Παραδείγματα συντηρητικών δυνάμεων :

- Ηλεκτροστατικό πεδίο Φ : $V = q\Phi$ $\quad (\bar F = -\nabla V = q\bar E = -q\nabla\Phi)$.
- Βαρυτικό πεδίο Φ : $V = m\Phi$ $\quad (\bar F = -\nabla V = m\bar g = -m\nabla\Phi)$
- ομογενές βαρυτικό πεδίο

$\bar F = m\bar g = -mg\hat z$

$$\bar F = -\nabla V \Leftrightarrow -mg\hat z = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat x + \frac{\partial V}{\partial y}\hat y + \frac{\partial V}{\partial z}\hat z\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad \dfrac{\partial V}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial V}{\partial z} = mg \Leftrightarrow V = mgz + C_1 \end{cases}$$

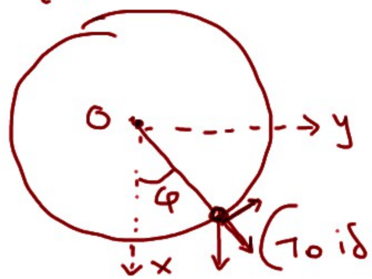
ή $V = mg(z - z_0)$

Β' τρόπος : $\nabla \times \bar F = 0$ ✓ άρα συντηρητική

$$V(\bar r) = -\int \bar F \cdot d\bar r = -\int (-mg\hat z)\cdot d\bar r = \int mg\,dz = mgz + C_1$$

Αν ο άξονας προς τα κάτω $\quad V = -mgz + C_1 \quad (\bar F = +mg\hat z)$

Παράδειγμα



$$V = -mgx + \cancel{C_1}^{\,0} = -mg\,\varpi\cos\varphi \quad \text{με } \varpi = R.$$

$$-\nabla V = -\left(\frac{\partial V}{\partial \varpi}\hat\varpi + \frac{1}{\varpi}\frac{\partial V}{\partial\varphi}\hat\varphi\right) = mg\cos\varphi\,\hat\varpi - mg\sin\varphi\,\hat\varphi$$

(Το ίδιο με $m\bar g = m(\bar g\cdot\hat\varpi)\hat\varpi + m(\bar g\cdot\hat\varphi)\hat\varphi$ και $\bar g = g\hat x$).

• Γενικά αν $\bar F = \sigma\tau\alpha\theta$ τότε προφανώς $\nabla \times \bar F = 0$ και

$$V = -\int \bar F \cdot d\bar r = -\bar F \cdot \bar r + C$$

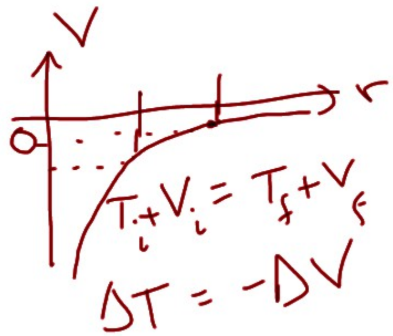
• Βαρύτητα από σφαιρικό σώμα M

$$\bar F = -\frac{GMm}{r^2}\hat r$$

Α' τρόπος: $\nabla \times \bar F = 0$ και $V = -\int \bar F \cdot d\bar r = \int \frac{GMm}{r^2} \overbrace{\hat r \cdot \underbrace{d\bar r}_{dr\,\hat r + r\,d\theta\,\hat\theta + r\sin\theta\,\hat\varphi}}^{dr} = -\frac{GMm}{r} + \cancel{C}^{\,0}$

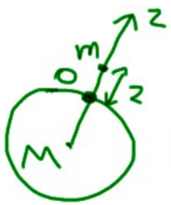
Β' τρόπος: $\bar F = -\nabla V \Leftrightarrow +\frac{GMm}{r^2}\hat r = \left(\frac{\partial V}{\partial r}\hat r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\hat\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\hat\varphi\right)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial \theta} = 0 \,, \quad \dfrac{\partial V}{\partial \varphi} = 0 \\ \dfrac{GMm}{r^2} = \dfrac{\partial V}{\partial r} \Leftrightarrow V = -\dfrac{GMm}{r} + \cancel{C}^{\,0} \end{cases}$$



Φυσική του "−" προσήμου:

M



$r = R + z$

$V = -\frac{GMm}{R+z}$ Αν $z \ll R$, $V \approx -\frac{GMm}{R} + \overbrace{\frac{GMm}{R^2}}^{mg_0} z$

• κεντρικές δυνάμεις $\bar{F} = f(r)\,\hat{r}$

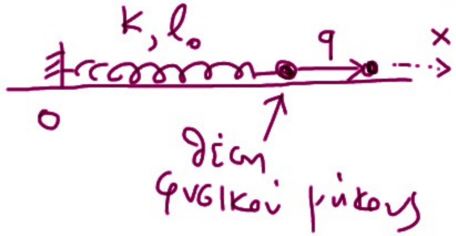
$\nabla \times \bar{F} = \dots = 0$ άρα συντηρητική

$$V = -\int \bar{F}\cdot d\bar{r} = -\int f(r)\,dr$$

• Μονοδιάστατο πεδίο $\bar{F} = F(x)\,\hat{x}$

$\bar{\nabla}\times\bar{F} = 0$ και $V = -\int \bar{F}\cdot d\bar{r} = -\int F(x)\,dx$

• Ελατήριο



$\bar{F} = -kq\,\hat{x}$, $V = \int kq\,dq = \frac{kq^2}{2} + \cancel{c}^{\,0}$

$q = x - l_0$ αν αρχή στο σταθερό άκρο

($q = x$ αν η αρχή στη θέση φυσικού μήκους)

- - - - - - -

Μη-συντηρητικές δυνάμεις: τριβή, αντίσταση αέρα

(διότι $W < 0$ ακόμα και σε κλειστή διαδρομή)

Άσκηση : Είναι η $\bar{F} = x^2 y \hat{x} + x^2 \hat{y}$ συντηρητική;
Αν ναι βρείτε την V.

<u>Λύση:</u>

Ψάχνω $V(x,y,z)$: $\bar{F} = -\nabla V \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 y = -\dfrac{\partial V}{\partial x} & (1) \\ x^2 = -\dfrac{\partial V}{\partial y} & (2) \\ 0 = \dfrac{\partial V}{\partial z} \Leftrightarrow V = V(x,y) & \end{cases}$

$(2) \rightarrow V = -x^2 y + C(x)$

Αντικαθ. στην $(1) \rightarrow x^2 y = 2xy - \dfrac{dC}{dx}$ ΑΤΟΠΟ

Άρα η $\bar{F}$ μη-συντηρητική.

Άσκηση: Για ποιες $f(x)$ η $\bar{F} = x^2 y \hat{x} + f(x) \hat{y}$ είναι συντηρητική;

Λύση:

$$\bar{F} = -\nabla V \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 y = -\dfrac{\partial V}{\partial x} & (1) \\ f(x) = -\dfrac{\partial V}{\partial y} & (2) \end{cases}$$

(1) $\rightsquigarrow V = -\dfrac{x^3}{3} y + C(y)$. Αντικ. στην (2) $\rightsquigarrow f(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{dC}{dy}$

Πρέπει $\dfrac{dC}{dy} = \text{σταθ} = D \Leftrightarrow C = Dy + D_0$

Άρα η $\bar{F}$ συντηρητική αν $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - D$. Τότε $V = -\dfrac{x^3}{3} y + Dy + D_0$.

Β' τρόπος: $\nabla \times \bar{F} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ x^2 y & f(x) & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{df}{dx} = x^2 \Leftrightarrow f = \dfrac{x^3}{3} + \text{σταθ}.$

Χρήση δυναμικής ενέργειας σε "μονοδιάστατα" προβλήματα

$$\boxed{m\ddot{x} = -\frac{dV}{dx}} \Leftrightarrow \boxed{\frac{m\dot{x}^2}{2} + V(x) = E} \Leftrightarrow \dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - V(x)\right]} \Leftrightarrow$$

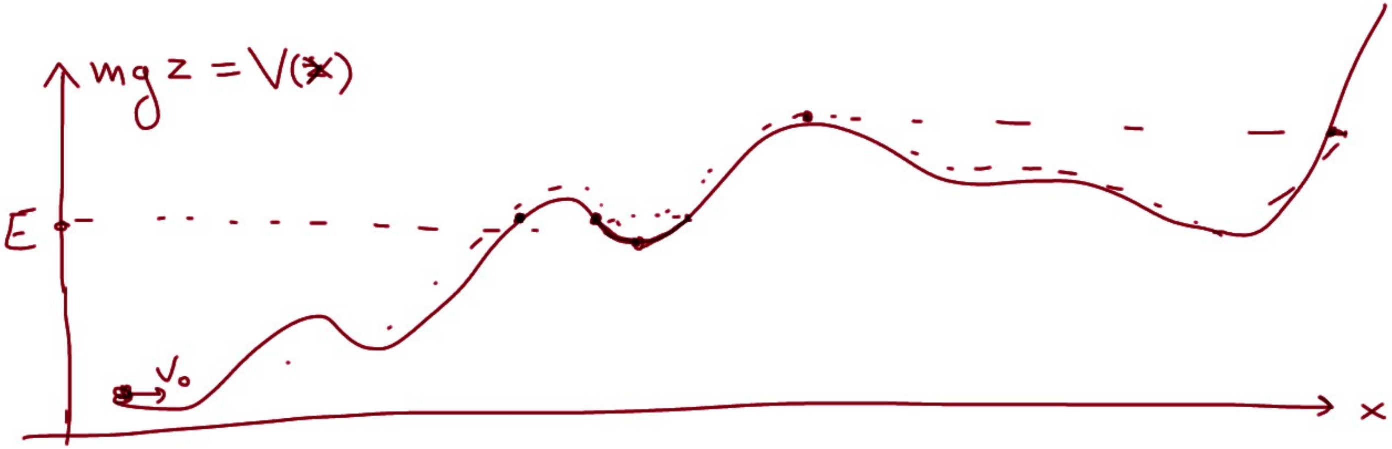
$$\int_{t_0}^{t} dt = \pm \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - V(x)\right]}} \Leftrightarrow \boxed{t = t_0 \pm \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - V(x)\right]}}}$$

πρόσημο του $\dot{x}$

Η λύση εξαρτάται από x_0 και v_0, μέσω της $E = \frac{m v_0^2}{2} + V(x_0)$.

Το γράφημα της $V(x)$:

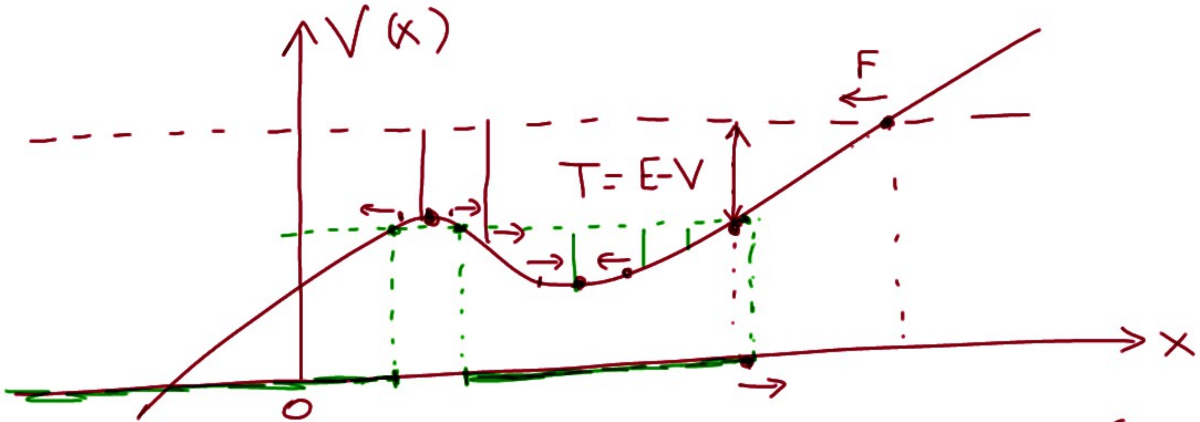
Παράδειγμα



$$E = \frac{m v_0^2}{2} + V(x_0) = 0 + V(x_f)$$

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 = E - V(x) \geq 0$$

Το = ισχύει αν $\dot{x}=0 \Leftrightarrow V=0$



Επιτρεπτή περιοχή $V(x) \leq E$

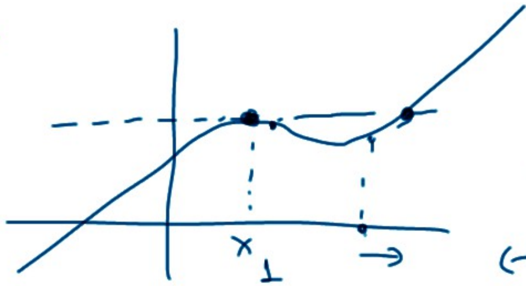
$$F = -\frac{dV}{dx}$$

ακρότατα = σημεία ισορροπίας $(F=0)$

(ευσταθή αν V = ελάχιστο
ασταθή αν V = μέγιστο)

όρια τροχιάς όπου $\dot{x}=0$

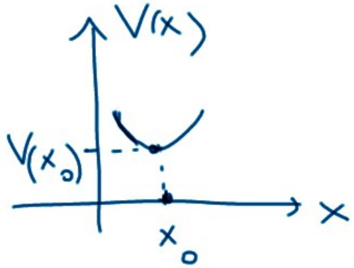
δηλ. $V(x) = E$



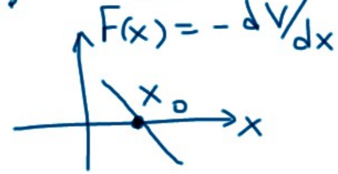
Αν $E = V_{max}$ το σώμα πλησιάζει επ' άπειρον το x_1

Κίνηση γύρω από ευσταθές σημείο ισορροπίας x_0

(στο οποίο $V'(x_0)=0$ και $V''(x_0)>0$)
το V ελάχιστο τοπικά



$$V(x) = \underline{V(x_0)} + \cancel{V'(x_0)(x-x_0)} + \frac{1}{2}V''(x_0)(x-x_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!}V^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$$



$$V(x) \approx V(x_0) + \frac{1}{2}\underbrace{V''(x_0)}_{>0}(x-x_0)^2 = V(x_0) + \frac{1}{2}V''(x_0)q^2$$

$$F(x) = -\frac{dV}{dx} \approx -V''(x_0)(x-x_0) = -V''(x_0)q$$ όπου $q = x - x_0$

$$m\ddot{x} = -\frac{dV}{dx} \Leftrightarrow m\ddot{q} \approx -V''(x_0)q \Leftrightarrow \ddot{q} + \underbrace{\frac{V''(x_0)}{m}}_{w^2}q = 0$$

Γραμμική, ομογενής, με σταθερούς συντελεστές.

Λύσεις $q = e^{\lambda t}$. Αντικαθιστώ $\dot{q} = \lambda e^{\lambda t}$, $\ddot{q} = \lambda^2 e^{\lambda t}$

$(\lambda^2 + w^2)e^{\lambda t} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + w^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm i w$. Γενική λύση $q = C_1 e^{iwt} + C_2 e^{-iwt}$

$$= C_1(\cos wt + i\sin wt) + C_2(\cos wt - i\sin wt) = \underbrace{(C_1+C_2)}_{D_1}\cos wt + \underbrace{i(C_1-C_2)}_{D_2}\sin wt = D_1\cos wt + D_2\sin wt$$

$V \approx V(x_0) + \frac{1}{2}\underbrace{V''(x_0)}\, q^2$, $\quad m\ddot q = -V''(x_0)\, q \Leftrightarrow \ddot q + \underbrace{\left(\frac{V''(x_0)}{m}\right)}_{\omega^2} q = 0$

$q = D_1 \cos(\omega t) + D_2 \sin(\omega t)$

(ή $D\cos(\omega t + \varphi_0)$ ή $D\sin(\omega t + \varphi_0)$)

ω = κυκλική συχνότητα , $T = 2\pi/\omega \to$ περίοδος , συχνότητα $\frac{1}{T} = f = \frac{\omega}{2\pi}$

↓

ανεξάρτητη της ενέργειας

$$\frac{1}{2}m\dot q^2 + \frac{1}{2}V''(x_0)\, q^2 = E - V(x_0) \Rightarrow \dot q = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - V(x_0) - \frac{V''(x_0)}{2}q^2\right]}$$

$$\int \frac{dq}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - V(x_0)\right] - \omega^2 q^2}} \qquad \left(\int \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \arcsin\xi\right)$$

Καλύτερα παραγωγίζω το ολοκλήρωμα ενέργειας $\rightsquigarrow m\cancel{\dot q}\ddot q + V''(x_0)\, q\cancel{\dot q} = 0 \overset{\dot q \neq 0}{\Longleftrightarrow}$

$\ddot q + \omega^2 q = 0 \Leftrightarrow \dots$

Άσκηση: Μονοδιάστατη κίνηση σώματος $m=1$ σε $F = x^2 - 3x + 2$.

(α) $V = ;$ αν $V(0)=0$;

(β) Για ποιες E περιορισμένη κίνηση;

(γ) Σημεία ισορροπίας; Περίοδος μικρών ταλαντώσεων γύρω από τα ευσταθή;

(δ) Αν $x|_{t=0}=1$ περιγραφή κίνησης για διάφορες $\upsilon|_{t=0}=\upsilon_0$.

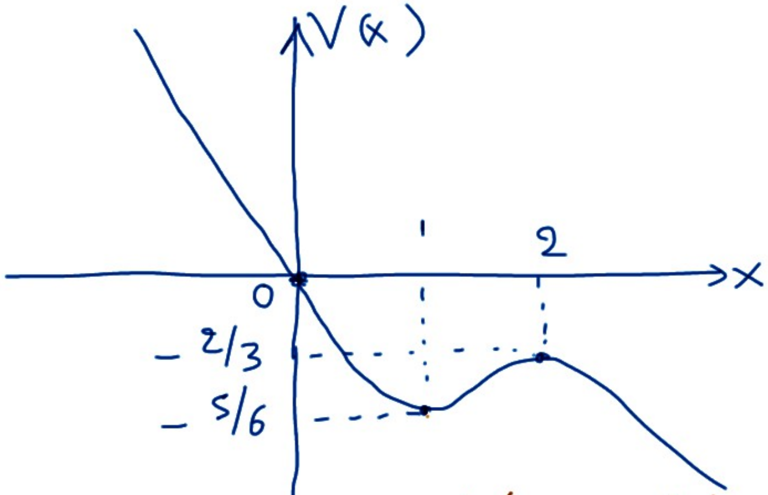
(ε) Αν $V(0.9) \approx V(1.1) = -0.83$ ποιο ολοκλήρωμα δίνει την περίοδο ταλάντωσης μεταξύ 0.9 και 1.1;

Λύση:

(α) $V = -\int F\,dx = \int(-x^2+3x-2)\,dx = -\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 2x + \cancel{C}$ 0 ώστε $V(0)=0$

Μελέτη της $V(x)$: $V'(x) = -x^2+3x-2 = -(x-1)(x-2)$, $V''(x) = -2x+3 = -2\left(x-\frac{3}{2}\right)$

x	$-\infty$		1		$3/2$		2		∞
V'		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
V''		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
V	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{5}{6}$	$\nearrow$		$\nearrow$	$-2/3$	$\searrow$	$-\infty$



(β) Περιορισμένη κίνηση, δηλ. $x_{min} \leq x \leq x_{max}$ όπου $V(x_{min}) = V(x_{max}) = E$

μόνο για $-5/6 \leq E \leq -2/3$

(γ) Σημεία ισορροπίας $F = 0 \Leftrightarrow$ ακρότατα της $V(x)$:
$x=1$ ευσταθές και $x=2$ ασταθές.

Γύρω από το $x=1$: Θέτω $q = x-1$

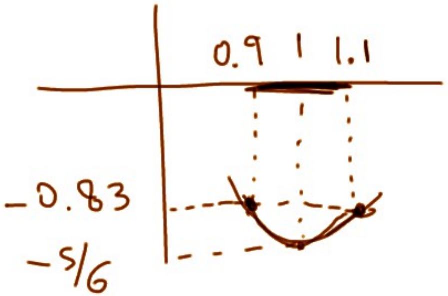
$$V(x) \approx V(1) + \cancel{V'(1)}\, q + \frac{1}{2} V''(1)\, q^2 = -\frac{5}{6} + \frac{1}{2} q^2$$

$$\frac{m\dot{q}^2}{2} + V = E \Leftrightarrow \frac{\dot{q}^2}{2} + \frac{q^2}{2} = \text{σταθ} \xrightarrow{\text{παραγωγίζω}} \ddot{q} + q = 0$$

$\omega^2 = 1 \Leftrightarrow \omega = 1$

$T = 2\pi/\omega$ δηλ. $T = 2\pi$.

(ε)



$E = -0.83$ $\quad 0,9 \le x \le 1,1$

$$\int dt = \int \frac{dx}{\dot{x}} = \int \frac{dx}{\pm\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - V(x)\right]}}$$

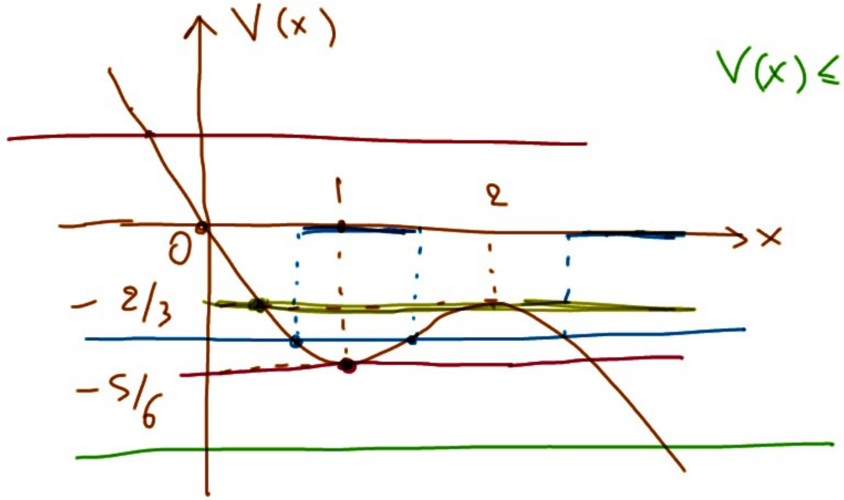
$$\Delta t_{0.9\to 1.1} = \int_{0.9}^{1.1} \frac{dx}{+\sqrt{2\left[-0.83 - V(x)\right]}} , \quad \Delta t_{1.1\to 0.9} = \int_{1.1}^{0.9} \frac{dx}{-\sqrt{}}$$

$$T = 2\int_{0.9}^{1.1} \frac{dx}{\sqrt{}}$$

(δ) $x\big|_{t=0} = 1$, $v\big|_{t=0} = v_0$

$$E = \frac{v_0^2}{2} + V(1) = \frac{v_0^2}{2} - \frac{5}{6}$$

$V(x) \leq E$



- $E < -5/6$ μη επιτρεπτή
- $E = -5/6$: $x = 1$ ακίνητο $\Leftrightarrow v_0 = 0$
- $-\frac{5}{6} < E < -\frac{2}{3} \Leftrightarrow 0 < |v_0| < \frac{1}{\sqrt{3}}$: ταλάντωση μεταξύ των δύο μικρότερων λύσεων της $V(x) = E$
- $E = -2/3 \Leftrightarrow |v_0| = \frac{1}{\sqrt{3}}$: Το σώμα καταλήγει να κινείται προς το $x = 2$.
- $E > -2/3 \Leftrightarrow |v_0| > \frac{1}{\sqrt{3}}$: Το σώμα καταλήγει στο $x = +\infty$.