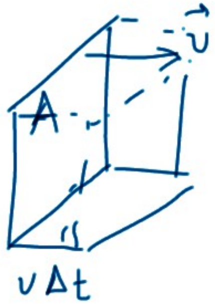
Κίνηση με επίδραση αντίστασης

$$\vec{F}_{αντ} = -\frac{1}{2} C_D A ρ v^2 \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

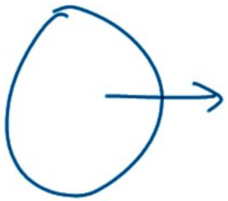


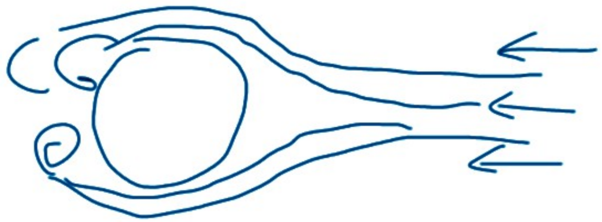
όγκος $A v Δt$

μάζα $ρ A v Δt$

ορμή $ρ A v Δt \cdot v = Δp$

$$F = \frac{Δp}{Δt} = ρ A v^2$$





όχι

π.χ.

$$m\alpha = mg - \frac{1}{2} C_D \rho A v^2$$

v_{op} όταν $\Sigma F = 0 \Leftrightarrow v_{op} = \sqrt{\frac{2mg}{C_D \rho A}}$

Αν $m = 70\ kg$, $g = 10\ m/s^2$, $C_D = 0.3$, $\rho = 1.2\ \frac{kg}{m^3}$, $A = 1\ m^2$ τότε

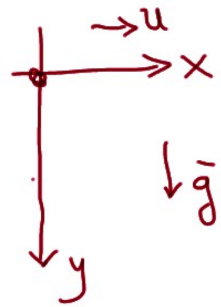
$$v_{op} = 60\ \frac{m}{s} = 60\ \frac{km/1000}{h/3600} = 216\ \frac{km}{h}$$

Αν το μέσο (αέρας) έχει ταχύτητα $\vec{u}$

$$\bar{F}_{αν} = -\frac{1}{2} C_D \rho A\, v_{σχ}^2 \frac{\bar{v}_{σχ}}{|\bar{v}_{σχ}|} \quad \text{με} \quad \bar{v}_{σχ} = \bar{v} - \bar{u}$$

$$m\bar{\alpha} = m\bar{g} - \frac{1}{2} C_D \rho A |\bar{v}_{σχ}|\, \bar{v}_{σχ}$$

. Έστω $\bar{u} = u\hat{x}$



Όταν $\bar{v}$ = σταθ. τότε $\hat{x}$: $v_x = u$

$\hat{y}$: $v_y = \sqrt{\frac{2mg}{C_D \rho A}}$.

Άσκηση: Σώμα m εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω με v_α. Αν η αντίσταση αέρα έχει μέτρο $\frac{m}{g\tau^2}v^2$ να μελετηθεί η κίνηση.

Λύση:

$$\cancel{m}\bar{\alpha} = \cancel{m}\bar{g} - \frac{\cancel{m}}{g\tau^2}v^2\frac{\bar{v}}{|\bar{v}|}$$ με $\bar{v} = \underbrace{\dot{z}}\hat{z}$, $\bar{g} = -g\hat{z}$, $\bar{\alpha} = \dot{v}\hat{z} = \ddot{z}\hat{z}$

$v = \dot{z}$ (όχι μέτρο)

Άρα $$\dot{v} = -g - \frac{1}{g\tau^2}|v|v$$

Πρέπει να μελετήσω ξεχωριστά άνοδο/κάθοδο (λόγω του $|v|$).

Άνοδος: $v>0$: $$\dot{v} = -g - \frac{v^2}{g\tau^2}$$

$$\int_{v_\alpha}^{v}\frac{dv}{g+\frac{v^2}{g\tau^2}} = -\int_0^t dt$$ θέτω $\frac{v}{g\tau} = \xi$, $dv = g\tau\, d\xi$,

$$\left(\int\frac{d\xi}{1+\xi^2} = \arctan\xi\right) \qquad \int\frac{\cancel{g}\tau\, d\xi}{\cancel{g}(1+\xi^2)} = -t \Leftrightarrow \left[\arctan\frac{v}{g\tau}\right]_{v_\alpha}^{v} = -t/\tau \Leftrightarrow$$

$$\arctan\frac{v}{g\tau} - \underbrace{\arctan\frac{v_\alpha}{g\tau}}_{C} = -t/\tau \Leftrightarrow \arctan\frac{v}{g\tau} = C - t/\tau \Leftrightarrow \boxed{v = g\tau\tan\left(C-\frac{t}{\tau}\right)}$$

$z(t)$: $v = \frac{dz}{dt} \Leftrightarrow \frac{dz}{dt} = g\tau \tan(C - t/\tau) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \int_0^z dz = \int_0^t g\tau \frac{\sin(C - t/\tau)}{\cos(C - t/\tau)} dt \Leftrightarrow z = g\tau^2 \int_0^t \frac{d[\cos(C - t/\tau)]}{\cos(C - t/\tau)} \Leftrightarrow$$

$$z = g\tau^2 \Big[\ln|\cos(C - t/\tau)|\Big]_0^t \Leftrightarrow z = g\tau^2 \ln\left|\frac{\cos(C - t/\tau)}{\cos C}\right|$$

Κατά την άνοδο $v > 0 \Leftrightarrow \tan(C - t/\tau) > 0 \Leftrightarrow t < \underbrace{C\tau}_{t_{αν}}$

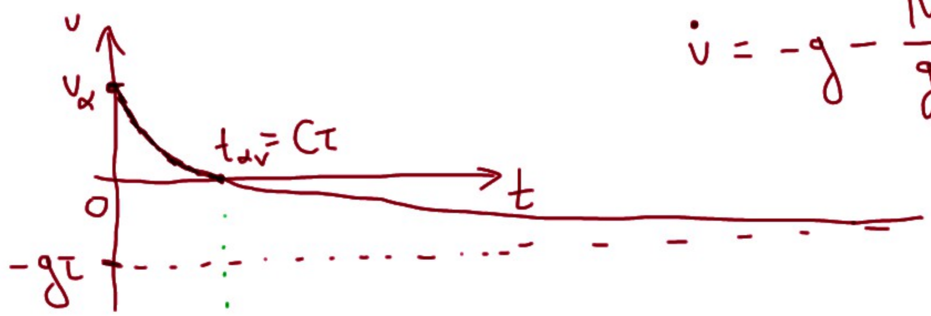
Στο διάστημα αυτό $\cos(C - t/\tau) > 0$

$$\boxed{z = g\tau^2 \ln\left(\frac{\cos(C - t/\tau)}{\cos C}\right)}$$

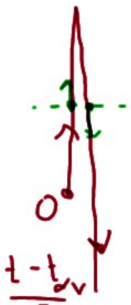
Αν θέλω να βρω $v = v(z)$ θέτω $\dot{v} = \frac{dv}{dz}\frac{dz}{dt} = v\frac{dv}{dz}$ και ο νόμος

Νεύτωνα : $v\frac{dv}{dz} = -g - \frac{v^2}{g\tau^2} \Leftrightarrow \int_{v_α}^{v} \frac{v\,dv}{g + v^2/g\tau^2} = -\int_0^z dz \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \boxed{v = \sqrt{(g^2\tau^2 + v_α^2)e^{-2z/g\tau^2} - g^2\tau^2}}$$

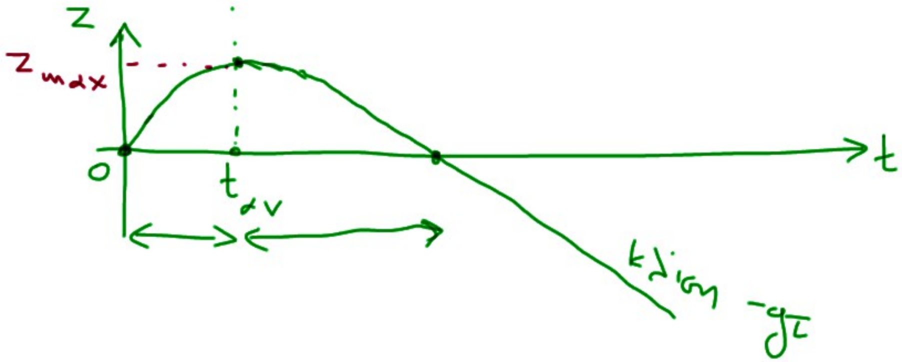


$$\dot{v} = -g - \frac{|v|v}{g\tau^2}$$

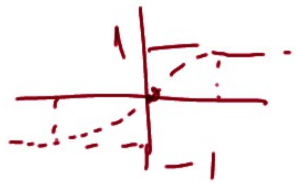


κατά την κάθοδο

$$v = -g\tau \tanh\frac{t-t_{αν}}{\tau} = -g\tau\,\frac{e^{\frac{t-t_{αν}}{\tau}} - e^{-\frac{t-t_{αν}}{\tau}}}{e^{\frac{t-t_{αν}}{\tau}} + e^{-\frac{t-t_{αν}}{\tau}}}$$

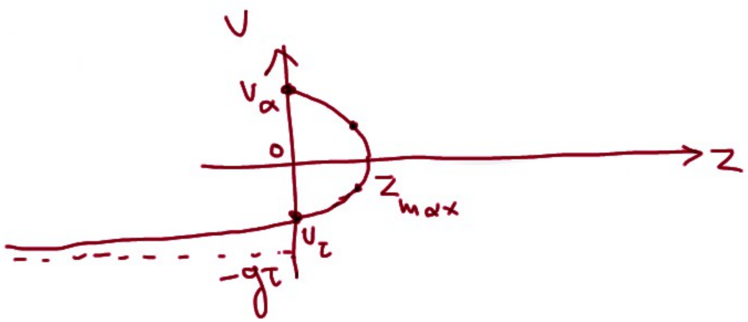


Σε $\frac{t-t_{αν}}{\tau}$ κάμποσες μονάδες, $v \simeq -g\tau$



$e^{-\xi}$

$$\frac{dv}{dz} = \frac{\frac{dv}{dt}}{\frac{dz}{dt}} = \frac{\alpha}{v}$$



Αδιαστατικοποίηση εξισώσεων

$$m\underbrace{\dot{v}}_{a} = -mg - \frac{m|v|v}{g\tau^2} \quad (*)$$

Μετρώ μάζες σε m.

Μετρώ επιτάχυνση σε g δηλ. γράφω $\alpha = g\alpha'$ (α' είναι αδιάστατο)

Μετρώ χρόνους σε τ δηλ γράφω $t = \tau t'$

Μετρώ ταχύτητα σε $g\tau$ δηλ. γράφω $v = g\tau v'$

Μετρώ μήκος σε $g\tau^2$ δηλ. γράφω $z = g\tau^2 z'$.

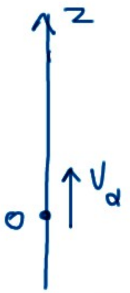
Τότε η (*) γίνεται $\cancel{m}\cancel{g}\alpha' = -\cancel{m}\cancel{g} - \frac{\cancel{m}\, g^{\cancel{2}}\tau^{\cancel{2}}|v'|v'}{\cancel{g}\cancel{\tau^2}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha' = -1 - |v'|v'$

Διώχνοντας τα τόνους $\alpha = -1 - |v|v$ δηλ. την (*) με $m=1$, $g=1$, $\tau=1$

Κατακόρυφη κίνηση υπό την επίδραση του βάρους και αντίστασης ανάλογης της ταχύτητος, $F_{αντ} = mkv$.

Λύση:



$$m\bar{\alpha} = m\bar{g} - mk\cancel{|\bar{v}|}\frac{\bar{v}}{\cancel{|\bar{v}|}} \Leftrightarrow \bar{\alpha} = \bar{g} - k\bar{v} \quad (*)$$

$$\bar{r} = z\hat{z}, \quad \bar{v} = v\hat{z} = \dot{z}\hat{z}, \quad \bar{\alpha} = \dot{v}\hat{z} = \ddot{z}\hat{z}, \quad \bar{g} = -g\hat{z}$$

$$(*) \rightarrow \ddot{z} = -g - k\dot{z} \quad (\text{ή} \quad \dot{v} = -g - kv \quad \text{και} \quad \dot{z} = v)$$

$\ddot{z} + k\dot{z} = -g$ μη ομογενής γραμμική διαφορική με σταθερούς συντελεστές.

$z = z_{ομ} + z_{μερ}$. Λύση ομογενούς ($\ddot{z}_{ομ} + k\dot{z}_{ομ} = 0$) της μορφής $z_{ομ} = e^{\lambda t}$

Αντικαθιστώ $\dot{z}_{ομ} = \lambda e^{\lambda t}$ και $\ddot{z}_{ομ} = \lambda^2 e^{\lambda t}$ και έχω $\lambda^2 + k\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ ή $-k$

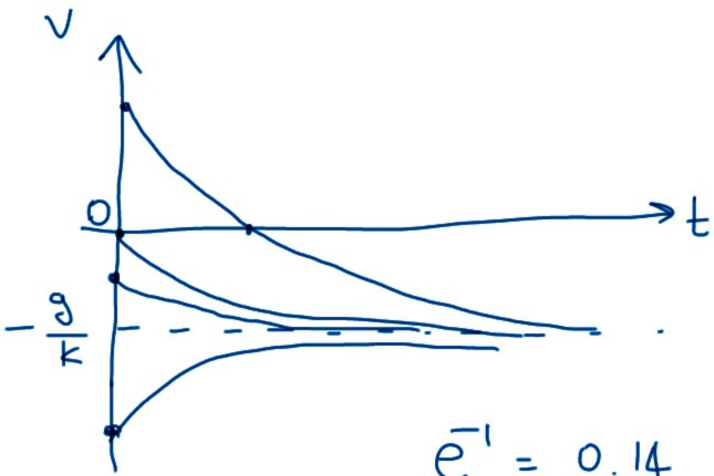
$z_{ομ} = C_1 + C_2 e^{-kt}$.

Μερική λύση $z_{μερ} = At$ με την αντικατάσταση να δίνει $0 + kA = -g \Leftrightarrow A = -\frac{g}{k}$

Δηλ. γενική λύση $z = C_1 + C_2 e^{-kt} - \frac{g}{k}t$, $v = \dot{z} = -C_2 k e^{-kt} - \frac{g}{k}$

Αρχικά $\dot{z}|_{t=0} = v_α \Leftrightarrow -C_2 k - \frac{g}{k} = v_α \Leftrightarrow C_2 = -\frac{kv_α + g}{k^2}$, $z|_{t=0} = 0 \Leftrightarrow C_1 = \frac{kv_α + g}{k^2}$.

$$z = \frac{k v_\alpha + g}{k^2}\left(1 - e^{-kt}\right) - \frac{g}{k}t \quad , \quad v = \frac{k v_\alpha + g}{k} e^{-kt} \underbrace{- \frac{g}{k}}_{\text{οριακή ταχύτητα}}$$



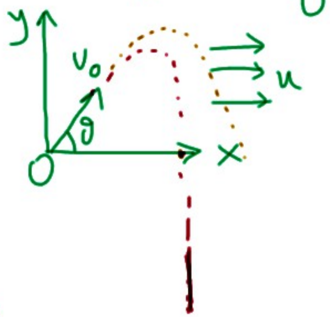
$$\dot{v} = -g - kv$$

Για $t \to \infty$, $v \to -\frac{g}{k}$

$e^{-1} = 0.14$, $e^{-3} = 0{,}05$, $e^{-5} = 0.007$

Για $\cancel{e^{-kt}}$ $kt \approx 5$, $e^{-kt} \approx 0$ δηλ. η υ είναι πρακτικά η οριακή

Πλάγια βολή υπό αντίσταση $-mk\bar{v}_{σχ} = -mk(\bar{v}-\bar{u})$ και $\bar{u} = u\hat{x}$



<u>Λύση:</u> $\cancel{m}\bar{\alpha} = \cancel{m}\bar{g} - \cancel{m}k(\bar{v}-\bar{u}) \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{x}: \ \ddot{x} = -k(\dot{x}-u) & (1) \\ \hat{y}: \ \ddot{y} = -g-k\dot{y} & (2) \end{cases}$

Όμοια με πριν

$$x = ut + \frac{v_{0x}-u}{k}\left(1-e^{-kt}\right) \quad (3) \qquad v_x = u + (v_{0x}-u)e^{-kt}$$

$$y = \frac{g+v_{0y}k}{k^2}\left(1-e^{-kt}\right) - \frac{g}{k}t \quad (4) \qquad v_y = -\frac{g}{k} + \frac{g+v_{0y}k}{k}e^{-kt}$$

- - - - - - - - - -

Έστω $u=0$. Βεληνεκές: $y_\beta = 0 \overset{(4)}{\Leftrightarrow} \frac{g+v_{0y}k}{k}\left(1-e^{-kt_\beta}\right) = g\,t_\beta$

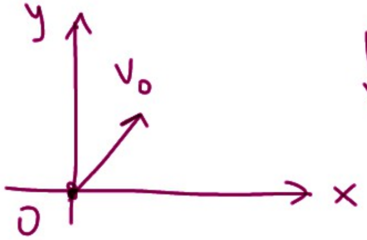
και $x_\beta = \frac{v_{0x}}{k}\left(1-e^{-kt_\beta}\right)$ ή ισοδύναμα $t_\beta = -\frac{1}{k}\ln\left(1-\frac{kx_\beta}{v_{0x}}\right)$ και

$$\frac{g+v_{0y}k}{v_{0x}}x_\beta + \frac{g}{k}\ln\left(1-\frac{kx_\beta}{v_{0x}}\right) = 0$$

Εξίσωση τροχιάς (για $u=0$) Απαλείφω το t στις (3), (4) $\rightarrow$

$$y = \frac{g+kv_{0y}}{kv_{0x}}x + \frac{g}{k^2}\ln\left(1-\frac{kx}{v_{0x}}\right).$$

Διαταρακτική μέθοδος για "μικρό" k :



$\downarrow \bar{g}$ $(u=0)$ $\qquad \cancel{m}\bar{\alpha} = \cancel{m}\bar{g} - \cancel{m}k\bar{v}$ (*)

"Αναπτύσσω" την λύση $\qquad \vec{r} = \bar{r}^{(0)} + \bar{r}^{(1)} + \dots$

$$\bar{v} = \bar{v}^{(0)} + \bar{v}^{(1)} + \dots$$

$$\bar{\alpha} = \bar{\alpha}^{(0)} + \bar{\alpha}^{(1)} + \dots$$

(*) $\dot{\bar{v}}^{(0)} + \dot{\bar{v}}^{(1)} + \dots = \bar{g} - k\left(\bar{v}^{(0)} + \bar{v}^{(1)} + \dots\right)$ (**)

Σε μηδενική τάξη : $\dot{\bar{v}}^{(0)} = \bar{g} \Leftrightarrow \bar{v}^{(0)} = \bar{v}_0 + \bar{g}t$, $\bar{r}^{(0)} = \bar{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$

Κρατώντας μέχρι 1ης τάξης όρους στην (**) :

$\dot{\bar{v}}^{(0)} + \dot{\bar{v}}^{(1)} = \bar{g} - k\bar{v}^{(0)} \Leftrightarrow \cancel{\bar{g}} + \dot{\bar{v}}^{(1)} = \cancel{\bar{g}} - k(\bar{v}_0 + \bar{g}t) \Leftrightarrow$

$\bar{v}^{(1)} = -k\bar{v}_0 t - k\bar{g}t^2/2 + \cancel{\bar{c}}^{\,0}$ ώστε η διαταραχή να μηδενίζεται για $t=0$.

$\bar{r}^{(1)} = -k\bar{v}_0 t^2/2 - k\bar{g}t^3/6 + \cancel{\bar{D}}^{\,0}$.

Δηλ. βρίσκω $\boxed{\bar{r} = \bar{v}_0 t + \frac{1}{2}\bar{g}t^2 - k\bar{v}_0 t^2/2 - k\bar{g}t^3/6}$

$$\left.\begin{aligned} x &= v_{0x} t - \frac{k}{2} v_{0x} t^2 \\ y &= v_{0y} t - g t^2/2 - \frac{k}{2} v_{0y} t^2 + \frac{k}{6} g t^3 \end{aligned}\right\}$$

Βεληνεκές: $y=0 \Leftrightarrow t = t^{(0)} + t^{(1)} + \ldots$

Σε μηδενική τάξη $\quad 0 = v_{0y} t^{(0)} - \frac{g\left[t^{(0)} + \cancel{t^{(1)}}\right]^2}{2} \Leftrightarrow t^{(0)} = \frac{2 v_{0y}}{g}$

Κρατώντας μέχρι 1ης τάξης όρους:

$$0 = v_{0y}\left[t^{(0)} + t^{(1)}\right] - \frac{g}{2}\left[t^{(0)2} + \cancel{t^{(1)2}} + 2 t^{(0)} t^{(1)}\right] - \frac{k}{2} v_{0y} t^{(0)2} + \frac{k}{6} g\, t^{(0)3}$$

$$\Leftrightarrow t^{(1)} = -\frac{2 k v_{0y}^2}{3 g^2} \qquad \text{Άρα} \quad t \approx \frac{2 v_{0y}}{g}\left(1 - \frac{k v_{0y}}{3g}\right).$$

$$x_\beta = v_{0x}\left[t^{(0)} + t^{(1)}\right] - \frac{k}{2} v_{0x} t^{(0)2} = \frac{2 v_{0x} v_{0y}}{g}\left(1 - \frac{4 k v_{0y}}{3g}\right).$$