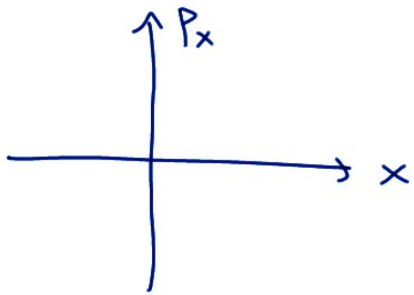
Διαγράμματα φάσης :

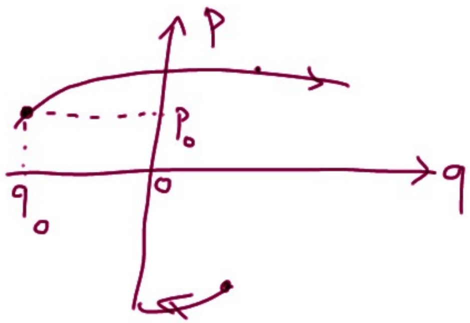
x, y, z, p_x, p_y, p_z

x, p_x

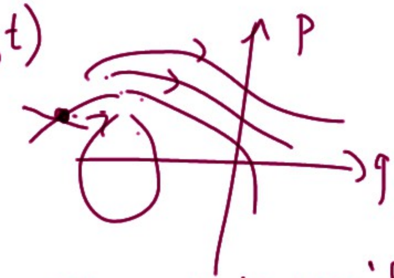


Συντεταγμένες q, p (για καρτεσιανές $p = m\dot{q}$)

Αν ξέρουμε αρχικές τιμές q_0, p_0 τα $q(t), p(t)$



$\dot{p} = F(q,p,t)$



Αν $F(q,p)$

$$\frac{dp}{dq} = \frac{\dot{p}}{\dot{q}} = \frac{F}{p/m}$$

και οι καμπύλες δεν τέμνονται.

Σε ένα μονοδιάστατο πρόβλημα καμπύλη φάσης είναι η

$$\left.\begin{aligned} q &= q(t\,;\,p_0, q_0) \\ p &= p(t\,;\,p_0, q_0) \end{aligned}\right\}$$

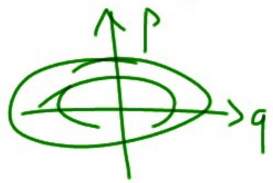
Διάγραμμα φάσης: σύνολο καμπυλών φάσης για διάφορα (q_0, p_0).

Για να βρούμε μια καμπύλη φάσης λύνουμε το σύστημα

$$\left.\begin{aligned} \dot{q} &= p/m \\ \dot{p} &= F(q,p,t) \end{aligned}\right\} \quad \text{Αν } \frac{\partial F}{\partial t} = 0, \quad \frac{\dot{q}}{\dot{p}} = \frac{p/m}{F(q,p)} \Leftrightarrow \boxed{\frac{dp}{dq} = \frac{mF(q,p)}{p}}$$

Αν έχουμε ολοκλήρωμα ενέργειας αυτό είναι η εξίσωση για την καμπύλη φάσης

$$\frac{p^2}{2m} + \underline{\underline{V(q)}} = E$$

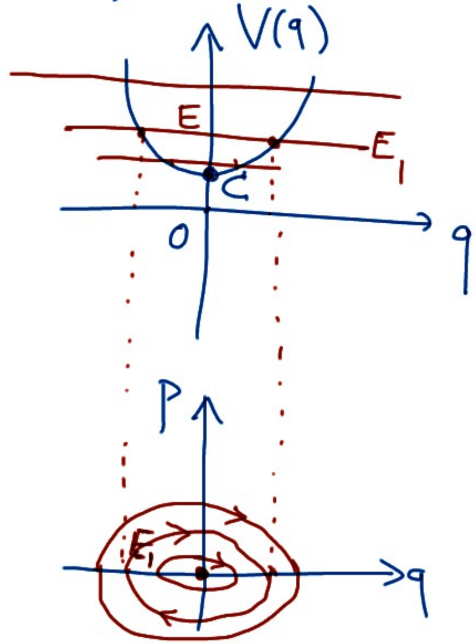


Διάγραμμα φάσης αρμονικού ταλαντωτή

$$V = \frac{m\omega^2}{2} q^2 + \cancel{C}$$

$$\frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2} = E \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{p}{\sqrt{2mE}}\right)^2 + \left(\frac{q}{\sqrt{2E/m\omega^2}}\right)^2 = 1$$

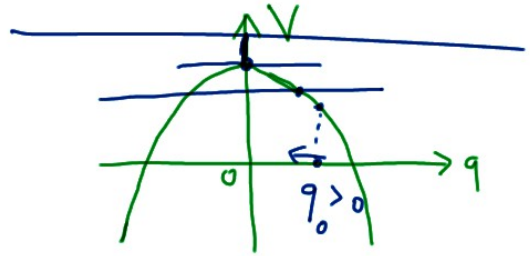


Σύνολο από ελλείψεις.

Για $E = 0$ σημείο $q = p = 0$.

Διάγραμμα φάσης απωστικού δυναμικού

$$V = -\frac{m\omega^2}{2}q^2 + \cancel{C}^{\to 0}$$



$$F = -\frac{dV}{dq} = m\omega^2 q$$

$$\cancel{m}\ddot{q} = \cancel{m}\omega^2 q \Leftrightarrow \ddot{q} - \omega^2 q = 0$$

$$q = e^{\lambda t}, \quad \lambda^2 - \omega^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm\omega$$

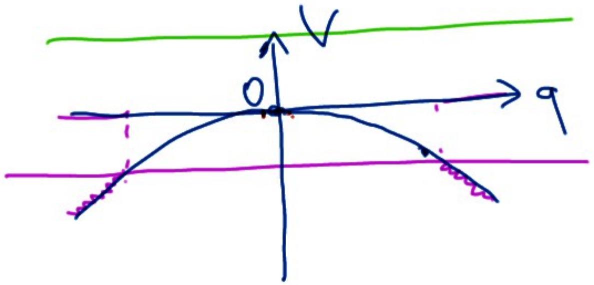
$$\left.\begin{aligned} q &= D_1 e^{\omega t} + D_2 e^{-\omega t} \\ v &= \dot{q} = \omega D_1 e^{\omega t} - \omega D_2 e^{-\omega t} \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} q_0 &= D_1 + D_2 \\ v_0 &= \omega(D_1 - D_2) \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{aligned} D_1 &= \frac{q_0 + v_0/\omega}{2} \\ D_2 &= \frac{q_0 - v_0/\omega}{2} \end{aligned}$$

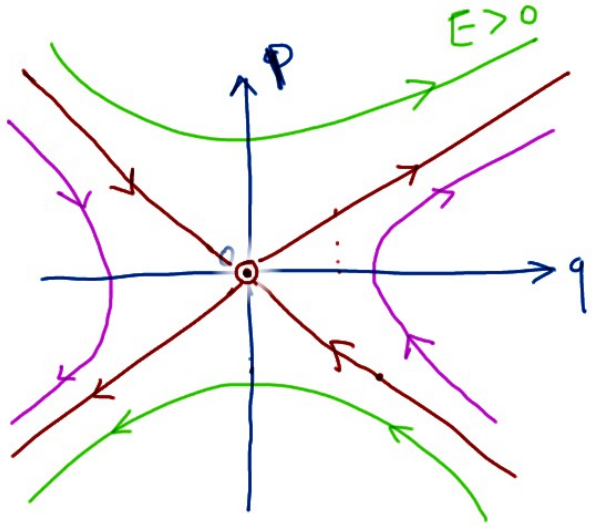
$$E = \frac{m v_0^2}{2} - \frac{m\omega^2}{2} q_0^2$$

- $E < 0 \Leftrightarrow |v_0| < \omega|q_0|$ ανακλάται και μετά κινείται προς το ∞.
- $E > 0 \Leftrightarrow |v_0| > \omega|q_0|$ κινείται προς το $-\infty$.
- $E = 0 \Leftrightarrow |v_0| = \omega|q_0|$ και αφού $q_0>0$, $v_0<0$ είναι $v_0 = -\omega q_0$ δηλ. $D_1 = 0$ και $\boxed{q = q_0 e^{-\omega t}}$

$$\frac{p^2}{2m} - \frac{m\omega^2 q^2}{2} = E - \emptyset \iff \begin{cases} \text{αν } E>0: & \left(\dfrac{p}{\sqrt{2mE}}\right)^2 - \left(\dfrac{q}{\sqrt{2E/m\omega^2}}\right)^2 = 1 \\ \text{αν } E<0: & -\left(\dfrac{p}{\sqrt{-2mE}}\right)^2 + \left(\dfrac{q}{\sqrt{-2E/m\omega^2}}\right)^2 = 1 \\ \text{αν } E=0: & p = \pm m\omega q \end{cases}$$

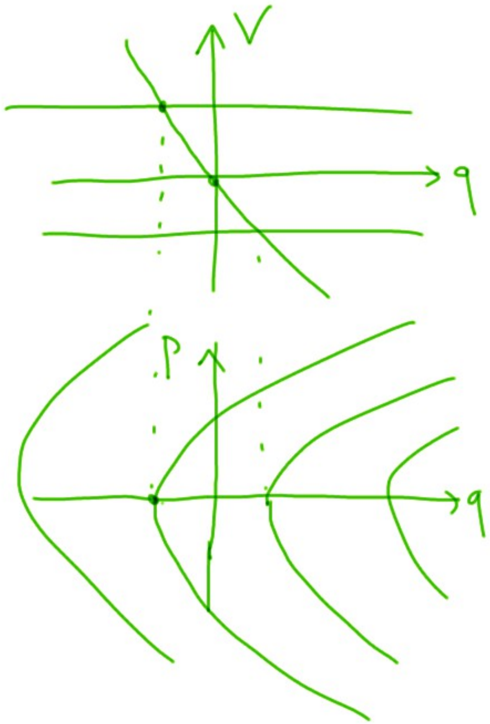
→ 5 καμπύλες φάσης



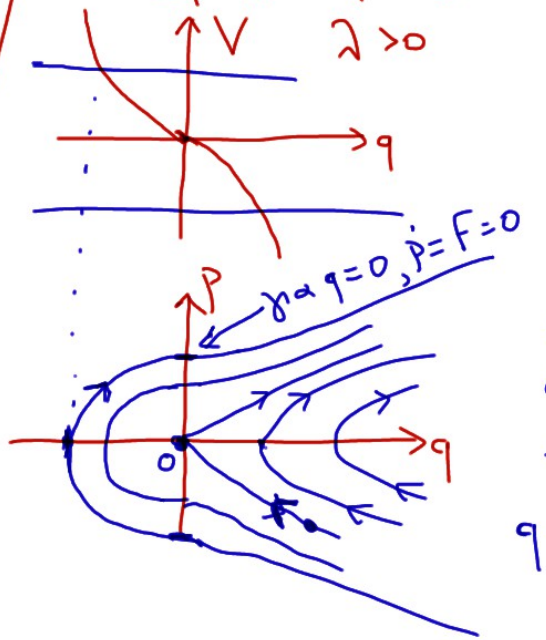


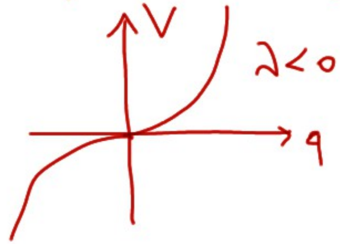
Διάγραμμα φάσης σταθερής δύναμης $F>0$:

$$V = -Fq + \cancel{C} \qquad \frac{m\dot{q}^2}{2} - Fq = E \iff \frac{p^2}{2m} - Fq = E$$



Διάγραμμα φάσης $F = \lambda q^2 \iff V = -\frac{\lambda q^3}{3} + \cancel{C}^{\,0}$

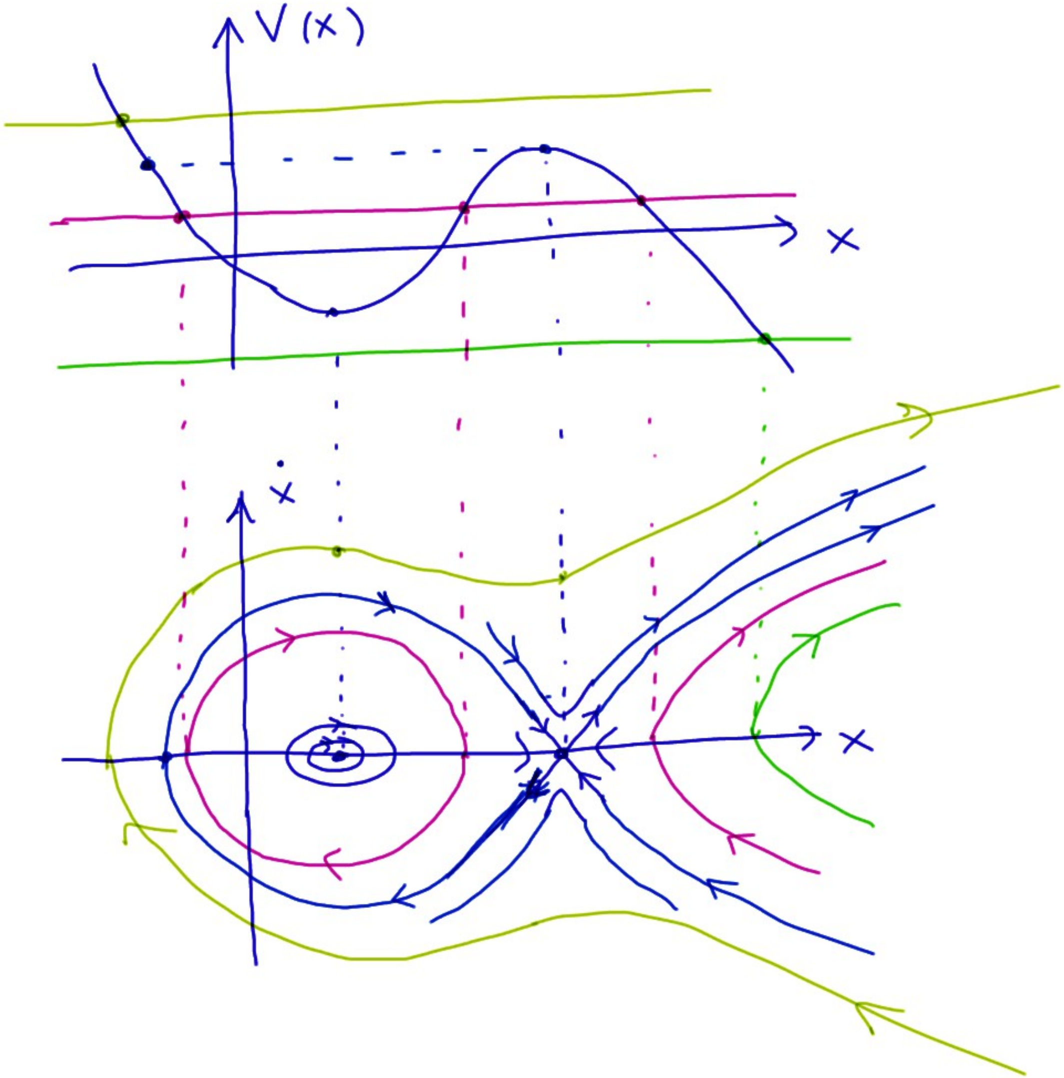




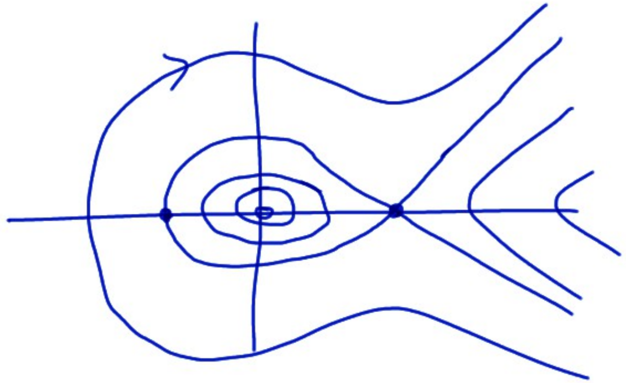
Αν $E=0$ και αρχικά $q_0>0$, $\upsilon_0<0$ τότε

$$q = \frac{q_0}{\left(1+\sqrt{\frac{\lambda q_0}{6m}}\,t\right)^2}$$

Γενικά διαγράμματα φάσης

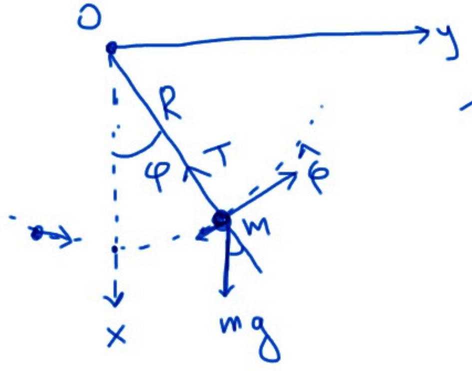


Σηκώνω ενέργεια από κάτω προς τα πάνω



Επίπεδο, ιδανικό εκκρεμές

"Μονοδιάστατο" πρόβλημα



$$\vec{r} = R\hat{\varpi}$$

$$\vec{v} = R\dot{\varphi}\hat{\varphi}, \quad \bar{\alpha} = R\ddot{\varphi}\hat{\varphi} - R\dot{\varphi}^2\hat{\varpi}$$

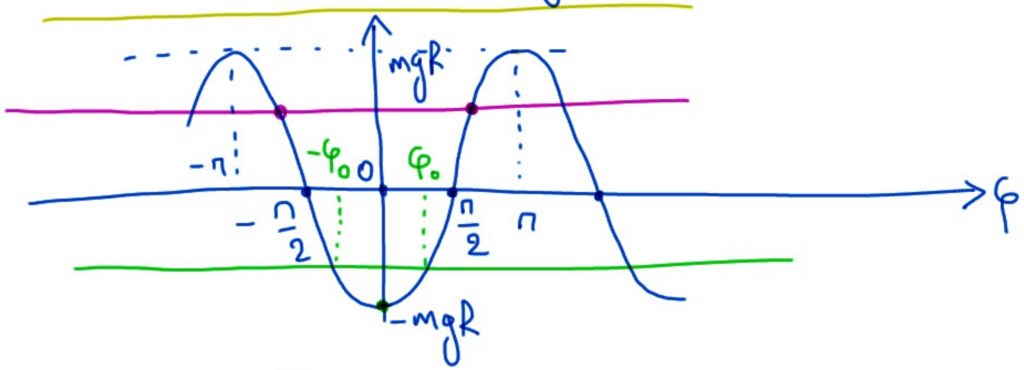
$$m\bar{\alpha} = \underbrace{m\bar{g}}_{mg\cos\varphi\hat{\varpi} - mg\sin\varphi\hat{\varphi}} + \overbrace{\vec{T}}^{-T\hat{\varpi}} \Leftrightarrow$$

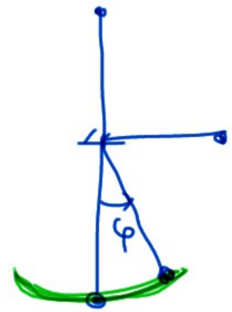
$$\begin{cases} -R\dot{\varphi}^2 = g\cos\varphi - T/m & \text{δίνει την } T \\ R\ddot{\varphi} = -g\sin\varphi & \text{δίνει την } \varphi(t). \end{cases}$$

Αλλιώς από θεώρημα ενέργειας $\frac{mv^2}{2} + V = E$, $V = -mgx = -mgR\cos\varphi$

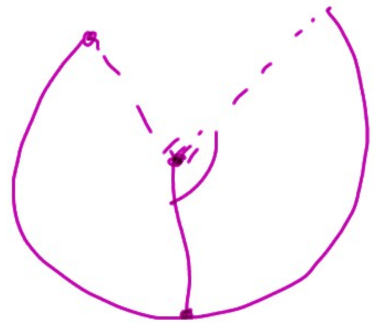
$$\frac{mR^2\dot{\varphi}^2}{2} - mgR\cos\varphi = E = \text{σταθ}$$

$V = -mgR\cos\varphi$





$V(\varphi) \le E$



$E = -mgR \; : \; \varphi(t) = 0$

$-mgR < E < mgR \; : \; -\varphi_0 \le \varphi \le \varphi_0$ όπου $V(\varphi_0) = E$

Για $0 < E < mgR$ αλλά φ_0 αμβλεία.

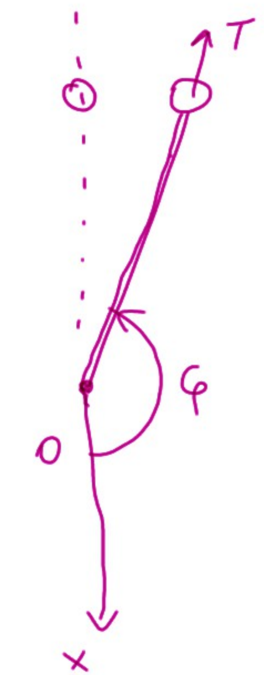
($E > mgR$ συνεχώς κύκλους)

$$T = 2\int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\dot\varphi} \quad \text{με} \quad \dot\varphi = \sqrt{\frac{2}{mR^2}\left(E + mgR\cos\varphi\right)}$$

Για μικρές ταλαντώσεις γύρω από το σημείο ευσταθούς ισορροπίας $\varphi = 0$

$$V \approx -mgR\left(1 - \varphi^2/2\right) = -mgR + \frac{mgR}{2}\varphi^2 , \quad \frac{mR^2\dot\varphi^2}{2} + \frac{mgR}{2}\varphi^2 = \sigma\tau\alpha\vartheta$$

Παραγωγίζω $\rightarrow$ $\ddot\varphi + \underbrace{\frac{g}{R}}_{\omega^2}\varphi = 0$ (Το ίδιο από $R\ddot\varphi = -g\sin\varphi$ με $\sin\varphi \approx \varphi$)



Μελέτη κίνησης γύρω από την ανώτερη θέση $\varphi = \pi$.

Ορίζω $q = \varphi - \pi$

$$V = -mgR\cos(\pi + q) = mgR\cos q = mgR - mgR\frac{q^2}{2}$$

$$\frac{mR^2\dot{q}^2}{2} - mgR\frac{q^2}{2} = \sigma\tau\alpha\vartheta$$

$$mR^2\ddot{q} - mgRq = 0 \Leftrightarrow \ddot{q} - \frac{g}{R}q = 0$$

Λύσεις $q = e^{\lambda t}$, $\lambda = \pm\sqrt{g/R}$

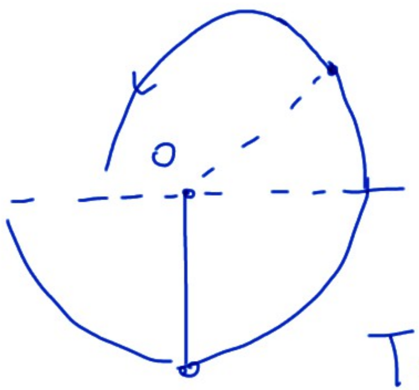
$$q = D_1 e^{\lambda t} + D_2 e^{-\lambda t}$$ αστάθεια

(το ίδιο από $\ddot{\varphi} = -\frac{g}{R}\sin\varphi$ με $\sin\varphi = \sin(\pi + q) = -\sin q \approx -q$

$$\ddot{q} = +\frac{g}{R}q$$)

Έλεγχος για $T \geq 0$:

$T = mg\cos\varphi + \frac{mv^2}{R}$. Όσο $\cos\varphi \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ είναι $T \geq 0$.



Από $E = \frac{mv^2}{2} - mgR\cos\varphi \Leftrightarrow \frac{mv^2}{R} = \frac{2}{R}\left(E + mgR\cos\varphi\right)$

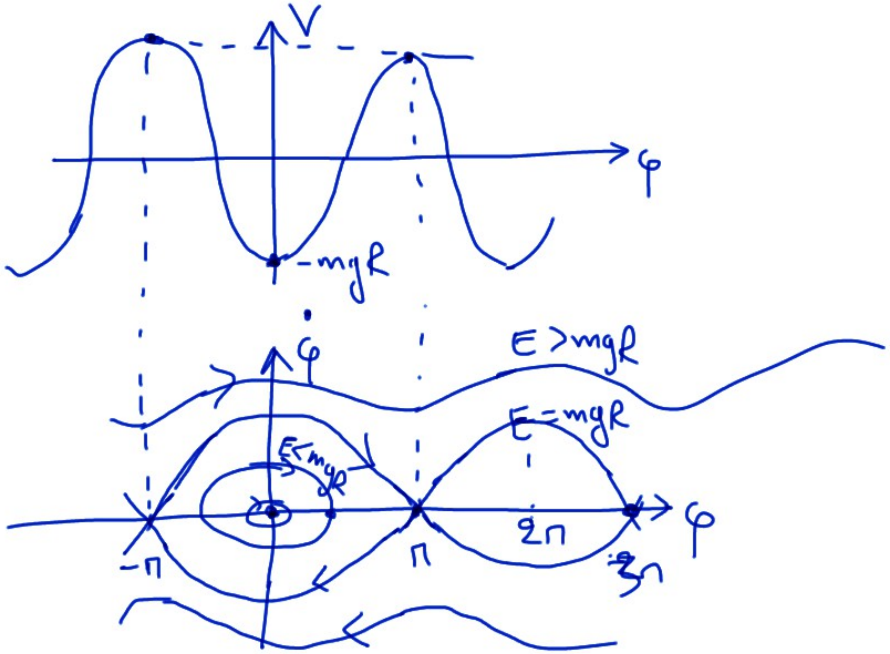
προκύπτει $T = 3\,mg\cos\varphi + \frac{2E}{R}$

$T = 0 \Leftrightarrow \cos\varphi_1 = -\frac{2E}{3mgR} \Leftrightarrow \sin\left(\varphi_1 - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{2E}{3mgR}$

Μόνο για $\frac{2E}{3mgR} \leq 1 \Leftrightarrow E \leq \frac{3}{2}mgR$ υπάρχει λύση.

Επομένως αν $E \leq 0$ ή $E \geq \frac{3}{2}mgR$ δεν χαλαρώνει το νήμα.

Αν $0 < E < \frac{3}{2}mgR$ χαλαρώνει σε γωνία $\varphi_1 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) : \sin\left(\varphi_1 - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{2E}{3mgR}$



V
φ
−mgR
φ̇
E > mgR
E = mgR
E < mgR
−π
π
2π
3π
φ