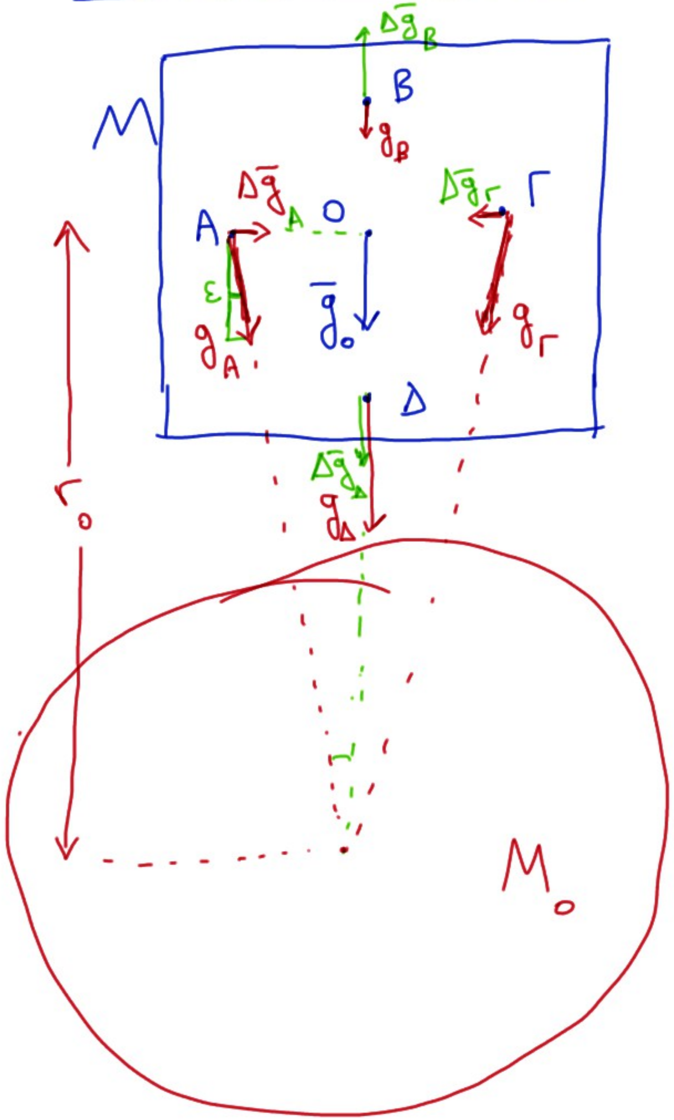
# Παλιρροϊκές δυνάμεις




$$m_A \bar{\alpha} = m_A \bar{g} - m_A \bar{\alpha}_0 \quad (*)$$

$M \bar{\alpha}_0 = \sum m_i \bar{g}_i = M \bar{g}_0$ για ομογενές πεδίο

δηλ. $\bar{\alpha}_0 = \bar{g}_0$ και $(*) \rightarrow \bar{\alpha} = 0$

Αν το πεδίο ανομοιογενές τότε

η κίνηση καθορίζεται από το $\bar{\alpha} = \bar{g} - \bar{g}_0 = \Delta \bar{g} = \bar{g}_{\pi\alpha\lambda}$

$$g_0 = \frac{GM_0}{r_0^2}, \quad \frac{\Delta g_A}{g_A} = \frac{r}{\sqrt{r_0^2 + r^2}} \Rightarrow \Delta g_A = \frac{GM_0 r}{r_0^3}$$

$$g_B = \frac{GM_0}{(r_0+r)^2} = \frac{GM_0}{r_0^2}\left(1+\frac{r}{r_0}\right)^{-2} = \frac{GM_0}{r_0^2}\left(1-2\frac{r}{r_0}\right) = g_0 - \underbrace{\frac{2GM_0 r}{r_0^3}}_{\Delta g = g_{\pi\alpha\lambda}}$$

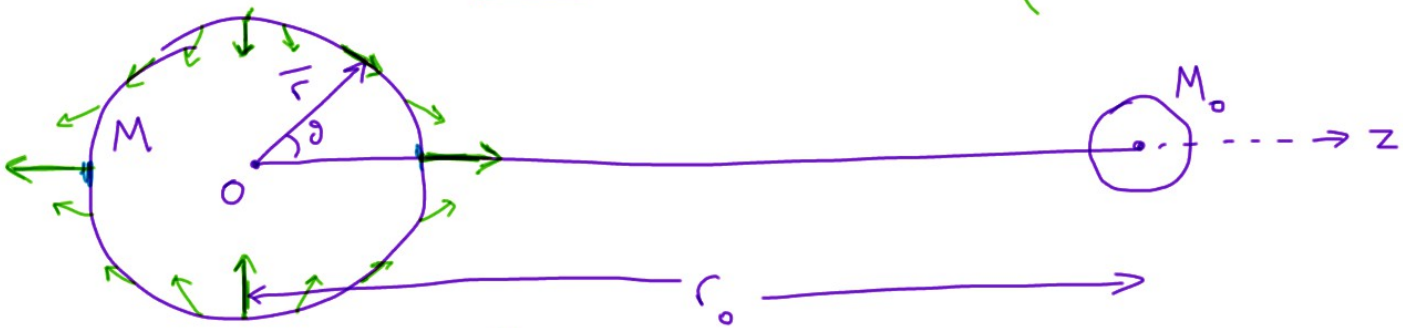
$$g_\Delta = \frac{GM_0}{(r_0-r)^2} = g_0 + \underbrace{\frac{2GM_0 r}{r_0^3}}_{\Delta g = g_{\pi\alpha\lambda}}$$

Όμοια για τον ISS


$\alpha_o = g_o$

Θέμα 3δ, 17/2/2020

Η κίνηση των μαζών στο σύστημα του Μ, το οποίο κινείται στο πεδίο βαρύτητας του $M_o$, καθορίζεται από το $\bar{g}_{παλ} = \Delta\bar{g} = \bar{g} - \bar{g}_o$ όπου $\bar{g}_o$ η ένταση του πεδίου βαρύτητας που δημιουργεί το $M_o$ στο κέντρο βάρους του Μ. και $\bar{g}$ η ένταση στη θέση της μάζας.

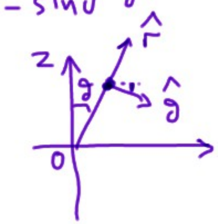



$\leftarrow$ πεδίο Σελήνης $(M_0)$

$$\bar g = -\frac{G M_0 (\bar r - \bar r_\Sigma)}{|\bar r - \bar r_\Sigma|^3}$$

$$\bar r_\Sigma = r_0 \hat z, \quad \hat z = (\hat z \cdot \hat r)\hat r + (\hat z \cdot \hat \vartheta)\hat\vartheta + (\hat z \cdot \hat\varphi)\hat\varphi = \cos\vartheta\, \hat r - \sin\vartheta\, \hat\vartheta$$

$$|\bar r - \bar r_\Sigma| = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2\, \bar r \cdot r_0 \hat z}$$




$$= -\frac{G M_0 \left(r\hat r - r_0 \cos\vartheta\, \hat r + r_0 \sin\vartheta\, \hat\vartheta\right)}{r_0^3 \left(1 - 2\frac{r}{r_0}\cos\vartheta + \frac{r^2}{r_0^2}\right)^{3/2}} =$$

$$= -\frac{G M_0}{r_0^2}\left(\frac{r}{r_0}\hat r - \cos\vartheta\, \hat r + \sin\vartheta\, \hat\vartheta\right)\left(1 - 2\frac{r}{r_0}\cos\vartheta + \cancel{\frac{r^2}{r_0^2}}\right)^{-3/2} \approx -\frac{G M_0}{r_0^2}\left(\frac{r}{r_0}\hat r - \cos\vartheta\, \hat r + \sin\vartheta\, \hat\vartheta\right)\left(1 + 3\frac{r}{r_0}\cos\vartheta\right)$$

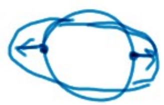
$$\Leftrightarrow \bar g = \underbrace{\frac{G M_0}{r_0^2}\overbrace{\left(\cos\vartheta\, \hat r - \sin\vartheta\, \hat\vartheta\right)}^{\hat z}}_{\bar g_0} + \underbrace{\frac{2 G M_0 r}{r_0^3}\left(\frac{3\cos^2\vartheta - 1}{2}\hat r - \frac{3}{2}\sin\vartheta\cos\vartheta\, \hat\vartheta\right)}_{\Delta \bar g = \bar g_{\pi\alpha\lambda}.}$$

$$\frac{g_{\pi\alpha\lambda}}{g_{\gamma\eta\varsigma}} = \frac{\dfrac{2GM_o r}{r_o^3}}{\dfrac{GM}{r^2}} = 2\frac{M_o}{M}\left(\frac{r}{r_o}\right)^3 = 2\cdot 5.6\cdot 10^{-8}$$

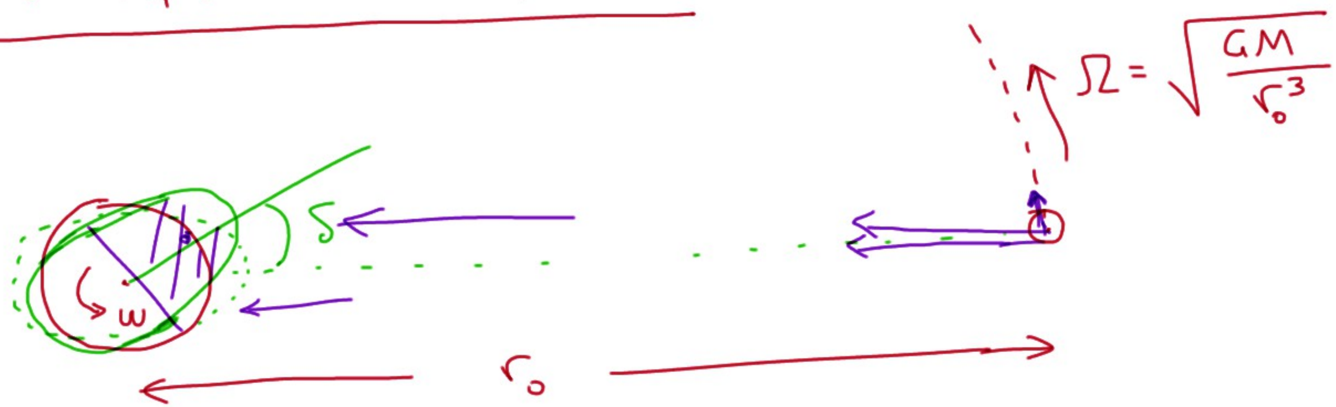
$$\frac{M_o}{M} = \frac{M_{\Sigma\varepsilon\lambda\acute{\eta}\nu\eta\varsigma}}{M_{\gamma\eta\varsigma}} = \frac{1}{81.3}, \quad \frac{r}{r_o} = \frac{1}{60.3}$$

Όμοια για τον Ήλιο, $\dfrac{M_\odot}{M} = \dfrac{M_{\text{Ήλιος}}}{M_{\gamma\eta\varsigma}} = 3.3\cdot 10^{5}$, $\dfrac{r}{\text{απόσταση Γης-Ηλίου}} = 4.26\cdot 10^{-5}$

και $\left[\dfrac{M_\odot}{M}\left(\dfrac{r}{r_o}\right)^3\right]_{\text{Ήλιο}} = 2.57\cdot 10^{-8}$



# Το σύστημα Γη – Σελήνη :



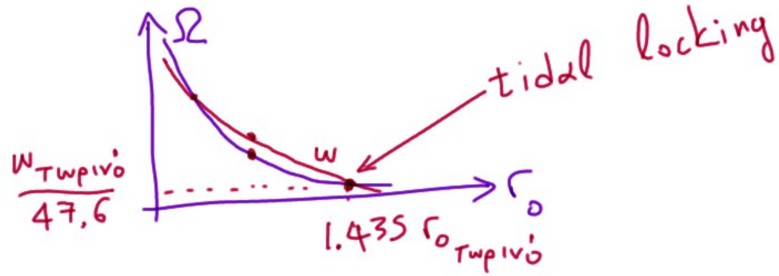

$\omega > \Omega \qquad \left.\Omega/\omega\right|_{\text{τώρα}} = 0.0365$

$L_{\text{Σελήνης}} = M_o r_o^2 \Omega = M_o \sqrt{G M r_o}$ αυξάνεται άρα $r_o \uparrow$

$L_{\text{Γης}} = I\omega \downarrow$ ώστε $L_{\text{Γης}} + L_{\text{Σελήνης}} = \text{σταθ.}$

$\Leftrightarrow \; I\omega + M_o \sqrt{G M r_o} = \text{σταθ}$

$M = 5.97 \cdot 10^{24}\ \text{kg}, \; I = 8 \cdot 10^{37}\ \text{kg m}^2, \; M_o = 7.35 \cdot 10^{22}\ \text{kg}$



# Όριο Roche

Σώμα μάζας $M$ πλησιάζει σώμα $M_o$.


Παλιρροϊκό πεδίο στο $M$ (από το $M_o$)

$$= \frac{2GM_oR_M}{r_o^3}$$

Το σώμα $M$ θα διαλυθεί αν $\frac{2GM_oR_M}{r_o^3} > \frac{GM}{R_M^2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{r_o}{R_M} < \left(\frac{2M_o}{M}\right)^{1/3}$$

Όριο Roche: $r_o = R_M\left(\frac{2M_o}{M}\right)^{1/3} = R_o\left(\frac{2\rho_o}{\rho}\right)^{1/3}$

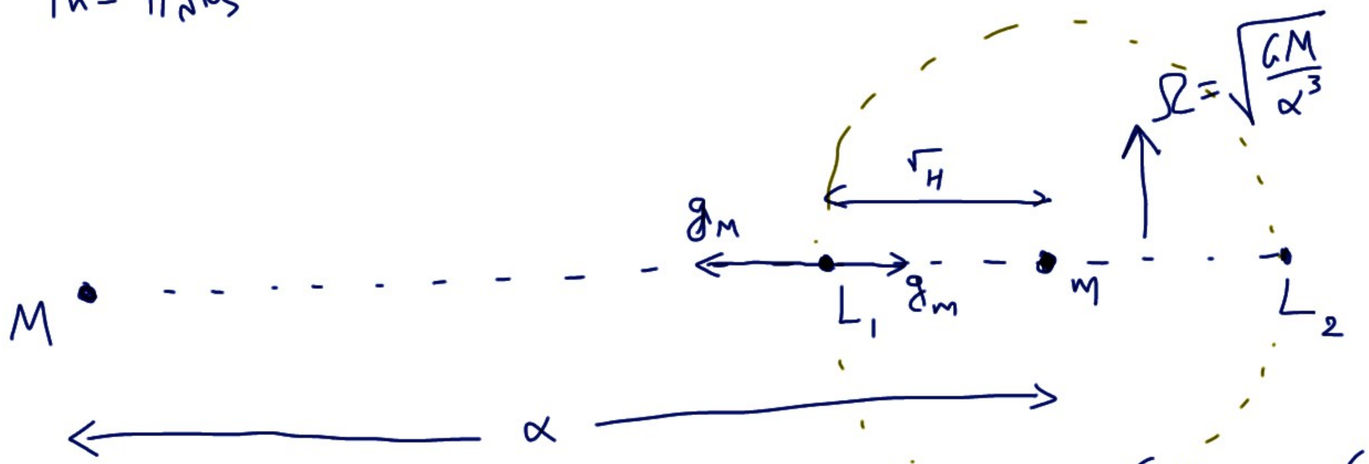
αν θέσουμε $\rho_o = \frac{M_o}{4\pi R_o^3/3}$ και $\rho = \frac{M}{4\pi R_M^3/3}$.

Το ίδιο στο σημείο Σ: $g_{παλ}/g_{ιδιοβ} = \frac{2GM_o r}{r_o^3} \Big/ \left(\frac{G\rho\, 4\pi r^3/3}{r^2}\right) = \frac{2\rho_o}{\rho}\left(\frac{R_o}{r_o}\right)^3$

## Σφαίρα Hill (ή σφαίρα Roche – διαφορετική απόσταση από το όριο Roche)

Η περιοχή γύρω από σώμα $m$ στην οποία η βαρύτητά του κυριαρχεί σε σύγκριση με ένα άλλο σώμα $M$.

π.χ. Γη – Ήλιος




$$\text{Στο } L_1: \quad g_M - g_m = \Omega^2(\alpha - r_H) \Leftrightarrow \frac{GM}{(\alpha - r_H)^2} - \frac{Gm}{r_H^2} = \frac{GM}{\alpha^3}(\alpha - r_H) \overset{r_H \ll \alpha}{\Longleftrightarrow}$$

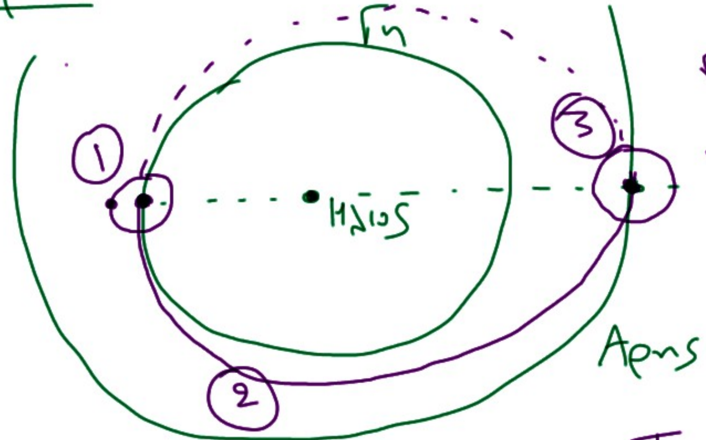
$$\Leftrightarrow \frac{GM}{\alpha^2}\underbrace{\left(1 - \frac{r_H}{\alpha}\right)^{-2}}_{1 + 2 r_H/\alpha} - \frac{GM}{r_H^2} = \frac{GM}{\alpha^2}\left(1 - \frac{r_H}{\alpha}\right) \Leftrightarrow r_H = \alpha\left(\frac{m}{3M}\right)^{1/3}$$

$$\text{Όμοια στο } L_2: \quad g_M + g_m = \Omega^2(\alpha + r_H) \Leftrightarrow \left(\frac{GM}{\alpha + r_H}\right)^2 + \frac{Gm}{r_H^2} = \frac{GM}{\alpha^3}(\alpha + r_H) \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow r_H = \alpha\left(m/3M\right)^{1/3}$$

Για τη Γη – Ήλιος $r_H/\alpha = 10^{-2}$.

# Διαπλανητικές τροχιές δορυφόρων

## Τροχιές Hohmann




$r_{γ} = 1$ AU

$r_{α} = 1.52$ AU

$α_T = \frac{r_α + r_γ}{2} = 1.26$ AU

$T_1 = 1$ yr

$T_2 = (1.52)^{3/2}$ yr $= 1.88$ yr $= 687$ μέρες

part (1) βαρύτητα Γης

part (2) βαρύτητα Ήλιου

part (3) βαρύτητα Άρη

## Βασικά μεγέθη

| | ελλειπτική | | υπερβολική |
|---|---|---|---|
| $r(φ)$ | | $α(1-ε^2)/(1+ε\cos φ)$ | |
| $υ$ | | $\sqrt{μ(2/r - 1/α)}$, $μ = GM$ | $\sqrt{υ_{esc}^2 + υ_\infty^2}$ |
| $α$ | $>0$ | | $<0$ $\quad -μ/υ_\infty^2$ |
| $ε$ | $<1$ | | $>1$ |
| $E$ | $<0$ | $-μ/2α$ | $>0$ |
| $r_{min}$ | | $α(1-ε)$ | |
| $r_{max}$ | $α(1+ε)$ | | $\infty$ |

Earth (185) → Mars (500)

ύψος σε km

$r_{dep} = 1\,AU$

$r_{tar} = 1.52\,AU$

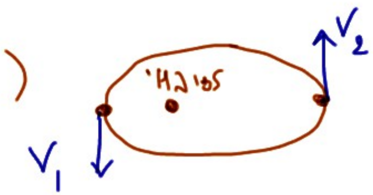
$\alpha_T = (r_{dep} + r_{tar})/2 = 1.26\,AU$

part (1)


$V_{dep} = \sqrt{\frac{\mu_{sun}}{r_{dep}}} = 29.785\ km/s$ ($V_{Γης}$ ως προς Ήλιο)

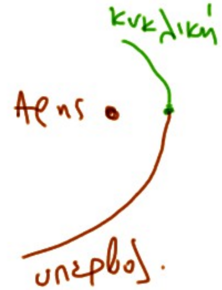
$V_{c_0} = \sqrt{\mu_{dep}/r_0} = 7.793\ km/s$ ($V_{κυκλικής\ τροχιάς}$ ως προς Γη)

part (2)




$\varepsilon_T = \frac{r_{tar} - r_{dep}}{r_{tar} + r_{dep}} = 0.208$

part (3)




$V_1 = \sqrt{\mu_{sun}\left(2/r_{dep} - 1/\alpha_T\right)} = 32.729\ km/s$

$V_2 = \sqrt{\mu_{sun}/\left(2/r_{tar} - 1/\alpha_T\right)} = 21.481\ km/s$

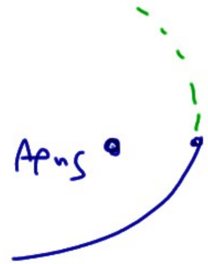
$V_{\infty,1} = |V_1 - V_{dep}| = 2.945\ km/s$ ασυμπτωτική ταχύτητα υπερβολικής τροχιάς ως προς τη Γη

$V_0 = \sqrt{2\mu_{dep}/r_0 + V_{\infty,1}^2} = 11.408\ \frac{km}{s}$ ταχύτητα στο περίκεντρο της υπερβολικής τροχιάς ως προς τη Γη

$V_0 - V_{c_0} = 3.615\ km/s$ = προσθήκη ταχύτητας ώστε η κυκλική να γίνει κατάλληλη υπερβολική

Για το μέρος 3:

$$V_{tar} = \sqrt{\mu_{sun}/r_{tar}} = 24.130 \text{ km/s}$$ ταχύτητα Άρη ως προς Ήλιο

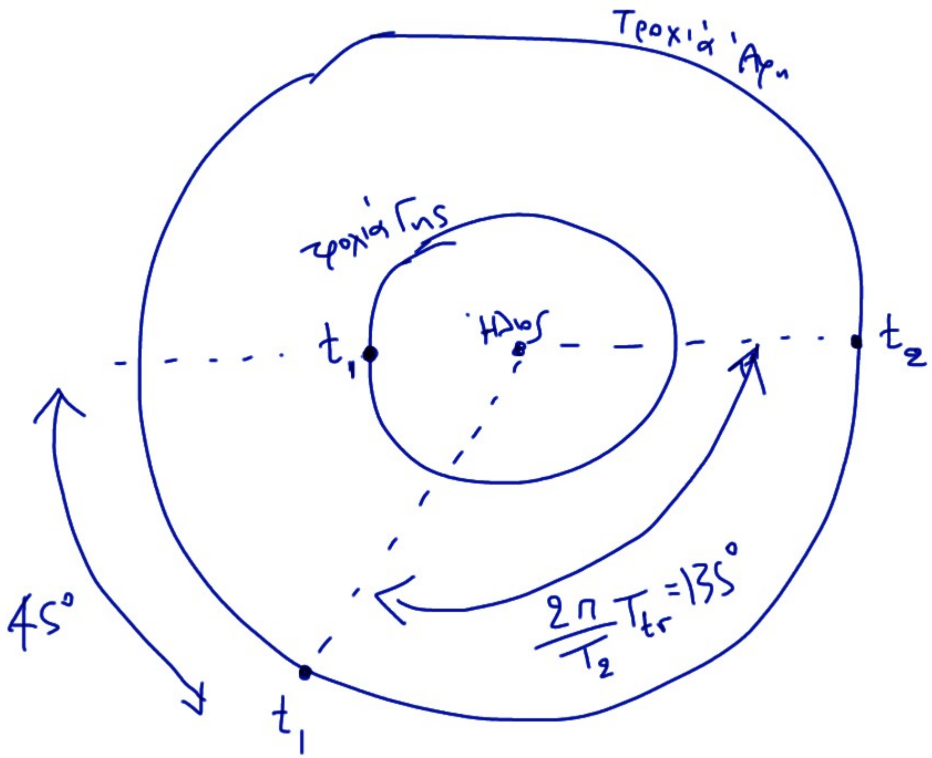



$$V_{\infty,2} = \left| V_2 - V_{tar} \right| = 2.649 \text{ km/s}$$

$$V_3 = \sqrt{2\mu_{tar}/r_3 + V_{\infty,2}^2} = 5.385 \text{ km/s}$$ = ταχύτητα στο περίκεντρο της υπερβολικής τροχιάς ως προς τον Άρη

$$V_{c_3} = \sqrt{\mu_{tar}/r_3} = 3.315 \text{ km/s}$$

$$V_3 - V_{c_3} = 2.070 \text{ km/s}.$$




$$t_2 = t_1 + T_{tr}$$

$$T_{tr} = \frac{T_T}{2} = \pi \sqrt{\alpha_T^3 / \mu_{sun}} = 0,709 \text{ yrs}$$

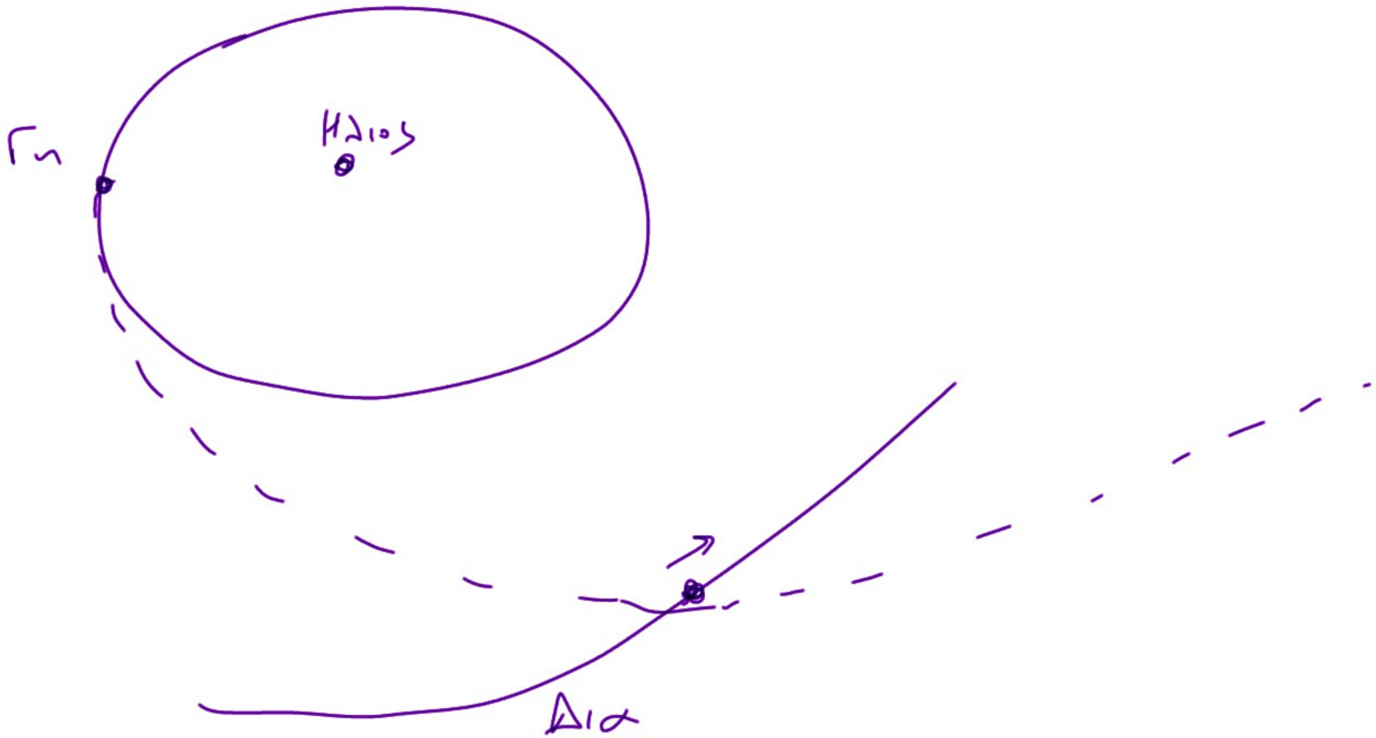
Τη στιγμή της προώθησης από τη Γη πρέπει ο Άρης να προηγείται της Γης 45°.

Αν αυτό συμβεί σε χρόνο $t_0$ μετά από πόσο χρόνο $T_{syn}$ θα ξανασυμβεί;

$$\frac{2\pi}{T_1} T_{syn} - \frac{2\pi}{T_2} T_{syn} = 2\pi \Leftrightarrow \frac{1}{T_{syn}} = \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \Leftrightarrow T_{syn} = \frac{1}{1 - \frac{1}{1.88}} \text{ yrs}$$

$$= 2,13 \text{ yrs.}$$

## Βαρυτική προώθηση :



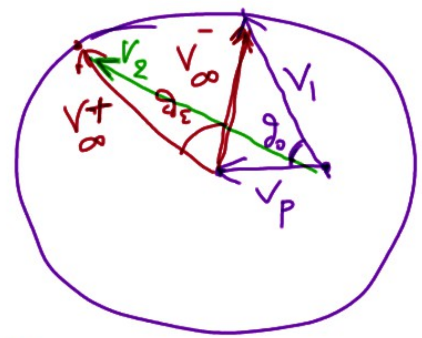
# Ηλιοκεντρικό



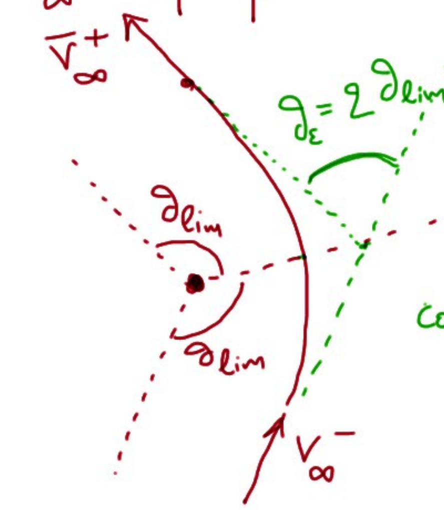
(όταν μπαίνει στη σφαίρα Hill)

$$\bar{V}_2 = \bar{V}_\infty^{+} + \bar{V}_p$$

# Στο σύστημα του πλανήτη



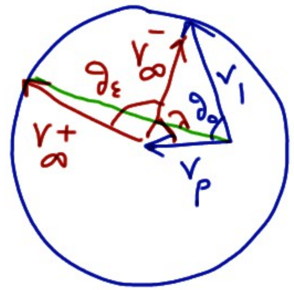

$$\vec{V}_\infty^{-} = \bar{V}_1 - \bar{V}_p$$




$$\theta_\varepsilon = 2\theta_{lim} - \pi$$

$$\cos\theta_{lim} = -\frac{1}{\varepsilon}$$

$$\bar{V}_\infty^- = \bar{V}_1 - \bar{V}_p \Longrightarrow V_\infty = \sqrt{V_1^2 + V_p^2 - 2V_1V_p\cos\theta_0}$$




$$\frac{\sin\lambda}{V_1} = \frac{\sin\theta_0}{V_\infty} \quad \text{ή} \quad V_1^2 = V_\infty^2 + V_p^2 - 2V_\infty V_p \cos\lambda$$

$$\Longleftrightarrow \cos\lambda = \frac{V_\infty^2 + V_p^2 - V_1^2}{2V_\infty V_p} = \frac{V_p - V_1\cos\theta_0}{V_\infty}$$

$$\bar{V}_2 = \bar{V}_\infty^+ + \bar{V}_p \Longrightarrow V_2^2 = V_\infty^2 + V_p^2 - 2V_\infty V_p \cos(\theta_\varepsilon + \lambda)$$

Για δεδομένα $V_1, V_p, \theta_0$ η $V_2$ γίνεται μέγιστη όταν $\theta_\varepsilon + \lambda = \pi$

Αν ξέρω το $r_\pi$ τότε $\varepsilon = 1 + \dfrac{r_\pi V_\infty^2}{\mu}$, $\theta_{lim} = \arccos\left(-\dfrac{1}{\varepsilon}\right)$, $\theta_\varepsilon = 2\theta_{lim} - \pi$

↓ τροχιάς του δορυφόρου ως προς τον πλανήτη

# Το παράδοξο του δορυφόρου

Θέμα 1, εξέταση 20/10/2011

(α) $$m\bar{\alpha} = -\frac{GM_\oplus m}{r^2}\hat{r} - \frac{1}{2}C_D S \rho v^2 \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|}$$

με $$\bar{\alpha} = \left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\varphi}\right)\hat{\varphi}$$

Στην $\hat{r}$ κατεύθυνση ισχύει προσεγγιστικά

$$m\left(\cancel{\ddot{r}} - r\dot{\varphi}^2\right) \simeq -\frac{GM_\oplus m}{r^2} - \cancel{\frac{1}{2}C_D S \rho v^2 \frac{\dot{r}}{|\bar{v}|}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \dot{\varphi} = \sqrt{\frac{GM_\oplus}{r^3}}$$

Όσο $r \downarrow$, $\dot{\varphi} \uparrow$, $v_\varphi = r\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{GM_\oplus}{r}} \uparrow$

Λύση παραδόξου: παρότι $W_{\text{αντίστασης}} < 0$ το έργο του βάρους $W_{mg} > 0$ και $W_{mg} + W_{\text{αντίστασης}} > 0$

(Το ίδιο από Virial: $2T+V \approx 0 \Leftrightarrow T = -(T+V)$

δηλ. $T = -E$ οπότε όσο $E\downarrow$ είναι $T\uparrow$.)

$\hat{\varphi}$ συνιστώσα του νόμου Νεύτωνα $\frac{dL}{dt} = N \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{d(mr^2\dot{\varphi})}{dt} = rF_\varphi \approx -r\frac{1}{2}C_D S\rho u^2$$ με $u \approx r\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{GM_\oplus}{r}}$

Αντικαθιστώντας $\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{GM_\oplus}{r^3}}$ βρίσκουμε $\frac{dr}{dt} = -\frac{C_D S\rho}{m}\sqrt{GM_\oplus r}$.

$\left(E \approx -\frac{GM_\oplus m}{2r}\right.$ και $\left. r\downarrow \Leftrightarrow E\downarrow \right)$


$u \approx \sqrt{\frac{GM}{r}} \downarrow$ όσο $r\uparrow$