Νόμοι διατήρησης :

- Διατήρηση ορμής ολικής $\quad \Sigma \bar{F} = \frac{d\bar{p}}{dt}$

  Αν $\Sigma\bar{F}=0$ τότε $\bar{p}=$ σταθ (δηλ. $\bar{\upsilon}=$ σταθ αν $\bar{p}=m\bar{\upsilon}$)

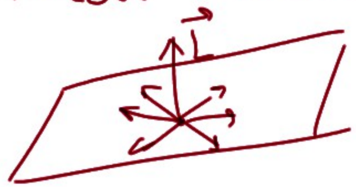
- Μερική διατήρηση ορμής : $\Sigma F_x=0 \Leftrightarrow \frac{dp_x}{dt}=0 \Leftrightarrow p_x=$ σταθ ($\upsilon_x=$ σταθ)

- Διατήρηση στροφορμής $\quad \bar{L}=\bar{r}\times\bar{p}$

$$\dot{\bar{L}} = \frac{d}{dt}(\bar{r}\times\bar{p}) = \underbrace{\frac{d\bar{r}}{dt}\times\bar{p}}_{0} + \bar{r}\times\underbrace{\frac{d\bar{p}}{dt}}_{\Sigma\bar{F}} = \bar{r}\times\Sigma\bar{F} = \text{ροπή}$$

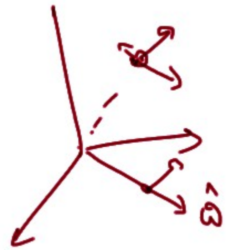
ροπή $=0 \Leftrightarrow \bar{L}=$ σταθ.

(όταν $\bar{L}=$ σταθ, η $\bar{L}\cdot\bar{r}=0$ είναι εξίσωση επιπέδου κάθετου στο $\bar{L}$ που περνά από την αρχή του συστήματος



σε καρτ. $L_x x + L_y y + L_z z = 0$)

• Διατήρηση L_z : $\qquad L_z = \sigma\tau\alpha\vartheta \iff \underbrace{F_\varphi}_{\bar F\cdot\hat\varphi} = 0$



Απόδειξη :

$$\dot{\bar L} = \bar r \times \bar F = \begin{vmatrix} \hat\varpi & \hat\varphi & \hat z \\ \varpi & 0 & z \\ F_\varpi & F_\varphi & F_z \end{vmatrix} = -zF_\varphi\hat\varpi + \left(zF_\varpi - \varpi F_z\right)\hat\varphi + \varpi F_\varphi\hat z$$

Άρα $\hat z\cdot\dot{\bar L} = \varpi F_\varphi$

$$\dot L_z = \varpi F_\varphi$$

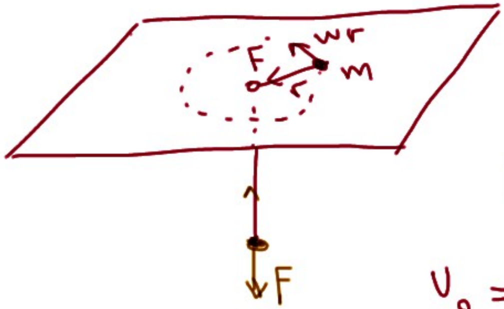
(Αλλιώς: $\bar\alpha = \left(\ddot\varpi - \varpi\dot\varphi^2\right)\hat\varpi + \frac{1}{\varpi}\frac{d}{dt}\underbrace{\left(\varpi^2\dot\varphi\right)}_{L_z/m}\hat\varphi + \ddot z\hat z$

$$\bar L = \bar r \times m\bar v = \begin{vmatrix} \hat\varpi & \hat\varphi & \hat z \\ \varpi & 0 & z \\ m\dot\varpi & m\varpi\dot\varphi & m\dot z \end{vmatrix} \quad \text{άρα} \quad L_z = m\varpi^2\dot\varphi$$

οπότε $\alpha_\varphi = 0 \iff L_z = \sigma\tau\alpha\vartheta$)

(Αλλιώς: $\dot L_z = \dot{\bar L}\cdot\hat z = \left(\underbrace{\bar r}_{\varpi\hat\varpi + z\hat z} \times \bar F\right)\cdot\hat z = \left(\varpi\hat\varpi\times\bar F\right)\cdot\hat z = \left(\varpi\hat\varpi\times F_\varphi\hat\varphi\right)\cdot\hat z = \varpi F_\varphi$)

Παράδειγμα : $L_z = I\omega = mr^2\omega = \sigma\tau\alpha\theta$



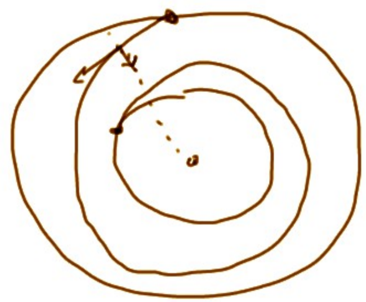
Αλλάζω r από r_1 σε $r_2 < r_1$.

L_z σταθ άρα $mr_1^2\omega_1 = mr_2^2\omega_2 \Leftrightarrow \omega_2 = \omega_1 \frac{r_1^2}{r_2^2} \uparrow$

$$v_2 = \omega_2 r_2 = \underbrace{\omega_1 r_1}_{v_1} \frac{r_1}{r_2} \uparrow$$

$$E = \frac{mv_2^2}{2} = \frac{L_z^2}{2mr^2} \uparrow$$

Ποιος δίνει την ενέργεια $\Delta E = \frac{L_z^2}{2mr_2^2} - \frac{L_z^2}{2mr_1^2}$;



Απάντηση: η $\bar{F}$

$$\left.\begin{aligned} m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) &= F \\ r^2\dot{\varphi} &= L/m \end{aligned}\right\} \quad F = m\ddot{r} - \frac{L^2}{mr^3}$$

$$W_F = \int_1^2 \bar{F}\cdot d\bar{r} = \int_1^2 F\,dr = \underbrace{m\int_1^2 \ddot{r}\,dr}_{0} - \underbrace{\int_1^2 \frac{L^2}{mr^3}dr}_{\Delta E}$$

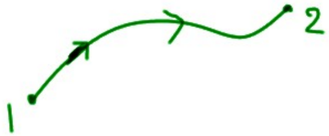
$$\int \ddot{r}\,dr = \int \ddot{r}\,\dot{r}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{d\dot{r}^2}{dt}dt = \frac{1}{2}\left[\dot{r}^2\right]_1^2 = 0$$

Παράδειγμα:

Η L δεν είναι σταθερή γιατί η ροπή της T δεν είναι μηδέν.

(είναι RT)

• Έργο δύναμης $\bar{F}$: $W_{1\to 2} = \int_1^2 \bar{F}\cdot d\bar{r} = \int_1^2 \bar{F}\cdot d\bar{\ell}$



• ΘΜΚΕ για σημειακό σώμα m : $W_{12} = \int_1^2 \Sigma\bar{F}\cdot d\bar{r} = \int_1^2 \underbrace{m\frac{d\bar{v}}{dt}\cdot\bar{v}}_{\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right)}\, dt = \left[\frac{mv^2}{2}\right]_1^2 = T_2 - T_1$

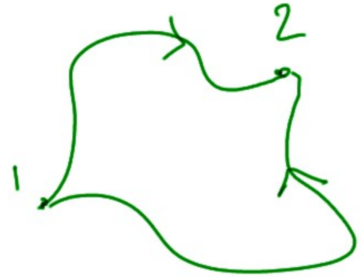
όπου $T = \frac{mv^2}{2}$ η κινητική ενέργεια

Άρα $T_2 = T_1 + W_{12}$.

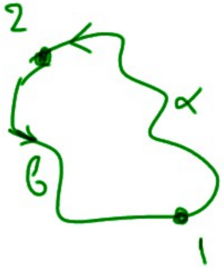
Ισχύς = $\frac{dW}{dt} = \frac{\bar{F}\cdot d\bar{r}}{dt} = \bar{F}\cdot\bar{v}$

Συντηρητικές δυνάμεις ($\bar{F} = \bar{F}(\bar{r})$):

- $\boxed{\int_1^2 \bar{F}\cdot d\bar{r} \ \text{ ανεξάρτητο της διαδρομής}}$



- $\boxed{\oint \bar{F}\cdot d\bar{r} = 0}$



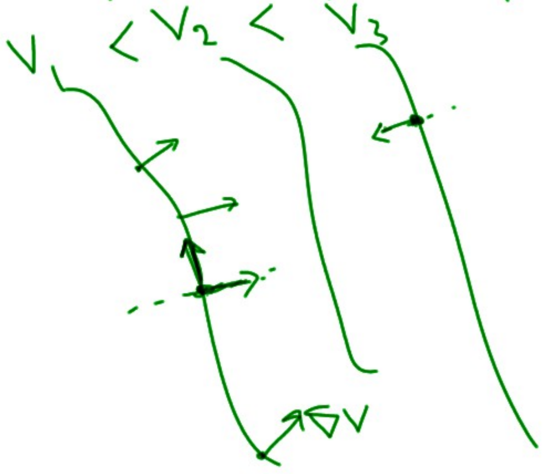
$$\oint \bar{F}\cdot d\bar{r} = \underset{(\alpha)}{\int_1^2} \bar{F}\cdot d\bar{r} + \underbrace{\underset{(\beta)}{\int_2^1} \bar{F}\cdot d\bar{r}}_{-\underset{(\beta)}{\int_1^2} \bar{F}\cdot d\bar{r}} = \underset{(\alpha)}{\int_1^2} \bar{F}\cdot d\bar{r} - \underset{(\beta)}{\int_1^2} \bar{F}\cdot d\bar{r}$$

- $\oint \bar{F}\cdot d\bar{r} = \iint \nabla\times\bar{F}\cdot d\bar{S} = 0$

άρα $\boxed{\nabla\times\bar{F} = 0}$ $\left(\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = 0 \text{ σε καρτεσιανές} \right)$

- $\boxed{\bar{F} = -\nabla V}$ $(\nabla\times\nabla V = 0)$

V = δυναμική ενέργεια



$$V = V(\bar{r})$$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz = \bar{\nabla} V \cdot d\bar{r}$$

Αν διαλέξω $d\bar{r}$ πάνω στην $V=$σταθ

$dV = 0$ δηλ. $\nabla V \cdot d\bar{r} = 0 \Leftrightarrow \nabla V \perp d\bar{r}$

Αν $d\bar{r} \parallel \nabla V$ τότε $dV = |\nabla V| \cdot |d\bar{r}| \cos\varphi$

∇V : κάθετη στις ισοϋψείς $V=$σταθ
με φορά προς μεγαλύτερα V.

$\bar{F} = -\nabla V$ έχει φορά προς μικρότερες V.

V = συνάρτηση δυναμικής ενέργειας (όχι δυναμικό ϕ)

Σε βαρυτικό πεδίο $\quad \bar{g} = \dfrac{\bar{F}}{m} = -\nabla\phi$

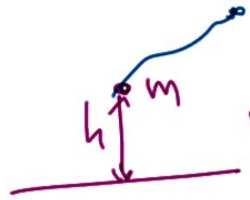
$\bar{F} = m\bar{g} = m(-\nabla\phi) = -\nabla(m\phi) = -\nabla V \quad$ όπου $\quad V = m\phi$

Σε ηλεκτρικό πεδίο $\quad \bar{E} = \dfrac{\bar{F}}{q} = -\nabla\phi$

$\bar{F} = q\bar{E} = -\nabla V \quad$ με $\quad V = q\phi$.

$\bar{F} = -\nabla V$

αυθαιρεσία προσθετικής σταθεράς π.χ.



$V = mgh$

(οι V_2 και V_1 δίνουν ίδια $\bar{F}$ αν $V_2 - V_1 =$ σταθ).

$\underbrace{V = -\int \bar{F} \cdot d\bar{r}}$ (διότι $dV = \nabla V \cdot d\bar{r} = -\bar{F} \cdot d\bar{r}$)

δίνει την V μονοσήμαντα μόνο αν η $\bar{F}$ είναι συντηρητική.

Αν η $\Sigma \bar{F} = -\nabla V$ τότε $W_{12} = \int_1^2 (-\nabla V) \cdot d\bar{r} = -\int_1^2 dV = V_1 - V_2$

ΘΜΚΕ $\rightsquigarrow$ $T_2 = T_1 + (V_1 - V_2) \Leftrightarrow T_2 + V_2 = T_1 + V_1$

Ορίζω $T + V = E$ = ενέργεια μηχανική

Διατήρηση ενέργειας άμεσα από Νόμο Νεύτωνα :

$$m\frac{d\bar{v}}{dt} = -\nabla V \quad \text{με} \quad V = V(\bar{r})$$

Πολ/ζω με $\bar{v}$ $\rightarrow$ $m\bar{v}\cdot\frac{d\bar{v}}{dt} = -\underbrace{\bar{v}}_{\frac{d\bar{r}}{dt}}\cdot\nabla V \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{m\bar{v}^2}{2}\right) = -\frac{\overbrace{d\bar{r}\cdot\nabla V}^{\rightarrow dV}}{dt} \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right) = -\frac{dV}{dt} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{mv^2}{2}+V\right)}_{E} = 0$$

δηλ. $\frac{mv^2}{2}+V = E =$ σταθ.

Αν $V = V(\bar{r}, t)$ τότε

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\vec{v}^2}{2}+V\right) = m\bar{v}\cdot\frac{d\bar{v}}{dt} + \underbrace{\frac{dV}{dt}}_{\frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial V}{\partial z}\frac{dz}{dt}+\frac{\partial V}{\partial t}} = \overbrace{\bar{v}\cdot\bar{F}+\bar{v}\cdot\nabla V}^{0}+\frac{\partial V}{\partial t}$$

δηλ. $$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}+V\right) = \frac{\partial V}{\partial t}}$$

Αν δεν ισχύει παντού η $\nabla \times \bar{F} = 0$;

Αν ο χώρος που ισχύει η $\nabla \times \bar{F} = 0$ είναι απλά συνεκτικός

(κάθε καμπύλη μπορεί να συρρικνωθεί σε σημείο μένοντας συνεχώς στο χώρο)

τότε η $\bar{F}$ είναι συντηρητική στο χώρο αυτό

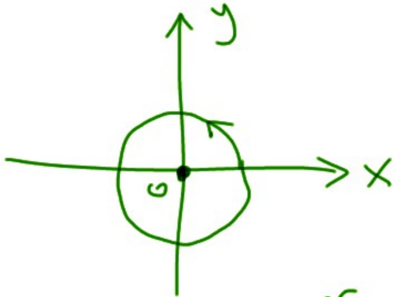
(υπάρχει V : $\bar{F} = -\nabla V$, $\oint \bar{F} \cdot d\bar{r} = 0$)

π.χ.

είναι απλά συνεκτικός

π.χ. Έστω $\bar F = \dfrac{x\hat y - y\hat x}{x^2+y^2} = \dfrac{\hat\varphi}{\varpi}$

$\nabla\times\bar F = \;;$ $\qquad \nabla\times\bar F = \begin{vmatrix} \hat x & \hat y & \hat z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ \dfrac{-y}{x^2+y^2} & \dfrac{x}{x^2+y^2} & 0 \end{vmatrix} = \dots = 0$



$$\oint \bar F\cdot d\bar r = \int_0^{2\pi} \frac{\hat\varphi}{\varpi}\cdot\left(\cancel{d\varpi\,\hat\varpi} + \cancel{\varpi}\, d\varphi\,\hat\varphi + \cancel{dz\,\hat z}\right) = 2\pi \neq 0$$

$$\oint \bar F\cdot d\bar r = \iint \nabla\times\bar F\cdot d\bar S = 2\pi$$

Η $\bar F$ ΔΕΝ είναι συντηρητική.

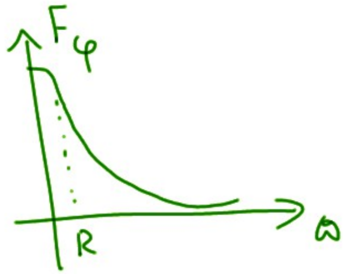
ΕΙΝΑΙ σε χώρο

στον οποίο έχω εξαφανίσει ένα ημιεπίπεδο.

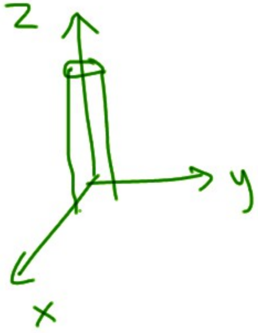
Σε αυτό το χώρο $V = -\varphi$

(ισχύει $\dfrac{\hat\varphi}{\varpi} = \nabla\varphi$)

Όμοια αν $\bar{F} = \begin{cases} \dfrac{\hat{\varphi}}{\varpi}, & \varpi \geq R \\ \dfrac{\varpi}{R^2}\hat{\varphi}, & \varpi \leq R \end{cases}$



$\nabla \times \bar{F} = \begin{cases} 0, & \varpi \geq R \\ \neq 0 & \end{cases}$

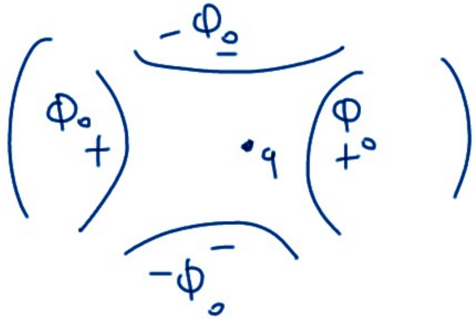


Δεν είναι συντηρητικό.

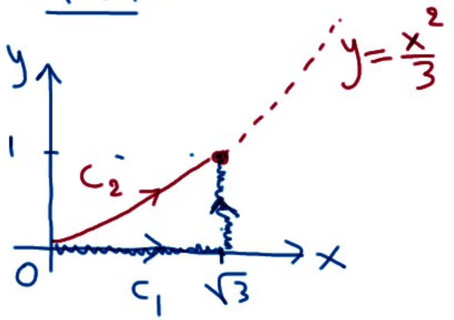
Άσκηση: Έστω $\bar{F} = -x\,\hat{x} + y\,\hat{y}$

(α) Ποιο το έργο της για τις τροχιές C_1, C_2;

(β) Είναι συντηρητική;



Λύση:



$$C_1:\quad W_{C_1} = \underbrace{\int_{(0,0)}^{(\sqrt{3},0)} \bar{F}\cdot d\bar{r}}_{\substack{x=0\to\sqrt{3},\ y=0 \\ d\bar{r} = dx\,\hat{x} \\ \bar{F}\cdot d\bar{r} = -x\,dx}} + \underbrace{\int_{(\sqrt{3},0)}^{(\sqrt{3},1)} \bar{F}\cdot d\bar{r}}_{\substack{x=\sqrt{3},\ y=0\to 1 \\ d\bar{r} = dy\,\hat{y} \\ \bar{F}\cdot d\bar{r} = y\,dy}} = \int_0^{\sqrt{3}} (-x)\,dx + \int_0^1 y\,dy = -1$$

C_2: $x = 0 \to \sqrt{3}$, $y = \frac{x^2}{3}$, $dy = \frac{2x}{3}dx$, $d\bar{r} = dx\,\hat{x} + \frac{2x}{3}dx\,\hat{y}$, $\bar{F} = -x\hat{x} + \frac{x^2}{3}\hat{y}$

$$\bar{F}\cdot d\bar{r} = \left(-x + \frac{2x^3}{9}\right)dx \quad \text{άρα} \quad W_{C_2} = \int_0^{\sqrt{3}} \left(-x + \frac{2x^3}{9}\right)dx = -1$$

(β) Α' τρόπος: $\nabla \times \bar{F} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -x & y & 0 \end{vmatrix} = 0$ άρα συντηρητική.

Β' τρόπος: Για να είναι, αρκεί να υπάρχει $V(x,y,z)$: $\bar{F} = -\nabla V$,

$$\bar{F} = -\nabla V \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{x}: & -x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad (1) \\ \hat{y}: & y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad (2) \\ \hat{z}: & 0 = -\frac{\partial V}{\partial z} \quad (3) \end{cases}$$

$(3) \rightsquigarrow V = V(x,y)$

$(2) \rightsquigarrow V = \int\limits_{x=\sigma\tau\alpha\theta} (-y)dy = -\frac{y^2}{2} + C(x)$

Αντικαθιστώ στην $(1) \rightsquigarrow +x = \frac{dC}{dx} \Leftrightarrow C = \frac{x^2}{2} + C_0$

Άρα βρίσκω $V = \frac{x^2 - y^2}{2} + \cancel{C_0}$, συνεπώς είναι συντηρητική.

$W_{(0,0)\to(\sqrt{3},1)} = V_{(0,0)} - V_{(\sqrt{3},1)} = -1$ ίδια για όλες τις τροχιές.