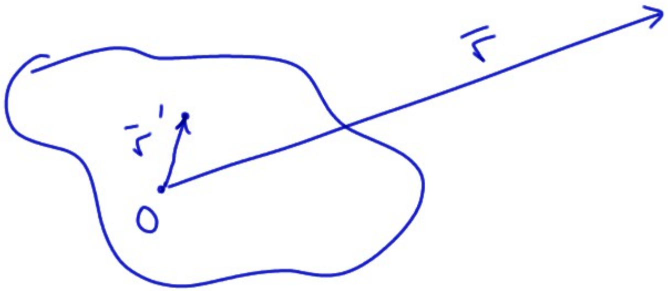
Πολυπολικό ανάπτυγμα:

$$\Phi = K \iiint \frac{\rho(\bar r')\, d^3\bar r'}{|\bar r - \bar r'|}$$ με $K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$, $\rho = \frac{dq}{d\tau}$ στα ηλεκτροστατικά

πεδία και $K = -G$, $\rho = \frac{dm}{d\tau}$ στα βαρυτικά.

Για $r > r'$, $$\frac{1}{|\bar r - \bar r'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2\,\bar r \cdot \bar r'}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r'^l}{r^{l+1}} P_l\left(\frac{\bar r' \cdot \bar r}{r' r}\right)$$



όπου $P_l(x)$ τα πολυώνυμα Legendre

$P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = \frac{3x^2 - 1}{2}$

Άρα σε αποστάσεις $r > r'$ ισχύει $$\Phi = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{K}{r^{l+1}} \iiint \rho(\bar r')\, r'^l\, P_l\left(\frac{\bar r' \cdot \bar r}{r' r}\right) d^3\bar r'$$

Για $l = 0$: $$\Phi_{\mu o \nu} = \frac{K}{r} \iiint \rho(\bar r')\, d^3\bar r' = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \text{ ή } -\frac{GM}{r}$$

(σαν να είναι όλη η μάζα στο κέντρο).

μονοπολικός όρος.

Ο όρος $l=1$: διπολικός όρος

$$\Phi_{\delta\iota\pi} = \frac{k}{r^2} \iiint \rho(\bar{r}') \cancel{r'} \frac{\bar{r}'\cdot\bar{r}}{\cancel{r'} r} d^3\bar{r} = \frac{k\, \bar{p}\cdot\bar{r}/r}{r^2}$$

με $\bar{p} = \iiint \rho(\bar{r}')\, \bar{r}'\, d^3\bar{r} = \int \bar{r}'\, dm = M\bar{R}_{KM}$ η διπολική ροπή

Αν αρχή Ο του συστήματος στο ΚΜ τότε $\bar{p}=0$.

Για $l=2$, τετραπολικός όρος :

$$\Phi_{\tau\epsilon\tau\rho} = \frac{k}{r^3} \iiint \rho(\bar{r}') \frac{3\left(\frac{\bar{r}'\cdot\bar{r}}{r}\right)^2 - r'^2}{2} d^3\bar{r}'$$

Μπορώ να ξεχωρίσω τα $\bar{r}$ και $\bar{r}'$ ως εξής: $3\left(\frac{\bar{r}'\cdot\bar{r}}{r}\right)^2 - r'^2 =$

$$= 3 \sum_{i=1}^{3} x'_i \frac{x_i}{r} \sum_{j=1}^{3} x'_j \frac{x_j}{r} - r'^2 \sum_{i,j} \frac{x_i x_j \delta_{ij}}{r^2} = \sum_{i,j=1}^{3} \left(3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}\right) \frac{x_i x_j}{r^2}$$ όπου $x_1=x, x_2=y, x_3=z$.

Ορίζοντας $Q_{ij} = \iiint \rho(\bar{r}')\left(3x'_i x'_j - r'^2\delta_{ij}\right) d^3\bar{r}'$ γράφω $\Phi_{\tau\epsilon\tau\rho} = \frac{k}{r^3} \sum_{i,j=1}^{3} \frac{1}{2} Q_{ij} \frac{x_i x_j}{r^2}$

$Q_{ij} \longrightarrow$ τετραπολική ροπή.

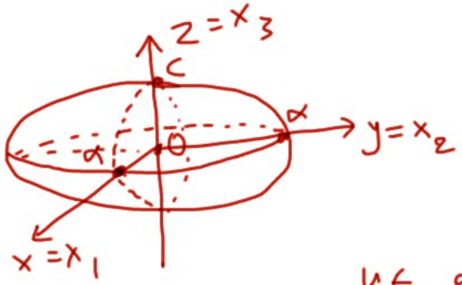
Γράφεται και $\dfrac{K}{r^3}\,\dfrac{\hat{r}\cdot\overleftrightarrow{Q}\cdot\hat{r}}{2}$ όπου $\overleftrightarrow{Q} = \iiint \rho(\bar{r}')\left(3\,\bar{r}'\otimes\bar{r}' - r'^2\,\mathrm{I}\right)d^3\bar{r}'$

ο τανυστής της τετραπολικής ροπής.

Γράφεται και σαν

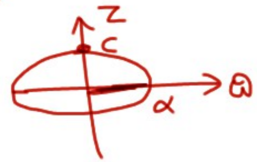
$$\Phi_{\tau\varepsilon\tau\varphi} = \frac{K}{2r^3}\begin{bmatrix}\frac{x}{r} & \frac{y}{r} & \frac{z}{r}\end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix}Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xz}\\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{yz}\\ Q_{zx} & Q_{zy} & Q_{zz}\end{bmatrix}}_{\int dm\begin{bmatrix}3x'^2-r'^2 & 3x'y' & 3x'z'\\ 3x'y' & 3y'^2-r'^2 & 3y'z'\\ 3x'z' & 3y'z' & 3z'^2-r'^2\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}\frac{x}{r}\\ \frac{y}{r}\\ \frac{z}{r}\end{bmatrix}$$

Άσκηση: Έστω ελλειψοειδές εκ περιστροφής $\dfrac{x_1^2+x_2^2}{\alpha^2}+\dfrac{x_3^2}{c^2}=1$



(γεωειδές αν $c<\alpha$

ωοειδές αν $c>\alpha$)



με αξισυμμετρική πυκνότητα. $(\rho=\rho(\varpi,z))$.

Βρείτε την τετραπολική διόρθωση του πεδίου σε μεγάλες αποστάσεις.

Εφαρμογή αν $\rho=\sigma\tau\alpha\vartheta=\dfrac{3M}{4\pi\alpha^2 c}$.

Λύση:

$$\Phi\simeq-\frac{GM}{r}+\Phi_{\tau\varepsilon\tau\rho},\qquad \Phi_{\tau\varepsilon\tau\rho}=-\frac{G}{r^3}\iiint\rho(\bar r')\,\frac{3\left(\bar r'\cdot\bar r/r\right)^2-r'^2}{2}\,d^3\bar r'=$$

$$=-\frac{G}{r^3}\iiint\rho(\bar r')\,\frac{3\left(x'^2x^2+y'^2y^2+z'^2z^2+2x'y'xy+2x'z'xz+2y'z'yz\right)-\left(x'^2+y'^2+z'^2\right)r^2}{2r^2}\,d^3\bar r'$$

Οι όροι με περιττές δυνάμεις του x' ή του y' μηδενίζονται λόγω αξισυμμετρίας.

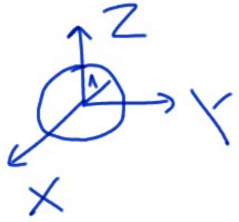
Ορίζοντας $A=\iiint\rho(\bar r')\,x'^2\,d^3\bar r'=\iiint\rho(\bar r')\,y'^2\,d^3\bar r'$, $B=\iiint\rho(\bar r')\,z'^2\,d^3\bar r'$

βρίσκω $\Phi_{\tau\varepsilon\tau\rho}=-\dfrac{G}{2r^3}\left[3\left(x^2A+y^2A+z^2B\right)-(A+A+B)\,r^2\right]=-\dfrac{G}{r^3}\,\dfrac{2z^2-x^2-y^2}{2r^2}(B-A)=-\dfrac{G}{r^3}(B-A)\dfrac{3\cos^2\theta-1}{2}$

(Το ίδιο μέσω της τετραπολικής ροπής που προκαλεί $\Phi_{ij} = \begin{bmatrix} A-B & 0 & 0 \\ 0 & A-B & 0 \\ 0 & 0 & 2(B-A) \end{bmatrix}$)

Αν $\rho = \sigma\tau\alpha\theta$, $A = \rho \iiint x'^2 \underbrace{d^3r'}_{dx'dy'dz'}$ Με $x' = \alpha X$, $y' = \alpha Y$, $z' = cZ$

τότε



σφαίρα μοναδιαίας ακτίνας

$$A = \rho \iiint \alpha^2 X^2 \, \alpha^2 c \, dX\,dY\,dZ = \rho \alpha^4 c \underbrace{\iiint X^2 d^3R}_{\frac{1}{3}\iiint R^2 d^3R = \frac{1}{3}\int_0^1 R^2 \, 4\pi R^2 dR = \frac{4\pi}{15}} = \frac{4\pi}{15}\rho \alpha^4 c = \frac{M\alpha^2}{5}$$

Όμοια $B = \frac{4\pi}{15} \rho \alpha^2 c^3 = \frac{Mc^2}{5}$.

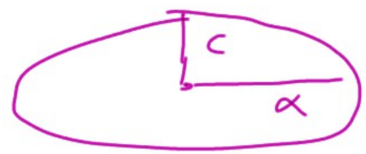
Άρα $\Phi = -\frac{GM}{r} + \frac{GM(\alpha^2 - c^2)}{5r^3} \cdot \frac{3\cos^2\theta - 1}{2}$

Σχήμα της Γης :

Θεωρώντας τη Γη ελλειψοειδές εκ περιστροφής με α λίγο μεγαλύτερο του c, είναι καλή προσέγγιση να θεωρήσουμε

$$\Phi \approx -\frac{GM}{r} + \frac{GM\alpha^2 J_2}{r^3}\,\frac{3\cos^2\theta - 1}{2}$$

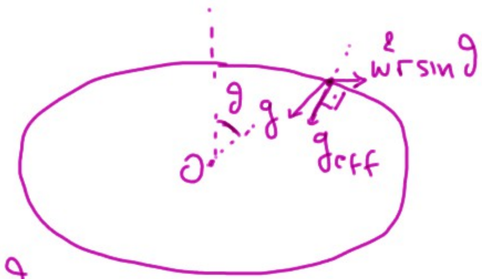
(δεν βάζω $J_2 = \frac{\alpha^2 - c^2}{5\alpha^2} = \frac{(\alpha-c)(\alpha+c)}{5\alpha^2} \simeq \frac{2\epsilon}{5}$ γιατί δεν είναι ομογενής)



Έχει μετρηθεί $\alpha - c = 21.4$ km

δηλ. $\epsilon = 1 - \frac{c}{\alpha} = \frac{1}{297} = 0{,}003367$

Το J_2 και το ϵ πρέπει να βρεθούν σαν αποτέλεσμα του ότι η φυγόκεντρος μαζί με την βαρύτητα διαμορφώνουν το σχήμα ώστε η $\bar{g}_{eff}$ να είναι κάθετη στην επιφάνεια.



$$\bar{g}_{eff} = -\nabla(\Phi + \Phi_\varphi) = -\nabla\left(\Phi - \frac{\omega^2 r^2 \sin^2\theta}{2}\right)$$

Η επιφάνεια είναι ισοδυναμική του $\Phi_{eff} = \Phi - \frac{\omega^2 r^2 \sin^2\theta}{2}$

Επιφάνεια Γης = ισοδυναμική του $\Phi_{eff} = -\frac{GM}{r} + \frac{GM\alpha^2 J_2}{r^3}\,\frac{3\cos^2\theta-1}{2} - \frac{\omega^2 r^2 \sin^2\theta}{2}$

Στους πόλους $\begin{pmatrix}\theta=0\\ r=c\end{pmatrix}$, $\Phi_{eff} = -\frac{GM}{c} + \frac{GM\alpha^2 J_2}{c^3} \approx -\frac{GM}{\alpha}(1+\epsilon) + \frac{GMJ_2}{\alpha}$

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{\alpha(1-\epsilon)} = \frac{1}{\alpha}(1-\epsilon)^{-1} \approx \frac{1}{\alpha}(1+\epsilon)$$

$$(1+x)^{\nu} \approx 1+\nu x$$

Στον ισημερινό $\begin{pmatrix}\theta=\pi/2\\ r=\alpha\end{pmatrix}$, $\Phi_{eff} = -\frac{GM}{\alpha} - \frac{GMJ_2}{2\alpha} - \frac{\omega^2\alpha^2}{2}$

Εξισώνοντας τα, $2\epsilon - 3J_2 = \frac{\omega^2\alpha^3}{GM} = \frac{\omega^2\alpha}{GM/\alpha^2} = \frac{34\ mm/s^2}{9.8\ m/s^2} = 0.0035$ (*)

Η διαφορά g_{eff} στους πόλους και στον ισημερινό έχει μετρηθεί $g_{eff_{pole}} - g_{eff_{equator}} = 52\ \frac{mm}{s^2}$ ($9.832\ m/s^2$, $9.780\ m/s^2$)

Από $\bar{g}_{eff} = -\nabla(\Phi+\Phi_{\varphi}) = \left[-\frac{GM}{r^2} + \frac{3GM\alpha^2 J_2}{r^4}\,\frac{3\cos^2\theta-1}{2} + \omega^2 r \sin^2\theta\right]\hat{r} + \left[\frac{3GM\alpha^2 J_2}{r^4} + \omega^2 r\right]\sin\theta\cos\theta\,\hat{\theta}$

$$|g_{eff}|_{\theta=0} - |g_{eff}|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{GM}{c^2} - \frac{3GM\alpha^2 J_2}{c^4}\right) - \left(\frac{GM}{\alpha^2} + \frac{3GMJ_2}{\alpha^2} - \omega^2\alpha\right) \approx \frac{GM}{\alpha^2}(1+2\epsilon-3J_2) - \frac{GM}{\alpha^2}\left(1+\frac{3}{2}J_2 - \frac{\omega^2\alpha}{GM/\alpha^2}\right)$$

$$\frac{1}{c^2} = \frac{1}{\alpha^2}(1-\epsilon)^{-2} \approx \frac{1+2\epsilon}{\alpha^2}$$

$$\overset{(*)}{\Longleftrightarrow}\ 4\epsilon - \frac{15}{2}J_2 = \frac{\Delta g}{g_0} = \frac{52\ mm/s^2}{9.8\ m/s^2}.$$

Τελικά $\epsilon = 0.003367$, $J_2 = 0.001088$.

Δυναμική ενέργεια κατανομής μαζών :

Για σημειακές μάζες $V = \sum_{i>j} V_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} V_{ij} = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \frac{G m_i m_j}{r_{ij}} =$

$$= \frac{1}{2} \sum_i m_i \underbrace{\left[\sum_{j \neq i} \left(-\frac{G m_j}{r_{ij}} \right) \right]} = \frac{1}{2} \sum_i m_i \Phi_i$$

δυναμικό από τις υπόλοιπες μάζες στη θέση της m_i

Για συνεχή κατανομή $V = \frac{1}{2} \int \Phi \, dm = \frac{1}{2} \int \Phi \rho \, d^3\vec{r}$

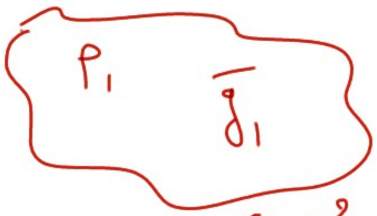
Εναλλακτική μορφή $V = \underbrace{\iiint}_{\text{σε όλο το χώρο}} \underbrace{\left(-\frac{\vec{g}^2}{8\pi G} \right)}_{\text{πυκνότητα ενέργειας}} d^3\vec{r}$

Για σφαιρικά συμμετρική κατανομή $V = -\int \frac{G \, m(r) \, dm(r)}{r}$

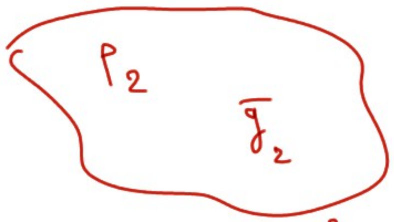
Για ομογενή σφαίρα ακτίνας R και μάζας M, $V = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}$.

ή με $M = \frac{4\pi R^3}{3} \rho$, $V = -\frac{16\pi^2}{15} G \rho^2 R^5$.

Ενέργεια αλληλεπίδρασης δύο κατανομών :



$$V_1 = -\iiint \frac{g_1^2}{8\pi G}\, d^3\bar r$$



$$V_2 = -\iiint \frac{g_2^2}{8\pi G}\, d^3\bar r$$

Όταν τις φέρω κοντά το ολικό πεδίο $\bar g = \bar g_1 + \bar g_2$ και η ενέργεια

$$V = -\iiint \frac{(\bar g_1 + \bar g_2)^2}{8\pi G}\, d^3\bar r = V_1 + V_2 + V_{\text{αλληλ}} \quad \text{με} \quad V_{\text{αλληλ}} = -\iiint \frac{\bar g_1 \cdot \bar g_2}{4\pi G}\, d^3\bar r$$

Η $V_{\text{αλληλ}}$ γράφεται και $V_{\text{αλληλ}} = \iiint \rho_1 \Phi_2\, d^3\bar r$

Απόδειξη:

$$V_{\text{αλληλ}} = -\iiint \frac{\bar g_1 \cdot \bar g_2}{4\pi G}\, d^3\bar r \overset{\bar g_2 = -\nabla\Phi_2}{=\!=\!=} \iiint \frac{\bar g_1 \cdot \nabla\Phi_2}{4\pi G}\, d^3\bar r \underset{\nabla\cdot\bar g_1 = -4\pi G \rho_1}{\overset{\bar g_1 \cdot \nabla\Phi_2 = \nabla(\Phi_2 \bar g_1) - \Phi_2 \nabla\cdot\bar g_1}{=\!=\!=\!=\!=}}$$

$$= \underbrace{\iiint \nabla\cdot\left(\frac{\Phi_2 \bar g_1}{4\pi G}\right) d^3\bar r}_{\oiint \frac{\Phi_2 \bar g_1}{4\pi G}\cdot d\bar S = 0} + \iiint \Phi_2 \rho_1\, d^3\bar r = \iiint \Phi_2 \rho_1\, d^3\bar r$$

$$V_{\alpha\lambda\lambda\eta\lambda} = \iiint \Phi_2 \, \rho_1 \, d^3 r$$

- Για σημειακό σώμα m_1, $V_{\alpha\lambda\lambda\eta\lambda} = \iiint \Phi_2 \, \underbrace{\rho_1 \, d^3 r}_{dm_1} = m_1 \Phi_2$

(αυτό είναι το γνωστό $V = m\Phi$)

- Για σφαιρικά συμμετρικές μάζες m_1, m_2

$$V_{\alpha\lambda\lambda\eta\lambda.} = -\frac{G \, m_1 m_2}{\alpha}$$

(απόδειξη άσκηση 4, 1ο σετ ΗΜΙ)

$$V = \underbrace{V_1 + V_2}_{\text{σταθερά αν οι κατανομές } \rho_1, \rho_2 \text{ δεν αλλάζουν εσωτερικά}} + V_{\alpha\lambda\lambda\eta\lambda.}$$

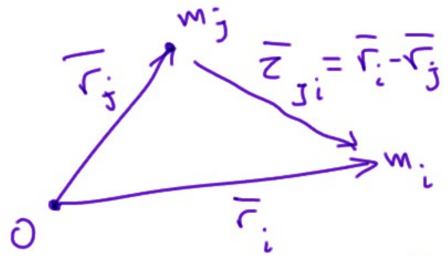
Θεώρημα Virial :

Για ένα σύστημα αλληλεπιδρόντων σωματιδίων ορίζουμε την "βαθμωτή" ροπή αδράνειας ως προς κέντρο αδρανειακού συστήματος αναφοράς

$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 \qquad \left(= M \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = M \underbrace{r_{rms}^2}_{\text{μέτρο "ακτίνας" του συστήματος}} \right)$$

Η παράγωγός της ορίζει το "virial" του συστήματος

$$G = \frac{1}{2}\frac{dI}{dt} = \sum_i m_i \bar{r}_i \cdot \bar{v}_i = \sum_i \bar{r}_i \cdot \bar{p}_i .$$



Η παράγωγος του G : $\displaystyle \frac{dG}{dt} = \sum_i \underbrace{\bar{v}_i \cdot \bar{p}_i}_{\bar{p}_i^2/m_i} + \sum_i \bar{r}_i \cdot \dot{\bar{p}}_i = 2T + \sum_i \bar{r}_i \cdot \bar{F}_i$

Για κεντρικές εσωτερικές $\displaystyle \bar{F}_i = \sum_{j \neq i} \bar{F}_{ji} + \bar{F}_i^{εξ}$ με $\displaystyle \bar{F}_{ji} = -\nabla_i V_{ij}(r_{ij}) = -\frac{dV_{ij}}{dr_{ij}} \hat{r}_{ji}$

ο όρος $\displaystyle \sum_i \bar{r}_i \cdot \bar{F}_i^{εσ} = \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \bar{r}_i \cdot \bar{F}_{ji} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \bar{r}_i \cdot \bar{F}_{ji} + \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{i,j} \bar{r}_i \cdot \bar{F}_{ji}}_{\text{εναλλάσσω δείκτες}} \underset{\bar{F}_{ij} = -\bar{F}_{ji}}{=\!=} \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \bar{r}_{ji} \cdot \bar{F}_{ji} =$

$\displaystyle = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} r_{ji} \frac{dV_{ji}}{dr_{ji}} .$

$$\frac{1}{2}\frac{d^2 I}{dt^2} = \frac{dG}{dt} = 2T - \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} r_{ji}\frac{dV_{ji}}{dr_{ji}} + \sum_i \bar{r}_i\cdot\bar{F}_i^{\varepsilon\xi}$$

Αν η V_{ji} είναι ομογενής βαθμού α, δηλ. είναι δύναμη $V_{ji} \propto r_{ji}^{\alpha}$

τότε $r_{ji}\frac{dV_{ji}}{dr_{ji}} = \alpha V_{ji}$ και η σχέση γράφεται

$$\frac{1}{2}\frac{d^2 I}{dt^2} = \frac{dG}{dt} = 2T - \alpha V^{\varepsilon\sigma} + \sum_i \bar{r}_i\cdot\bar{F}_i^{\varepsilon\xi} \quad \text{όπου } V^{\varepsilon\sigma} = \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} V_{ij}$$

Ορίζοντας μέσες τιμές σε κάποιο χρονικό διάστημα τ : $\langle f\rangle = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} f\,dt$

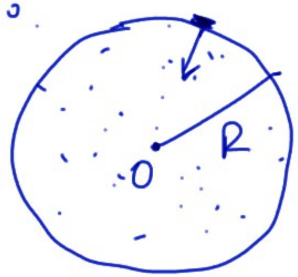
έχω $\frac{1}{2}\langle \ddot{I}\rangle = \underbrace{\langle \dot{G}\rangle}_{\frac{G(\tau)-G(0)}{\tau}} = 2\langle T\rangle - \alpha\langle V^{\varepsilon\sigma}\rangle + \langle \sum_i \bar{r}_i\cdot\bar{F}_i^{\varepsilon\xi}\rangle$

$\frac{G(\tau)-G(0)}{\tau} = 0$ αν
- περιοδικό
- οι θέσεις κυμαίνονται μεταξύ ακραίων θέσεων και $\tau\to\infty$ (κινήσεις γύρω από κάποια μέση θέση).

π.χ. για βαρύτητα, $\alpha = -1$, απουσία εξωτερικών δυνάμεων, σε σύστημα που το κέντρο μάζας είναι ακίνητο, ισχύει $2\langle T\rangle + \langle V\rangle = \frac{G(\tau)-G(0)}{\tau}$

$2\langle T\rangle + \langle V\rangle = 0$ ΙΣΟΠΑΛΙΑ

Παράδειγμα 1: έστω ιδανικό αέριο σε σφαιρικό δοχείο.



Οι εσωτερικές δυνάμεις δεν συνεισφέρουν στο Virial

γιατί $\bar{r}_{ji} \cdot \bar{F}_{ji} = 0$.

Εξωτερικές υπάρχουν μόνο λόγω κρούσεων με τα τοιχώματα

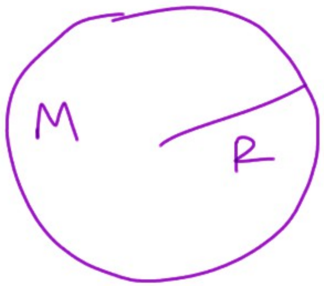
$\sum_i \bar{r}_i \cdot \bar{F}_i^{\varepsilon\xi} = -R\, P\, 4\pi R^2 = -3PV$ όπου V ο όγκος του δοχείου.

Άρα Virial: $2\langle T \rangle + \langle \sum \bar{r}_i \cdot \bar{F}_i^{\varepsilon\xi} \rangle = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \cancel{2}\langle N m \frac{v^2}{\cancel{2}} \rangle - 3PV = 0 \Leftrightarrow \langle v^2 \rangle = \frac{3PV}{Nm} = 3\frac{P}{\rho}$$

(το ίδιο από θεώρημα ισοκατανομής και $PV = N k_B T_v$)

Παράδειγμα 2: Virial θερμοκρασία αστέρα :



έστω $\rho = \sigma\tau\alpha\theta$ οπότε $V = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}$

$$2\underbrace{\langle T \rangle}_{N\left\langle \frac{mv^2}{2} \right\rangle = N\frac{3}{2}k_B T_v} + \langle V \rangle = 0 \Leftrightarrow T_v = \frac{GM^2}{5Nk_B R} \xrightarrow{M=Nm}$$

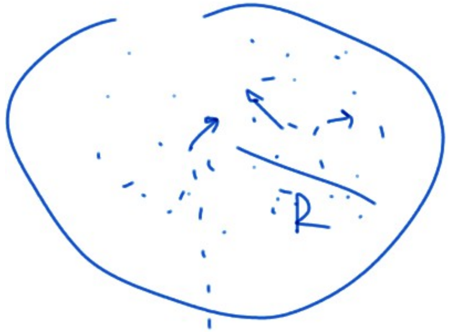
T_v ← θερμοκρασία

$$\Rightarrow T_v = \frac{GMm}{5k_B R}$$

π.χ. Ήλιος $M = 2 \cdot 10^{30}$ kg , $R = 7 \cdot 10^{8}$ m , $m = 0.5\, m_p$ με $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}$ kg , $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23}$ J/°K και $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ (SI)

$T_v = 2.3 \cdot 10^{6}$ °K .

Παράδειγμα 3: Σε σμήνος γαλαξιών



Μετρώ $\langle v_r^2 \rangle$. $\langle v^2 \rangle = 3\langle v_r^2 \rangle$

$$T = \frac{1}{2} M \langle v^2 \rangle = \frac{3M}{2} \langle v_r^2 \rangle$$

$$V = -\left(\frac{3}{5}\right) \frac{GM^2}{R}$$

Virial $2T + V = 0 \Leftrightarrow M = \dfrac{5R\langle v_r^2 \rangle}{G}$

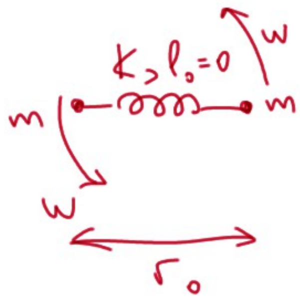
π.χ. για το Coma cluster $\sqrt{\langle v_r^2 \rangle} = 977 \ \frac{km}{s}$

$R = 3$ Mpc $(1\,pc = 3 \cdot 10^{16}\, m)$ και βρέθηκε $M = 3 \cdot 10^{15} M_\odot$

$L = 5 \cdot 10^{12} L_\odot$ δηλ. $\dfrac{M}{L} = 600 \dfrac{M_\odot}{L_\odot}$

οδήγησε τον Zwicky να "εισάγει" τον όρο σκοτεινή ύλη.

Παράδειγμα 4:



Ποια η T;

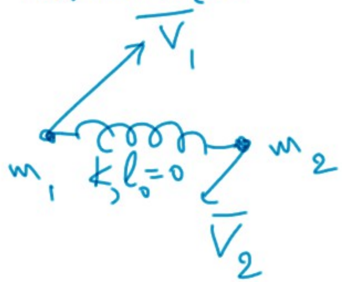
Λύση:

$$m w^2 \frac{r_0}{2} = k r_0 \Leftrightarrow w = \sqrt{\frac{2k}{m}}, \quad T = 2\,\frac{m\left(w\frac{r_0}{2}\right)^2}{2}$$ διότι $v = w\frac{r_0}{2}$

Άρα $$T = \frac{k r_0^2}{2}.$$

Το αποτέλεσμα από Virial για $\alpha = 2$: $2T - \alpha V = 0 \Leftrightarrow T = V$

Γενικότερα στο σύστημα του κέντρου μάζας



$$\mu \ddot{\bar{r}} = -k\bar{r} \Rightarrow \bar{r} = A\cos(wt)\,\hat{x} + B\sin(wt)\,\hat{y}, \quad w = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

σε κατάλληλο σύστημα (έλλειψη $\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{B}\right)^2 = 1$).

$$T = \frac{\mu \dot{r}^2}{2} = \frac{\mu w^2}{2}\left(A^2 \sin^2 + B^2 \cos^2\right)$$

$$V = \frac{k r^2}{2} = \frac{\mu w^2}{2}\left(A^2 \cos^2 + B^2 \sin^2\right)$$

Ισχύει $\langle T \rangle = \langle V \rangle$ όπως δίνει το Virial.