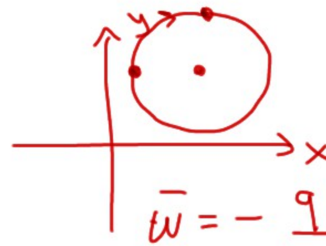
$(3) \rightarrow v_z = \text{σταθ} = v_{\parallel} \quad (3)' \longrightarrow z = v_{\parallel} t + z_0 \quad (3)''$

$(1) \rightarrow v_y = \frac{1}{\omega}\dot{v}_x \quad (1)'$

$(2) \xrightarrow{(1)'} \ddot{v}_x + \omega^2 v_x = 0 \Leftrightarrow v_x = v_{\perp}\sin(\omega t + \varphi_0) \quad (2)'$

$(1)' \rightarrow v_y = v_{\perp}\cos(\omega t + \varphi_0) \quad (1)''$

$\sqrt{v_x^2 + v_y^2} = v_{\perp}$ (το περίμενα από το ολοκλήρωμα ενέργειας $\bar{v}\cdot(*) \rightarrow \frac{mv^2}{2} = \text{σταθ}$)

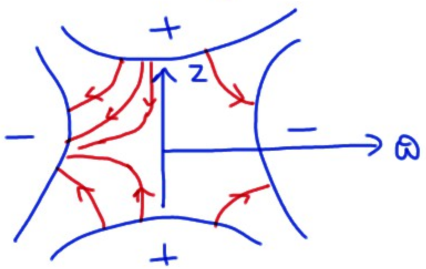


$\bar{\omega} = -\frac{q}{m}\bar{B}$

$(2)' \rightarrow x = x_c - \frac{v_{\perp}}{\omega}\cos(\omega t + \varphi_0)$, $(1)'' \rightarrow y = y_c + \frac{v_{\perp}}{\omega}\sin(\omega t + \varphi_0)$

$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = \left(\frac{v_{\perp}}{\omega}\right)^2$ κύκλος με ακτίνα $r_{\perp} = \frac{v_{\perp}}{\omega} = \frac{m v_{\perp}}{q B_0}$

Penning trap: κίνηση φορτίου q σε $\bar{E} = -\frac{m\omega_0^2}{q} z\,\hat{z} + \frac{m\omega_0^2}{2q}\varpi\,\hat{\varpi}$



$= -\nabla\phi \,,\quad \phi = \frac{m\omega_0^2}{2q}\left(z^2 - \frac{\varpi^2}{2}\right)$

και $\bar{B} = B\,\hat{z}$.

$$m\bar{\alpha} = q\bar{E} + \underbrace{q\bar{v}\times\bar{B}}_{q\begin{vmatrix}\hat{\varpi} & \hat{\varphi} & \hat{z}\\ \dot{\varpi} & \varpi\dot{\varphi} & \dot{z}\\ 0 & 0 & B\end{vmatrix}} \Leftrightarrow \begin{cases} m\left(\ddot{\varpi} - \varpi\dot{\varphi}^2\right) = \frac{m\omega_0^2}{2}\varpi + qB\varpi\dot{\varphi} & ① \\ \frac{m}{\varpi}\frac{d}{dt}\left(\varpi^2\dot{\varphi}\right) = -qB\dot{\varpi} & ② \\ m\ddot{z} = -m\omega_0^2 z & ③ \end{cases}$$

③ $\rightarrow \ddot{z} + \omega_0^2 z = 0$ αρμονικός ταλαντωτής $z = z_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi_z)$

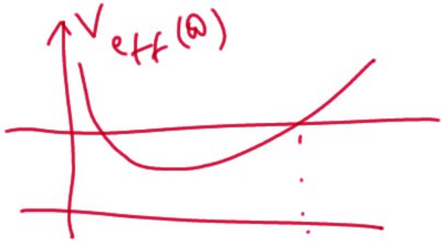
② $\rightarrow \frac{d}{dt}\left(m\varpi^2\dot{\varphi}\right) = -qB\varpi\dot{\varpi} = -\frac{d}{dt}\left(qB\frac{\varpi^2}{2}\right) \Leftrightarrow m\varpi^2\left(\dot{\varphi} + \frac{qB}{2m}\right) = L = \text{σταθ}$

$\Leftrightarrow \boxed{\dot{\varphi} = \frac{L}{m\varpi^2} - \frac{qB}{2m}}$ ②'

① $\xrightarrow{②'}$ $m\ddot{\varpi} = f(\varpi)$ με $f(\varpi) = \frac{L^2}{m\varpi^3} - \underbrace{\left(\frac{q^2B^2}{4m} - \frac{m\omega_0^2}{2}\right)}_{m\omega^2}\varpi$

$$V_{eff}(\varpi) = -\int f(\varpi)\,d\varpi = \frac{L^2}{2m\varpi^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{q^2B^2}{4m} - \frac{m\omega_0^2}{2}\right)\varpi^2 + \cancel{C}$$

Αν $\frac{q^2B^2}{4m} - \frac{m\omega_0^2}{2} > 0 \Leftrightarrow |B| > \sqrt{2}\,\frac{m\omega_0}{|q|}$ επιτυγχάνεται παγίδευση



Υπάρχη ϖ_{max} : $E = V_{eff}(\varpi)$

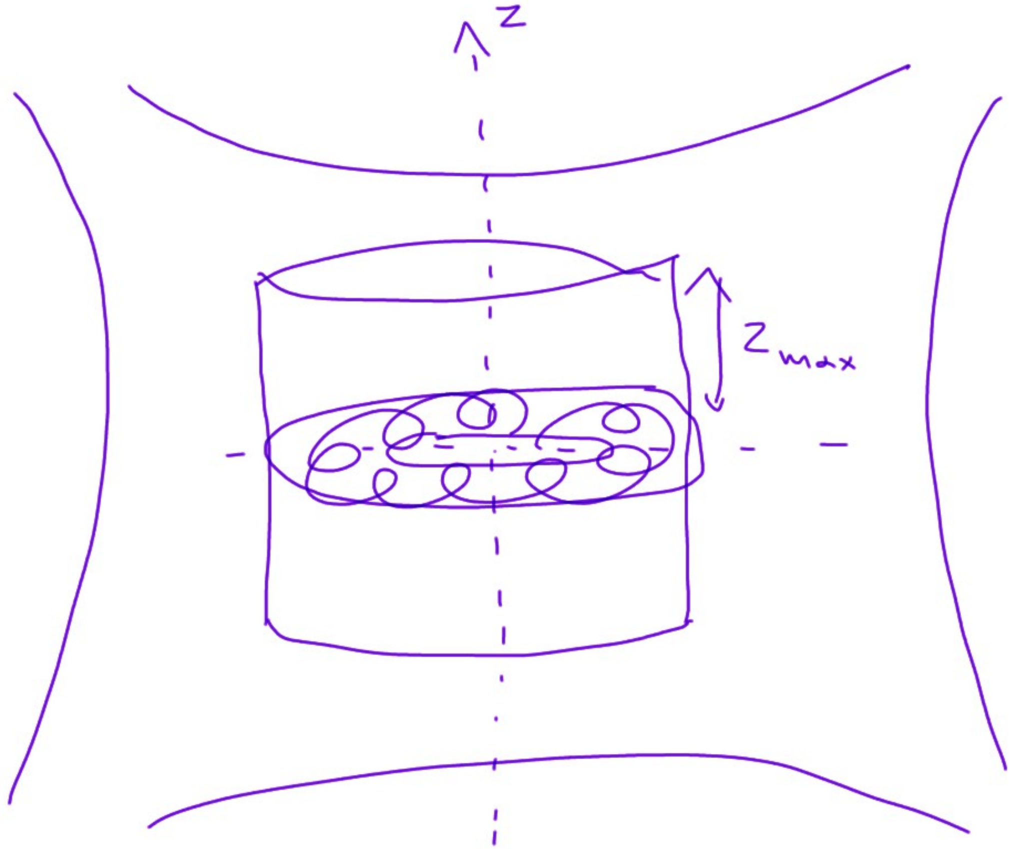
$$m\ddot{\varpi} = f(\varpi) \rightarrow \frac{m\dot{\varpi}^2}{2} + V_{eff}(\varpi) = E$$

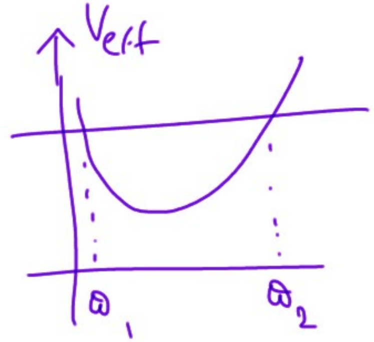
Θα μπορούσα να βρω κατευθείαν το ολοκλήρωμα ενέργειας σαν

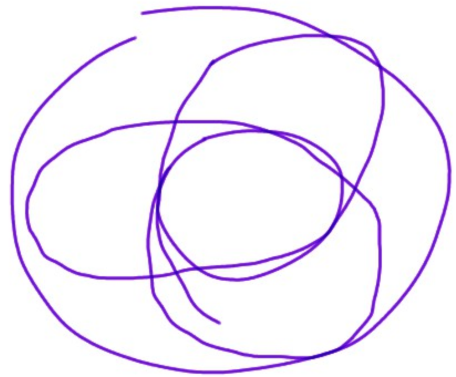
$$\frac{mv^2}{2} + q\Phi = E' \qquad \bar{v} = \dot{\varpi}\hat{\varpi} + \varpi\dot{\varphi}\hat{\varphi} + \dot{z}\hat{z}, \quad \Phi = \frac{m\omega_0^2}{2q}z^2 - \frac{m\omega_0^2}{4q}\varpi^2$$

$$\frac{m\dot{\varpi}^2}{2} + \underbrace{\frac{m\varpi^2\dot{\varphi}^2}{2} - \frac{m\omega_0^2}{4q}\varpi^2}_{V_{eff}(\varpi)} + \underbrace{\frac{m\dot{z}^2}{2} + \frac{m\omega_0^2}{2q}z^2}_{\text{σταθ}} = E'$$

διότι $\dot{\varphi} = \frac{L}{m\varpi^2} - \frac{qB}{2m}$







$$\int dt = \int \frac{d\varpi}{\dot{\varpi}} \Rightarrow t = \pm \int \frac{d\varpi}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - V_{eff}(\varpi)\right]}}$$

$$\varphi = \int \dot{\varphi}\, dt = \int \frac{L}{m\varpi^2}\, dt$$