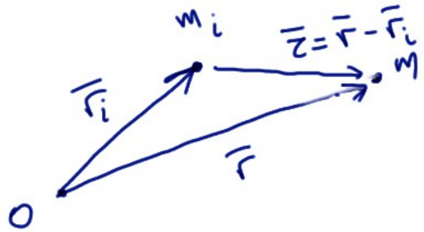
Πεδίο βαρύτητας σωμάτων με πεπερασμένες διαστάσεις :

Κάθε $m_i$ στη θέση $\vec{r}_i$ δημιουργεί πεδίο βαρύτητας, αφού ασκεί δύναμη $\vec{F}_m = -\frac{G m_i m}{\tau^2}\hat{\tau} = -\frac{G m_i m \vec{\tau}}{\tau^3}$ σε κάθε μάζα $m$ που βρίσκεται σε θέση $\vec{r}$.




Το πεδίο το περιγράφουμε μέσω της έντασης $\vec{g}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}_m}{m} = -\frac{G m_i}{\tau^2}\hat{\tau} = -\frac{G m_i \vec{\tau}}{\tau^3}$

ή του δυναμικού $\Phi(\vec{r}) = \frac{V}{m} = -\frac{G m_i}{\tau}$. Ισχύει $\vec{g} = -\nabla\Phi \Leftrightarrow \Phi = -\int \vec{g}\cdot d\vec{r}$

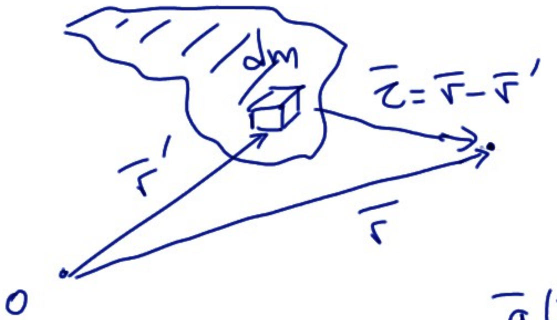
$\left(\frac{\vec{F}_m}{m} = -\nabla \frac{V}{m}\right)$ $\left(\frac{V}{m} = -\frac{\int \vec{F}_m \cdot d\vec{r}}{m}\right)$

Συνήθως θεωρούμε $\Phi|_\infty = 0$ οπότε $\Phi = -\int_\infty^{\vec{r}} \vec{g}\cdot d\vec{r}$.

Για πολλά σώματα ισχύει επαλληλία, $\vec{g}(\vec{r}) = -\sum_i \frac{G m_i \hat{\tau}_i}{\tau_i^2}$, $\vec{\tau}_i = \vec{r} - \vec{r}_i$

$\Phi(\vec{r}) = -\sum_i \frac{G m_i}{\tau_i}$.

Για συνεχείς κατανομές $\sum_i m_i \to \int dm$, $\vec{r}_i \to \vec{r}\,'$ δηλ. $\vec{g}(\vec{r}) = -\int \frac{G\,\overset{\rho(\vec{r}\,')d^3\vec{r}\,'}{dm}\,\hat{\tau}}{\tau^2}$, $\hat{\tau} = \vec{r} - \vec{r}\,'$




Η μάζα dm δημιουργεί $d\bar g = -\dfrac{G\,dm}{\tau^2}\hat\tau$

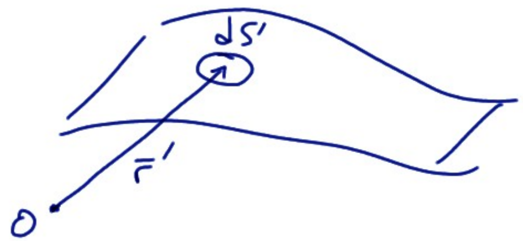
Σαρώνω όλη την κατανομή

$$\bar g(\bar r) = \int -\frac{G\,dm}{\tau^2}\hat\tau = -\iiint \frac{G\,\rho(\bar r')\,d^3\bar r'}{\tau^2}\hat\tau$$

$$\Phi(\bar r) = -\iiint \frac{G\,\rho(\bar r')\,d^3\bar r'}{\tau}$$

Αν έχω επιφανειακή κατανομή με επιφ. πυκνότ. $\sigma(\bar r')$

τότε $dm = \sigma(\bar r')\,dS'$

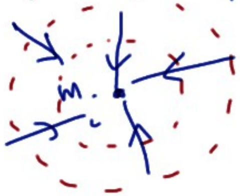



$$\bar g(\bar r) = -\iint G\,\frac{\sigma(\bar r')\,dS'}{\tau^2}\hat\tau \quad , \quad \Phi(\bar r) = \dots$$

Αν έχω γραμμική κατανομή πυκνότητας $\lambda(\bar r')$ , $dm = \lambda(\bar r')\,dl'$.

Ισχύει πάντα $\bar g = -\nabla\Phi \Leftrightarrow \Phi = -\int \bar g\cdot d\bar r$

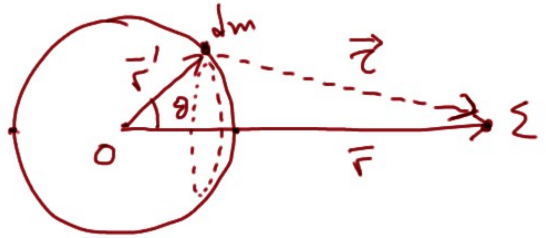
Δυναμικές γραμμές




Ισοδυναμικές $\Phi =$ σταθ

($\bar g$ κάθετο στις ισοδυναμικές).

Παράδειγμα: Δυναμικό ομογενούς σφαιρικού κελύφους μάζας M και ακτίνας R.




$$\Phi = -\iint \frac{G\,\sigma\,\overbrace{dS}^{dS = R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi}}{\tau}, \quad \sigma = \frac{M}{4\pi R^2}$$

$$\tau = |\bar{\tau}| = |\bar{r} - \bar{r}'| = \sqrt{r^2 + R^2 - 2rR\cos\theta}$$

$$\left( d\bar{r} = \cancel{dr\,\hat{r}} + r\,d\theta\,\hat{\theta} + r\sin\theta\, d\varphi\,\hat{\varphi} \right)$$

$$\Phi = -\frac{GM}{4\pi \cancel{R^2}} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{\cancel{R^2} \sin\theta\, d\theta\, d\varphi}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR\cos\theta}} = -\frac{GM}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR\cos\theta}}$$

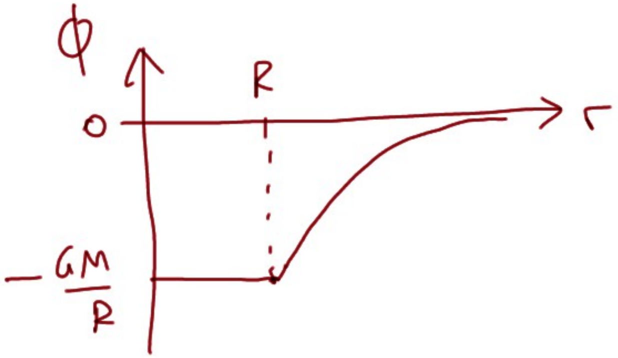
$$\tau^2 = r^2 + R^2 - 2rR\cos\theta \Rightarrow 2\tau\, d\tau = 2rR\sin\theta\, d\theta \Leftrightarrow \frac{\sin\theta\, d\theta}{\tau} = \frac{d\tau}{rR}$$

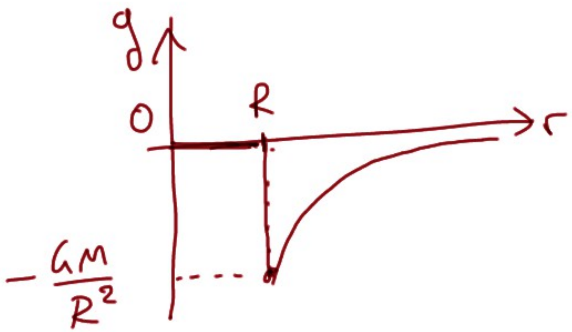
και $$\Phi = -\frac{GM}{2} \int_{\tau|_{\theta=0}}^{\tau|_{\theta=\pi}} \frac{d\tau}{rR} = -\frac{GM}{2rR} \left[\tau\right]_{|r-R|}^{r+R} = -\frac{GM}{2rR}\left(r + R - |r-R|\right)$$

Αν $r > R$ (το Σ έξω από το κέλυφος), $\Phi = -\dfrac{GM}{r}$

Αν $r < R$ (το Σ μέσα στο κέλυφος), $\Phi = -\dfrac{GM}{R}$

Δηλ. $\phi = \begin{cases} -\dfrac{GM}{r}, & r \geq R \\ -\dfrac{GM}{R}, & r \leq R \end{cases}$ $\qquad \bar{g} = -\nabla\phi = -\dfrac{d\phi}{dr}\hat{r} = \begin{cases} -\dfrac{GM}{r^2}\hat{r}, & r > R \\ 0, & r < R \end{cases}$

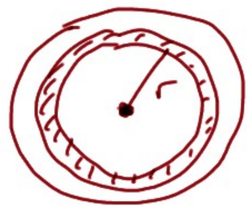


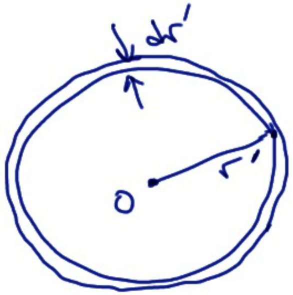

Θεώρημα Νεύτωνα για σφαιρικό κέλυφος.

$\bar{g}_{\text{έξω}} = \bar{g}$ σημειακής μάζας

$\bar{g}_{\text{μέσα}} = 0$.



Για σφαιρικά συμμετρικές κατανομές $\rho = \rho(r)$ ← όχι $\vec{r}'$




τις θεωρώ επάλληλα κελύφη ακτίνας $r'$ και πάχους $dr'$, όγκου $4\pi r'^2 dr'$, μάζας $dm = 4\pi r'^2 \rho(r')\, dr'$ και εφαρμόζω επαλληλία.

Έστω $\rho = \begin{cases} \rho(r), & r<\alpha \\ 0, & r>\alpha \end{cases}$ δηλ. ακτίνα κατανομής $\alpha$

Εκτός $\Phi = \int d\Phi = -\int \frac{G\,dm}{r} = -\frac{G M_{ολ}}{r}$, $M_{ολ} = \int_0^\alpha 4\pi r'^2 dr'\, \rho(r')$


Εντός $\Phi = \int_{r'=0}^{r} \frac{-G\,dm}{r} + \int_{r'=r}^{\alpha} \frac{-G\,dm}{r'} = -\frac{G M(r)}{r} - \int_r^\alpha \frac{G\,dm}{r'}$

$M(r) = \int_0^r 4\pi r'^2 dr'\, \rho(r')$ η μάζα από το κέντρο μέχρι την ακτίνα $r$.

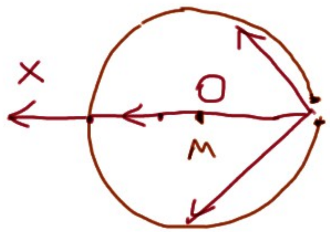
και $dm = 4\pi r'^2 \rho(r')\, dr'$

Όμοια $\vec{g}\big|_{r>\alpha} = -\int \frac{G\,dm}{r^2}\hat{r} = -\frac{G M_{ολ}}{r^2}\hat{r}$ και $\vec{g}\big|_{r<\alpha} = -\int_0^r \frac{G\,dm}{r^2}\hat{r} + 0 = -\frac{G M(r)}{r^2}\hat{r}$

**Άσκηση:** Στην επιφάνεια ομογενούς φλοιού ακτίνας $R$ ανοίγουμε μια μικρή οπή αφαιρώντας μικρή μάζα $M$. Αν αφήσουμε την $M$ στο κέντρο με τι ταχύτητα θα ακουμπήσει το φλοιό; Σε πόσο χρόνο θα ακουμπήσει;

Δίνεται $\displaystyle\int_0^x \sqrt{\frac{1+x}{x}}\,dx = \sqrt{x(1+x)} + \ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{1+x}\right)$.

**Λύση:**




$$\bar{g} = \bar{g}_{\text{ολόκληρου φλοιού}} - \bar{g}_{\text{της μάζας } M} = 0 - \left(-\frac{GM}{r^2}\hat{r}\right)$$


$$\Leftrightarrow \bar{g}_{\text{εντός}} = \frac{GM}{r^2}\hat{r}$$

με $\bar{r} = \bar{r} - \bar{r}_{\text{οπής}}$

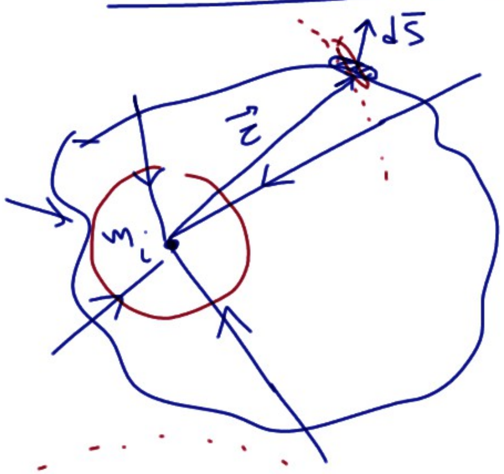
Για την $M$: Θα κινηθεί πάνω στον άξονα $x$, $\cancel{m}\,\ddot{x}\hat{x} = \dfrac{GM\cancel{m}}{(R+x)^2}\hat{x} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \ddot{x} = \frac{GM}{(R+x)^2} \Leftrightarrow \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{GM}{R+x} = 0 + \frac{GM}{R} \Leftrightarrow \dot{x} = +\sqrt{\frac{2GM\,x}{R(R+x)}}$$

Για $x=R$, $\dot{x} = \upsilon = \sqrt{\dfrac{GM}{R}}$

$$t = \int dt = \int_0^R \frac{dx}{\dot{x}} = \sqrt{\frac{R}{2GM}}\int_0^R \sqrt{\frac{R+x}{x}}\,dx \overset{x=\xi R}{=\!=\!=} \sqrt{\frac{R^3}{2GM}}\int_0^1 \sqrt{\frac{1+\xi}{\xi}}\,d\xi = \sqrt{\frac{R^3}{GM}}\left[1 + \frac{\ln(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}}\right]$$

## Νόμοι Gauss – Poisson :



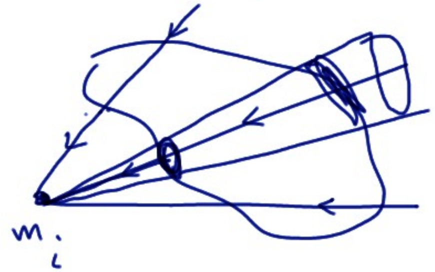

Το $m_i$ δημιουργεί $\bar{g}_i = -\dfrac{Gm_i}{r^2}\hat{r}$ σε σημείο $\vec{r}$ από τη θέση του.

Ροή $\Phi_i = \oiint \bar{g}_i \cdot d\bar{S} = -Gm_i \oiint \dfrac{\hat{r}\cdot d\bar{S}}{r^2}$ → $\dfrac{dS_\perp}{r^2} = d\Omega$ στερεά γωνία

όχι δυναμικό

$$= -Gm_i \underbrace{\int d\Omega}_{4\pi} = -4\pi G m_i$$

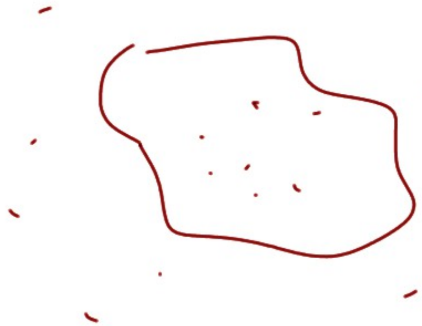

$$\oiint_{\text{σφαίρα}} \bar{g}_i \cdot r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, \hat{r} = -Gm_i \int_0^\pi \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = -4\pi G m_i$$




Αν η μάζα $m_i$ εκτός της επιφάνειας τότε $\Phi_i = 0$

$\left( \Phi_i = -Gm_i \oiint \dfrac{\hat{r}\cdot d\bar{S}}{r^2} \right.$ . Στο κοντινό μέρος της επιφάνειας $\dfrac{\hat{r}\cdot d\bar{S}}{r^2} = -d\Omega$ ενώ στο μακρινό $\left. \dfrac{\hat{r}\cdot d\bar{S}}{r^2} = +d\Omega . \right)$

άθροισμα $\emptyset$



Αν έχω πολλές μάζες, επαλληλία

$$\underbrace{\Phi}_{\int d\Phi = \oint \bar{g}\cdot d\bar{S}} = -4\pi G \underbrace{\int dm}_{\text{εντός}} = -4\pi G \underbrace{\iiint \rho(\bar{r}')\, d^3 r'}_{M_{εγκ}}$$

$$\bar{g} = \int d\bar{g}$$

ολική μάζα εντός της επιφάνειας.

Άρα

$$\boxed{\oint \bar{g}\cdot d\bar{S} = -4\pi G \underbrace{\iiint \rho(\bar{r}')\, d^3 r'}_{M_{εγκ}} \quad \text{ολοκληρωτικός νόμος Gauss}}$$

π.χ. αν $\rho = \rho(r)$ (σφαιρικά συμμετρική κατανομή) τότε $\bar{g} = g(r)\,\hat{r}$

και Gauss σε σφαίρα ακτίνας $r$ : $\quad g(r)\cdot 4\pi r^2 = -4\pi G \underbrace{\int_0^r 4\pi r'^2\, dr'\, \rho(r')}_{M_{εγκ}}$

δηλ. $\quad \bar{g} = -\dfrac{G M_{εγκ}}{r^2}\,\hat{r}$.

Από θεώρημα της απόκλισης ή Gauss $\oiint \bar{g}\cdot d\bar{S} = \iiint \nabla\cdot\bar{g}\, d\tau$

Άρα ολοκληρωτικός Gauss $\rightsquigarrow$ $\iiint \nabla\cdot\bar{g}\, d\tau = -4\pi G \iiint \rho\, d\tau$

$\Leftrightarrow$ $\boxed{\nabla\cdot\bar{g} = -4\pi G\rho \quad \text{διαφορικός νόμος Gauss.}}$

Με $\bar{g} = -\nabla\Phi$ προκύπτει $\boxed{\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho \quad \text{νόμος Poisson}}$

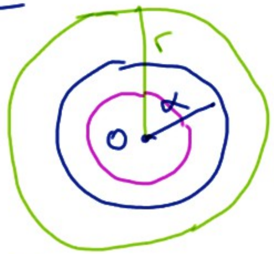
(στο χώρο όπου $\rho=0$, $\nabla^2\Phi = 0$ Laplace)

Παράδειγμα: Έστω ομογενής σφαίρα ακτίνας $\alpha$, μάζας $M$.

(α) Ποιο το πεδίο σε όλο το χώρο; (β) Ποια η ταχύτητα διαφυγής από το κέντρο;

<u>Λύση</u>:

(α)




$$\bar g = g(r)\,\hat r$$

Άρα σε σφαίρα $r = \sigma\tau\alpha\vartheta > \alpha$, $M_{\varepsilon\gamma\kappa} = M$ και

$$\oiint \bar g \cdot d\bar S = -4\pi G M_{\varepsilon\gamma\kappa} \Leftrightarrow g\,4\pi r^2 = -4\pi G M \Leftrightarrow \bar g = -\frac{GM}{r^2}\hat r$$

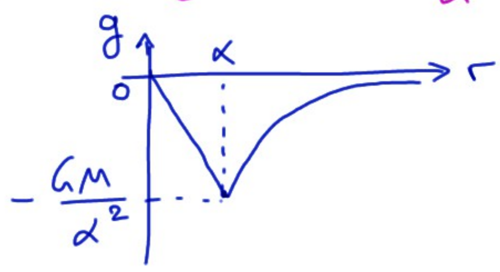
Όμοια σε σφαίρα $r = \sigma\tau\alpha\vartheta < \alpha$, $M_{\varepsilon\gamma\kappa} = \rho \frac{4\pi r^3}{3} = M\frac{r^3}{\alpha^3}$ $\left(\iiint \rho\, d^3 r\right)$

$\rho \to \frac{M}{4\pi\alpha^3/3}$

οπότε Gauss $\leadsto$ $g\,4\pi r^2 = -4\pi G M \frac{r^3}{\alpha^3} \Leftrightarrow \bar g = -\frac{GMr}{\alpha^3}\hat r$

Δηλ.

$$\bar g = \begin{cases} -\frac{GM}{\alpha^3}\bar r, & r \le \alpha \\ -\frac{GM}{r^2}\hat r, & r \geq \alpha \end{cases}$$



Το ίδιο από $\nabla\cdot\bar{g} = -4\pi G\rho \xLeftrightarrow{\bar{g}=g(r)\hat{r}} \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 g\right) = -4\pi G\rho$

με $\rho = \frac{3M}{4\pi\alpha^3}$ για $r<\alpha$ και $\rho=0$ για $r>\alpha$.

Για $r<\alpha$, $\frac{d}{dr}\left(r^2 g\right) = -\frac{3MGr^2}{\alpha^3} \Leftrightarrow r^2 g = -\frac{MGr^3}{\alpha^3} + C \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow g = -\frac{GM}{\alpha^3}r + \frac{C}{r^2}$ με $C=0$ ώστε το $g$ να μην απειρίζεται

για $r=0$ (μόνο αν είχα σημειακή μάζα $M_0$ στο κέντρο θα κρατούσα $C=-GM_0$)

Για $r>\alpha$, $r^2 g = D$. Αφού η πυκνότητα πεπερασμένη

για $r=\alpha$ (δεν υπάρχει επιφανειακή πυκνότητα) η $g$ συνεχής.

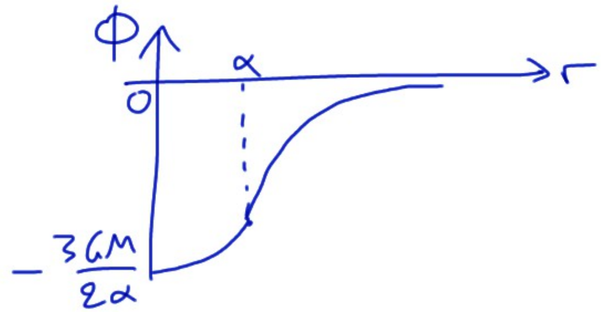
Δηλ. $g\big|_{r=\alpha^-} = g\big|_{r=\alpha^+} \Leftrightarrow D = \left(-GM/\alpha^2\right)\cdot\alpha^2 = -GM$.

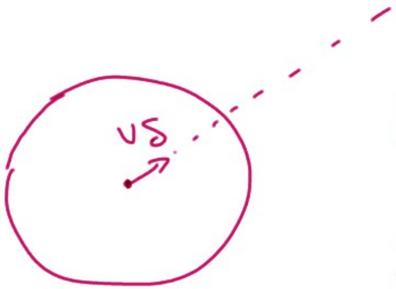
Τελικά $\bar{g} = \begin{cases} -\frac{GMr}{\alpha^3}\hat{r}, & r\leq\alpha \\ -\frac{GM}{r^2}\hat{r}, & r\geq\alpha \end{cases}$

$$\Phi = -\int \underbrace{\bar{g}\cdot d\bar{r}}_{\bar{g}\cdot d\bar{r} = g\,dr} \;\underline{\underline{\text{θεωρώντας } \Phi_\infty = 0}}\; -\int_\infty^r g\,dr$$

Για $r>\alpha$ : $\Phi = -\int_\infty^r \left(-\frac{GM}{r^2}dr\right) = -\frac{GM}{r}$

Για $r<\alpha$ : $\Phi = \underbrace{-\int_\infty^\alpha \left(-\frac{GM}{r^2}dr\right)}_{\Phi(\alpha)} - \int_\alpha^r \left(-\frac{GMr}{\alpha^3}\right)dr = \frac{GM}{2\alpha^3}\left(r^2 - 3\alpha^2\right)$.




$$\frac{mv^2}{2} + V = E$$

$$\frac{v^2}{2} + \Phi = \sigma\tau\alpha\vartheta$$

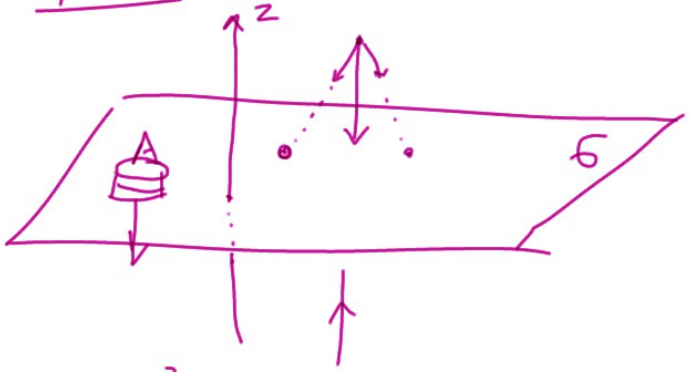
$$\frac{v_\delta^2}{2} + \Phi\Big|_{r=0} = 0 + \cancel{\Phi\Big|_{r=\infty}} \to 0 \iff v_\delta = \sqrt{-2\Phi\Big|_{r=0}} = \sqrt{\frac{3GM}{\alpha}}.$$

# Αναλογία με ηλεκτροστατικά πεδία

| | |
|---|---|
| βαρύτητα | ηλεκτρισμός |
| $\bar{g} = -\dfrac{G m_i}{r^2}\hat{r}$ | $\bar{E} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{q}{r^2}\hat{r}$ |
| $\bar{g}$ | $\bar{E}$ |
| $m$ | $q$ |
| $G$ | $-\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ |
| $\nabla\cdot\bar{g} = -4\pi G\rho$ | $\nabla\cdot\bar{E} = \rho/\varepsilon_0$ |
| $\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho$ | $\nabla^2\Phi = -\rho/\varepsilon_0$ |

Ένα φύλλο μάζας άπειρων διαστάσεων και επιφ. πυκν. σ τι $\bar{g}$ δημιουργεί;

Λύση:



$$\bar{E} = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}, & z>0 \\ -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}, & z<0 \end{cases} \qquad \bar{g} = \begin{cases} -2\pi G\sigma \hat{z}, & z>0 \\ +2\pi G \sigma \hat{z}, & z<0 \end{cases}$$

$$4\pi\varepsilon_0 = -G$$

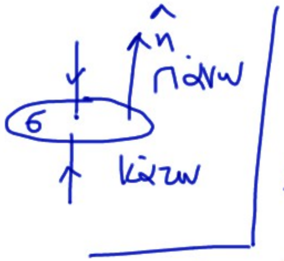
Απόδειξη:

Λόγω συμμετρίας $\bar{g}_{\pi\acute{\alpha}\nu\omega} = -\bar{g}_{\kappa\acute{\alpha}\tau\omega}$, ομογενές (το "κοντά" δεν έχει νόημα)

και κάθετα στο φύλλο. Από $\oiint \bar{g}\cdot d\bar{S} = -4\pi G M_{\varepsilon\gamma\kappa}$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\bar{g}_{\pi\acute{\alpha}\nu\omega}\cdot(A\hat{z}) + \bar{g}_{\kappa\acute{\alpha}\tau\omega}\cdot(-A\hat{z}) + \underbrace{\cancel{\iint \bar{g}\cdot d\bar{S}}}_{\pi\alpha\rho\acute{\alpha}\pi\lambda.} = -4\pi G\sigma A \Leftrightarrow \ldots$

Κάθε επιφανειακή πυκνότητα σε σημεία απειροστά κοντά της μπορεί να θεωρηθεί απείρων διαστάσεων και άρα δημιουργεί ελκτικό $g = 2\pi G\sigma$.

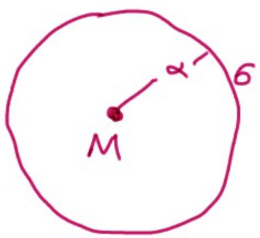



είναι ασυνεχές.

Δημιουργεί ασυνέχεια στο $\bar{g}_\perp$ ίση με $\Delta\bar{g} = \bar{g}_{πάνω} - \bar{g}_{κάτω} = -4\pi G\sigma\,\hat{n}$ (ακόμα και αν υπάρχουν και άλλες μάζες ισχύει $\bar{g}_{πάνω} - \bar{g}_{κάτω} = -4\pi G\sigma\,\hat{n}$ για το ολικό $\bar{g}$)

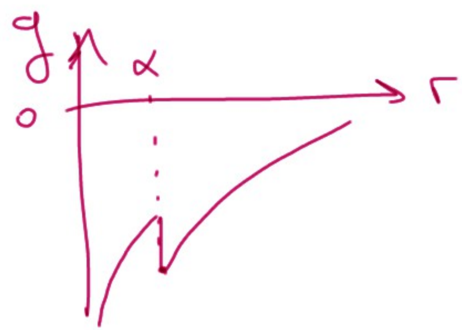
$$\left(\bar{E}_{πάνω} - \bar{E}_{κάτω} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{n}\right)$$

Άσκηση:




Ποιο το $\bar{g}$;

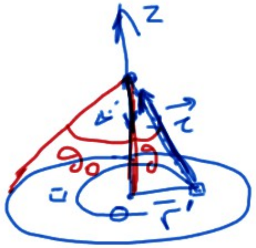
$$\bar{g} = \begin{cases} -\dfrac{GM}{r^2}\hat{r}, & 0 < r < \alpha \\ -\dfrac{G}{r^2}\left(M + 4\pi\alpha^2\sigma\right)\hat{r}, & r > \alpha \end{cases}$$



Άσκηση:

Κυκλικός δίσκος ακτίνας $\alpha$ με επιφανειακή πυκνότητα μάζας $\sigma$, σταθερή.
Ποιο το $\bar g$ πάνω στον άξονά του; Σχολιάστε το αποτέλεσμα για $z \ll \alpha$, $z \gg \alpha$.

Λύση:




Χωρίζω το δίσκο σε επιφάνειες $dS = \varpi\, d\varpi\, d\varphi$

$$d\bar g = -\frac{G\sigma\,\varpi\, d\varpi\, d\varphi\,\vec{\mathfrak{r}}}{\mathfrak{r}^3}$$

$$\vec{\mathfrak{r}} = \bar r - \bar r' = z\hat z - \varpi\hat\varpi$$

Λόγω συμμετρίας μένει μόνο η $\hat z$ συνιστώσα, άρα

$$\bar g = -\int_{\varpi=0}^{\alpha}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{G\sigma\,\varpi\, d\varpi\, d\varphi\, z\hat z}{\mathfrak{r}^3} = -\int \frac{G\sigma\, 2\pi\,\varpi\, d\varpi}{\mathfrak{r}^3}\, z\hat z$$

$$\varpi = z\tan\theta, \quad d\varpi = \frac{z}{\cos^2\theta}d\theta, \quad \mathfrak{r} = \frac{z}{\cos\theta} \text{ για } z>0$$

$$\bar g = -G\sigma 2\pi\int_0^{\theta_0}\sin\theta\, d\theta\, \hat z \qquad \text{με} \quad \theta_0 = \arctan\frac{\alpha}{z}$$

$$\bar g = -G\sigma 2\pi(1-\cos\theta_0)\hat z, \quad \cos\theta_0 = \sqrt{\frac{\cos^2\theta_0}{\sin^2\theta_0+\cos^2\theta_0}} = \sqrt{\frac{1}{\tan^2\theta_0+1}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\alpha}{z}\right)^2+1}}$$

Για $z \gg \alpha$, $\cos\theta_0 \approx 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{z}\right)^2$ και $\bar g \approx -\frac{GM}{z^2}\hat z$. Για $0<z\ll\alpha$, $\bar g \approx -2\pi G\sigma\,\hat z$