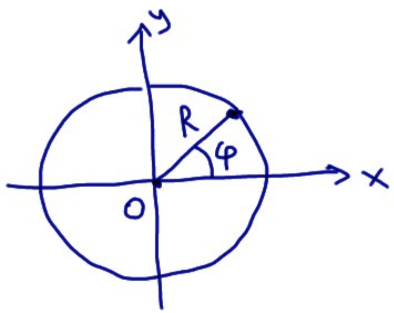
Κυκλική κίνηση



Σε πολικές $\varpi = R$, $\varphi = \varphi(t)$, $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$, $\vec{\omega} = \omega \hat{z}$

$$\vec{v} = R\dot{\varphi}\hat{\varphi} = R\omega\hat{\varphi} = \bar{\omega} \times \bar{r}$$

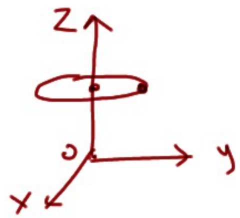
$$\bar{\alpha} = (\cancel{\ddot{\varpi}} - \varpi\dot{\varphi}^2)\hat{\varpi} + (\cancel{2\dot{\varpi}\dot{\varphi}} + \varpi\ddot{\varphi})\hat{\varphi}$$

$$\Leftrightarrow \quad \bar{\alpha} = \underbrace{-R\dot{\varphi}^2\hat{\varpi}}_{\text{κεντρομόλος}} + \underbrace{R\ddot{\varphi}\hat{\varphi}}_{\text{επιτρόχια}}$$

$$\alpha_\kappa = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$$

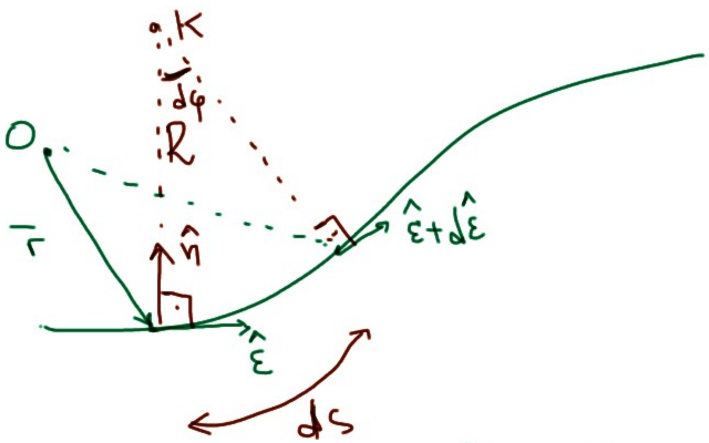
$$\bar{\alpha} = \frac{d}{dt}(\bar{\omega} \times \bar{r}) = \bar{\omega} \times \underbrace{\frac{d\bar{r}}{dt}}_{\bar{v} = \bar{\omega}\times\bar{r}} + \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} = \underbrace{\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})}_{\text{κεντρομόλος}} + \underbrace{\frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r}}_{\text{επιτρόχια}}$$

Οι τύποι $\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}$, $\bar{\alpha} = \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) + \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r}$ ισχύουν και σε κύκλο σε επίπεδο $z = \text{σταθ}$, με κέντρο σημείο του άξονα $\hat{z}$.



$$(\bar{r} = R\hat{\varpi} + \underbrace{z\hat{z}})$$

Επιτρόχια – κεντρομόλος



Τροχιά σημείου $\bar{r}(t)$

ή $\bar{r} = \bar{r}(s)$ όπου s = μήκος τροχιάς

$$\left(ds = |d\bar{r}| = \sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2} \right)$$

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \underbrace{\frac{d\bar{r}}{ds}}_{\text{μοναδιαίο } \hat{\varepsilon}} \frac{ds}{dt}$$

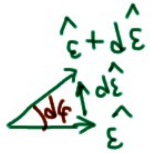
$\frac{ds}{dt} \to v$ = μέτρο ταχύτητας

Δηλ. $\boxed{\bar{v} = v\,\hat{\varepsilon}}$

$$\frac{d\hat{\varepsilon}}{ds} \perp \hat{\varepsilon}$$

$$\left(\hat{\varepsilon}\cdot\hat{\varepsilon} = 1 \text{ παραγωγίζω} \to \frac{d\hat{\varepsilon}}{ds} \perp \hat{\varepsilon} \right)$$

$$\frac{d\hat{\varepsilon}}{ds} = k\,\hat{n}$$



$$|d\hat{\varepsilon}| = d\varphi$$

$$\frac{|d\hat{\varepsilon}|}{ds} = k \Leftrightarrow k = \frac{d\varphi}{ds} \Leftrightarrow ds = \frac{1}{k}\,d\varphi$$

$\frac{1}{k} \to \frac{1}{R}$

Δηλ. k = καμπυλότητα

$R = \frac{1}{k}$ = ακτίνα καμπυλότητας

$$\frac{d\hat{\varepsilon}}{ds} = \frac{1}{R}\hat{n}$$

$$\boxed{\bar{v} = v\,\hat{\varepsilon}}$$

$$\bar{\alpha} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \dot{v}\,\hat{\varepsilon} + v\underbrace{\dot{\hat{\varepsilon}}}_{\frac{d\hat{\varepsilon}}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{1}{R}\hat{n}\,v} \Longrightarrow \boxed{\bar{\alpha} = \underbrace{\dot{v}\,\hat{\varepsilon}}_{\text{επιτρόχια}} + \underbrace{\frac{v^2}{R}\hat{n}}_{\text{κεντρομόλος}}}$$

$$\left(R = \frac{v^3}{|\bar{v}\times\bar{\alpha}|} \quad \text{διότι} \quad |\bar{v}\times\bar{\alpha}| = \left|\bar{v}\times\left(\dot{v}\,\hat{\varepsilon} + \frac{v^2}{R}\hat{n}\right)\right| = \left|\frac{v^3}{R}\hat{\varepsilon}\times\hat{n}\right| = \frac{v^3}{R} \right)$$

Άσκηση: Σε επίπεδη τροχιά τα $|\bar{\upsilon}|$, $|\bar{\alpha}|$ είναι σταθερά. Δείξτε ότι είναι κυκλική.

Απόδειξη:

διότι $|\bar{\upsilon}| =$ σταθ

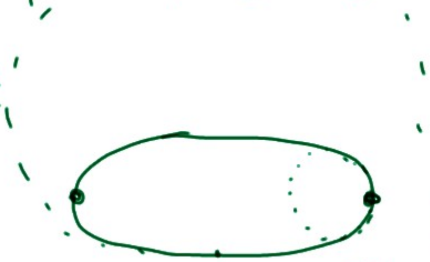
$$|\bar{\alpha}| = \left| \cancel{\dot{\upsilon}\hat{\varepsilon}} + \frac{\upsilon^2}{R}\hat{n} \right| = \frac{\upsilon^2}{R} \Leftrightarrow R = \frac{\upsilon^2}{\alpha} = \text{σταθ} \longrightarrow \text{κύκλος.}$$

(Αλλιώς: $\left.\begin{array}{l} \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \upsilon^2 = \text{σταθ} \\ \ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 = \alpha^2 = \text{σταθ} \end{array}\right\} \Rightarrow \dots \Leftrightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$)

πολύ πιο δύσκολο

Άσκηση: Κίνηση σε έλλειψη με $|\bar{\upsilon}| =$ σταθ. Σε ποια σημεία το $|\bar{\alpha}|$ μέγιστο;

Λύση:

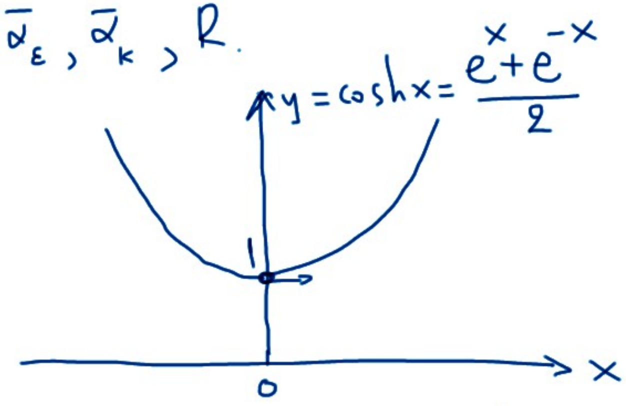


$$|\bar{\alpha}| = \left| \cancel{\dot{\upsilon}\hat{\varepsilon}} + \frac{\upsilon^2}{R}\hat{n} \right| = \frac{\upsilon^2}{R}$$

$|\alpha|$ μέγιστο όπου R ελάχιστο.

Δηλ. στα σημεία του μεγάλου άξονα.

Άσκηση: Δαχτυλίδι κινείται σε οριζόντιο σύρμα σχήματος $y=\cosh x$, με ταχύτητα σταθερού μέτρου $υ=1$. Για $t=0$ είναι $x=0$ και $\dot x>0$. Να βρεθούν σε κάθε χρόνο τα $x, y, \hat{ε}, \bar{υ}, \bar{α}, \hat{n}, \bar{α}_ε, \bar{α}_κ, R$.



Λύση:

Καρτεσιανές $\bar{r} = x\hat{x} + y\hat{y} = x\,\hat{x} + \cosh x\,\hat{y}$

$$\bar{υ} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}}{dx}\,\dot{x} = (\hat{x} + \sinh x\,\hat{y})\,\dot{x}$$

(ή $\bar{υ} = \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y}$ με $\dot{y} = \frac{dy}{dx}\dot{x} = \sinh x\ \dot{x}$)

$$|\bar{υ}|=1 \Leftrightarrow \sqrt{1+\sinh^2 x}\ |\dot{x}| = 1 \xLeftrightarrow[\cosh^2-\sinh^2=1]{\dot{x}>0} \cosh x\ \dot{x} = 1 \Leftrightarrow \int_0^x \cosh x\ dx = \int_0^t dt \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [\sinh x]_0^x = t \Leftrightarrow \sinh x = t \Leftrightarrow x = \text{arcsinh}\, t = \ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)$$

$$y = \cosh x = \sqrt{1+\sinh^2 x} = \sqrt{1+t^2}$$

$$\hat{ε} = \frac{\bar{υ}}{|\bar{υ}|} = \frac{\hat{x}+\sinh x\,\hat{y}}{\cosh x} = \frac{\hat{x}+t\,\hat{x}}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \bar{υ} = \frac{\hat{x}+t\,\hat{x}}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$\bar{\alpha} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\hat{x} + t\hat{y}}{\sqrt{1+t^2}}\right) = -\frac{t}{(1+t^2)^{3/2}}\hat{x} + \frac{1}{(1+t^2)^{3/2}}\hat{y}$$

$$\alpha_\varepsilon = \dot{v} = 0 \qquad (\bar{\alpha}_\varepsilon = \dot{v}\hat{\varepsilon})$$

$$\bar{\alpha}_\kappa = \bar{\alpha} - \bar{\alpha}_\varepsilon = \frac{-t\hat{x} + \hat{y}}{(1+t^2)^{3/2}}$$

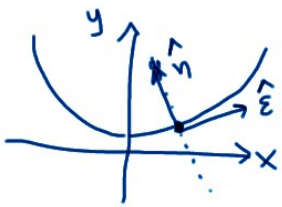
$$\hat{n} = \frac{\bar{\alpha}_\kappa}{|\bar{\alpha}_\kappa|} = \frac{-t\hat{x} + \hat{y}}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$\bar{\alpha}_\kappa = \frac{v^2}{R}\hat{n} \Longrightarrow R = \frac{v^2}{|\bar{\alpha}_\kappa|} = 1 + t^2 .$$

(Β' τρόπος: $\frac{d\hat{\varepsilon}}{\underbrace{ds}_{v\,dt}} = \frac{\hat{n}}{R}$ με $\hat{\varepsilon} = \frac{\hat{x} + t\hat{y}}{\sqrt{1+t^2}}$ δηλ. $\frac{1}{R} = \left|\frac{d\hat{\varepsilon}}{v\,dt}\right|$

και $\hat{n} = \frac{d\hat{\varepsilon}}{dt} \Big/ \left|\frac{d\hat{\varepsilon}}{dt}\right|$

Μετά $\bar{\alpha}_\kappa = (\bar{\alpha}\cdot\hat{n})\hat{n}$, $\bar{\alpha}_\varepsilon = (\bar{\alpha}\cdot\hat{\varepsilon})\hat{\varepsilon}$)

(Γ' τρόπος : 

από το σχήμα $\hat{n} = \hat{z} \times \hat{\varepsilon}$.)

Νόμοι Νεύτωνα:

1ος: ένα σώμα παραμένει σε ηρεμία ή σε κίνηση με σταθερή ορμή $\bar{p}$ εκτός αν ασκείται πάνω του δύναμη.

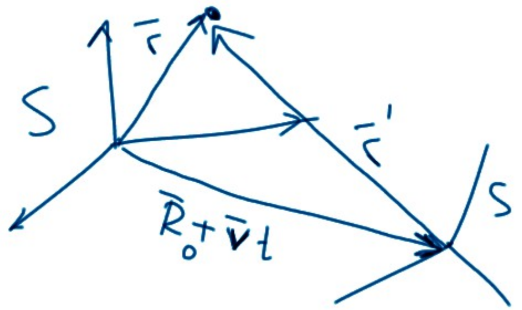
2ος: αν ασκείται δύναμη $\bar{F}$ τότε το σώμα κινείται με τρόπο ώστε

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = \bar{F}$$

3ος: αν δύο σώματα ασκούν δύναμη το ένα στο άλλο, με διεύθυνση την ευθεία που τα ενώνει, οι δυνάμεις είναι αντίθετες, δηλ. $\bar{F}_{21} = -\bar{F}_{12}$.

Σχόλια για τον 1ο νόμο:

- έννοια δύναμης
- μιλά για το "ελεύθερο σώμα"
- εισάγει την έννοια του αδρανειακού συστήματος αναφοράς



$$\bar r = \bar r' + \bar R_0 + \bar v t \Rightarrow$$

$$\bar u = \bar u' + \bar v \Rightarrow \bar \alpha = \bar \alpha'$$

αν $\bar v =$ σταθ τότε και $\bar u' =$ σταθ

- δύσκολο να κρίνουμε αν ένα σύστημα είναι αδρανειακό.

– Η Γη περιστρέφεται με $\omega = \frac{2\pi}{1\,\text{ημέρα}} = \frac{2\pi}{24\cdot 3600}\,\frac{rad}{s} = 0.73\cdot 10^{-4}\,\frac{rad}{s}$

$\varphi \approx 38^\circ$ $\quad a = \omega^2 R_\oplus \cos\varphi = 0.027\,\frac{m}{s^2}$ $\quad \left(R_\oplus = 6.4\cdot 10^6\,m\right)$

– Η Γη περιφέρεται γύρω από τον Ήλιο με $\omega = \frac{2\pi}{1\,\text{έτος}}$

και ακτίνα $r = 1.5\cdot 10^{11}\,m$ οπότε $a = \omega^2 r = 6\cdot 10^{-3}\,\frac{m}{s^2}$

Σχόλια για τον 2° νόμο Νεύτωνα

- δεν είναι ορισμός της $\bar{F}$
- αν $m=$σταθ τότε $\frac{d\bar{p}}{dt} = m\frac{d\bar{v}}{dt} = m\bar{\alpha}$ και $m\bar{\alpha} = \bar{F}$

Γενικά όμως $m \neq$ σταθ.

π.χ. πύραυλος   χρόνος t χρόνος $t+dt$

$$\bar{F} = \frac{(m+dm)(\bar{v}+d\bar{v}) + |dm|\,\bar{u} - m\bar{v}}{dt} = \frac{m\,d\bar{v} + dm\,\bar{v} - dm\,\bar{u}}{dt} = m\frac{d\bar{v}}{dt} - \underbrace{(\bar{u}-\bar{v})}_{\bar{u}_{σχ}}\frac{dm}{dt}$$

- εισάγει την μάζα αδράνειας
  (είναι ίση με την μάζα βαρύτητας
  αξίωμα στην ΓΘΣ).

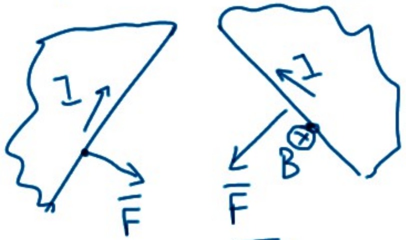
Σχόλια για τον 3^o νόμο Νεύτωνα:

- Οι δυνάμεις ασκούνται σε διαφορετικά σώματα.
  Χρήσιμος για συστήματα.
- συνολική $F = 0$ άρα ένα σύστημα δεν ασκεί δύναμη στον εαυτό του.
- Ισχύει μόνο για κεντρικές δυνάμεις
- συνεπάγεται διατήρηση ορμής κλειστών συστημάτων

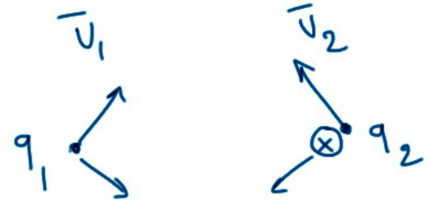
$$\left(\frac{d}{dt}\left(\bar{p}_1 + \bar{p}_2\right) = \bar{F}_{12} + \bar{F}_{21} = 0 \right)$$

Αυτή η αρχή είναι γενικότερη.

- π.χ. ΗΜ



$$\bar{F}_{\text{ολική}\,12} = -\bar{F}_{\text{ολική}\,21}$$



$$\bar{p}_1 + \bar{p}_2 + \bar{p}_{\text{πεδίου}} = \text{σταθ}$$

- κρούσεις, τάση νήματος, ελατήριο, τριβή : ισχύει ο $3^{ος}$ νόμος