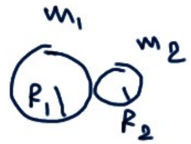
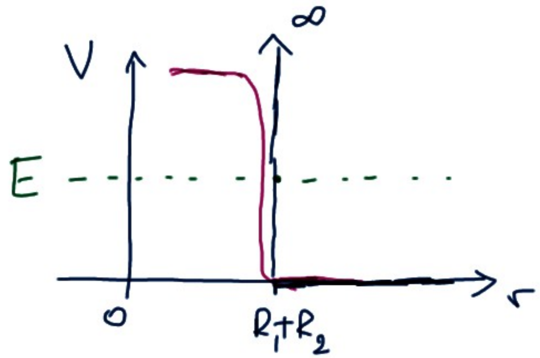
Αλληλεπιδράσεις δύο σωμάτων – σκεδάσεις – κρούσεις :

Στο σύστημα με αρχή το m_1, $\mu \ddot{\bar{r}} = \bar{F}_{12}$ $\quad (F_{εξ} = 0)$

$$\bar{F}_{12} = -\bar{\nabla} V$$

- Ελαστική κρούση



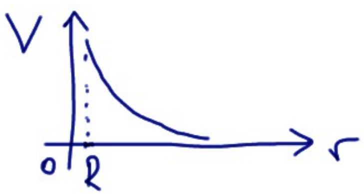


$$V = \begin{cases} \infty, & r < R_1 + R_2 \\ 0, & r > R_1 + R_2 \end{cases}$$

σκληρές σφαίρες

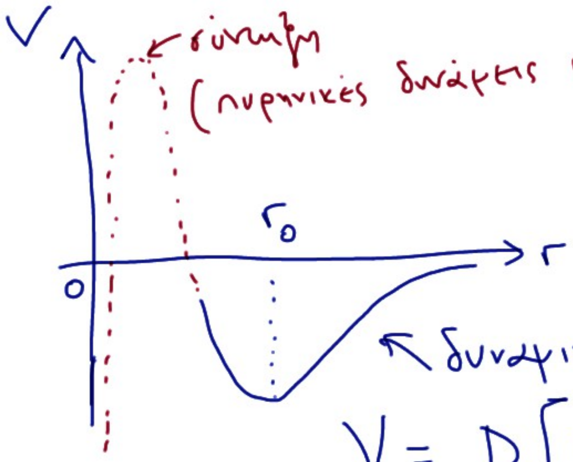
μηδενικός χρόνος κρούσης

- Άπωση Coulomb μεταξύ ομόσημων φορτίων



$$V = \frac{k}{r}, \quad k = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \quad \text{για } r > R$$

• διατομικό μόριο

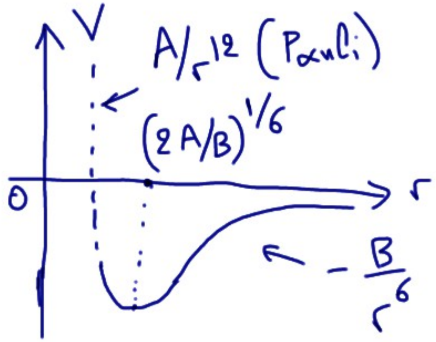


δυναμικό Morse

$$V = D\left[1 - e^{-\beta(r-r_0)}\right]^2 - D$$

Για το H_2, $D = 7.6 \cdot 10^{-19}$ J
$\beta = 0.0193 \cdot 10^{12}$ m^{-1}
$r_0 = 74.1 \cdot 10^{-12}$ m

• δυνάμεις μεταξύ μορίων



Δυναμικό Lennard-Jones

$$V = \frac{A}{r^{12}} - \frac{B}{r^6}$$

(van der Waals δυνάμεις $\propto \frac{1}{r^7}$)

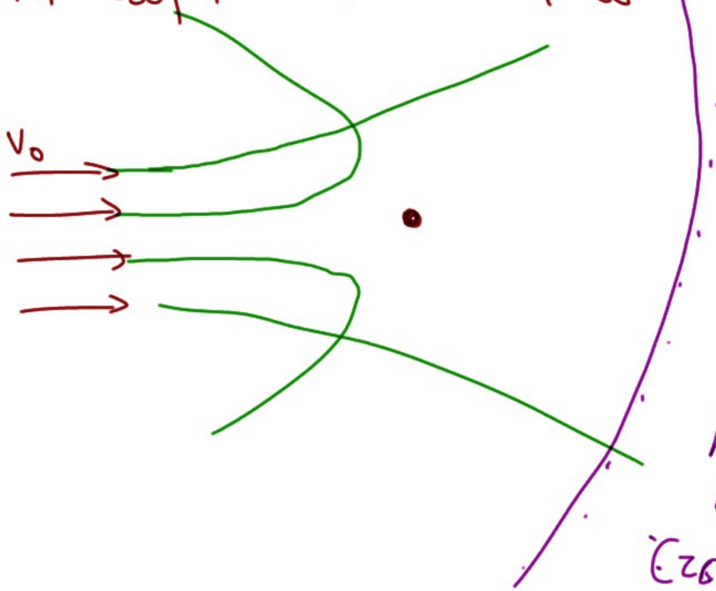
Σκέδαση Rutherford:

Πείραμα για να κατανοήσουμε μέχρι ποια κλίμακα ισχύει ένα μοντέλο.

π.χ. πείραμα Geiger-Marsden (σκέδαση Rutherford):

ρίχνω σωμάτια α σε φύλλο χρυσού.

στενή δέσμη — λεπτό φύλλο — ένα σκεδαστή (πυρήνας χρυσού)



Η γωνιακή κατανομή των σκεδαζόμενων σωματίων α παρατηρείται με ανιχνευτές.

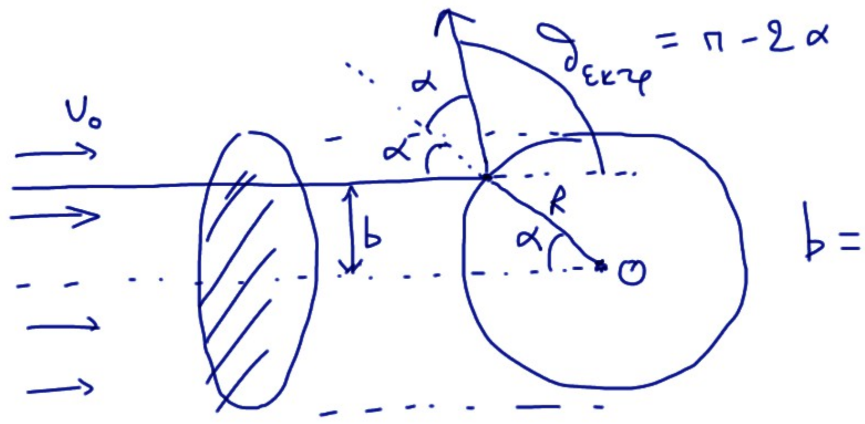
Συμφωνεί με απωστικό δυναμικό Coulomb;

Αυξάνοντας την v_0 βλέπω ότι πάνω από κάποιο όριο δεν συμφωνούν.

Έτσι βρίσκω τις διαστάσεις του πυρήνα (μελέτη Rutherford 1911).

Απλούστερη περίπτωση: σκέδαση σε σκληρή σφαίρα, ακτίνας R (ακίνητη).

Έστω δέσμη N σωματίων κινείται με v_0 προς το στόχο και $A=\pi R^2$ το εμβαδό της δέσμης



$b = R\sin\alpha$

Ένα σωμάτιο με παράμετρο κρούσης $b = R\sin\alpha$ εκτρέπεται κατά $\theta_{\varepsilon\kappa\tau\rho} = \pi - 2\alpha$ οπότε $b = R\cos\frac{\theta_{\varepsilon\kappa\tau\rho}}{2}$

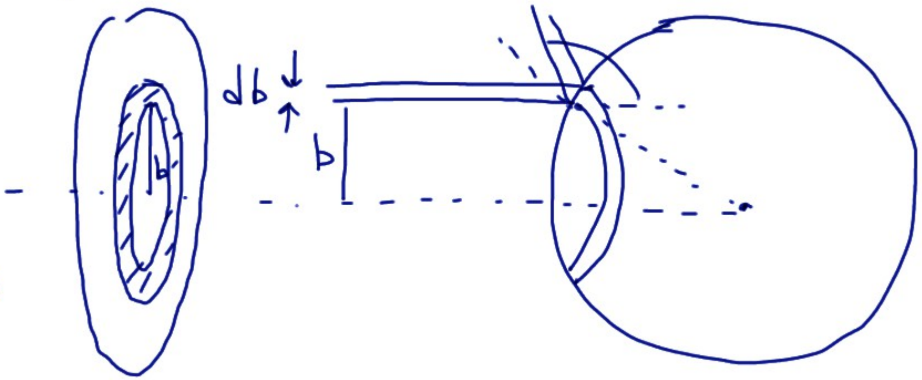
Το μέτρο της ταχύτητας παραμένει v_0 μετά την κρούση (διατήρηση ενέργειας).

Η γωνία ανάκλασης είναι ίση με τη γωνία πρόσπτωσης (από διατήρηση στροφορμής ως προς O που δίνει ότι το ημίτονο της γωνίας $(\widehat{\vec{r},\vec{v}})$ μένει ίδιο)

Σωμάτια που έχουν παράμετρο κρούσης από b ως $b+db$ βρίσκονται στην επιφάνεια

$$d\sigma = b\,db\int d\varphi = 2\pi b\,db$$

Η γωνία εκτροπής τους είναι από $\theta_{εκτρ}$ ως $\theta_{εκτρ}+d\theta_{εκτρ}$

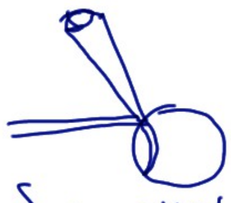


$$b = R\cos\frac{\theta_{εκτρ}}{2} \Longrightarrow db = -\frac{R}{2}\sin\frac{\theta_{εκτρ}}{2}\,d\theta_{εκτρ}.$$

Πλήθος $dN = \frac{N}{A}d\sigma$ με $d\sigma = 2\pi b\,db$ θα σκεδαστεί σε

στερεά γωνία $d\Omega = 2\pi\sin\theta_{εκτρ}\left|d\theta_{εκτρ}\right| =$

$$= 4\pi\sin\frac{\theta_{εκτ}}{2}\cos\frac{\theta_{εκτ}}{2}\left|d\theta_{εκτ}\right| = \frac{4}{R^2}d\sigma$$

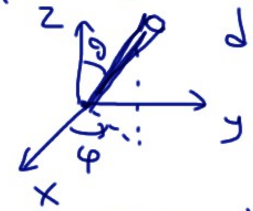


Η ποσότητα $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{R^2}{4}$ είναι η διαφορική διατομή σκέδασης.

$$\frac{dN}{d\Omega} = \frac{N}{A}\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{NR^2}{4A} = \frac{N}{4\pi}$$

Ισοτροπική σκέδαση.

(Στερεά γωνία



$$d\Omega = \frac{dA_\perp}{r^2} = \sin\theta\,d\theta\,d\varphi$$

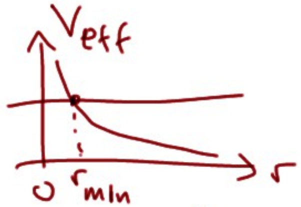
$$d\Omega = 2\pi\sin\theta\,d\theta$$

ολική $\Omega = \int_0^\pi 2\pi\sin\theta\,d\theta = 4\pi$)

Σκέδαση Rutherford:

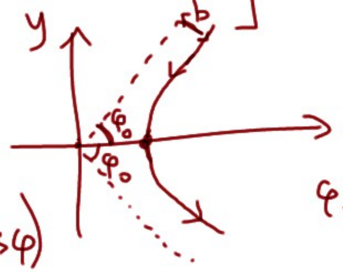
Απωστικές δυνάμεις $F=\frac{k}{r^2}$, $k>0$.

$$V=\frac{k}{r}+\cancel{c}^{\,0}, \qquad V_{eff}=\frac{L^2}{2mr^2}+\frac{k}{r}$$



Τροχιά $$u''+u=-\frac{mk}{L^2} \Leftrightarrow u=-\frac{mk}{L^2}\left[1-\varepsilon\cos(\varphi-\cancel{\varphi_0})\right] \Leftrightarrow r=\frac{p}{-1+\varepsilon\cos\varphi}$$

$$p=\frac{L^2}{mk} \qquad r_{min}=\frac{p}{-1+\varepsilon}$$ υπερβολή

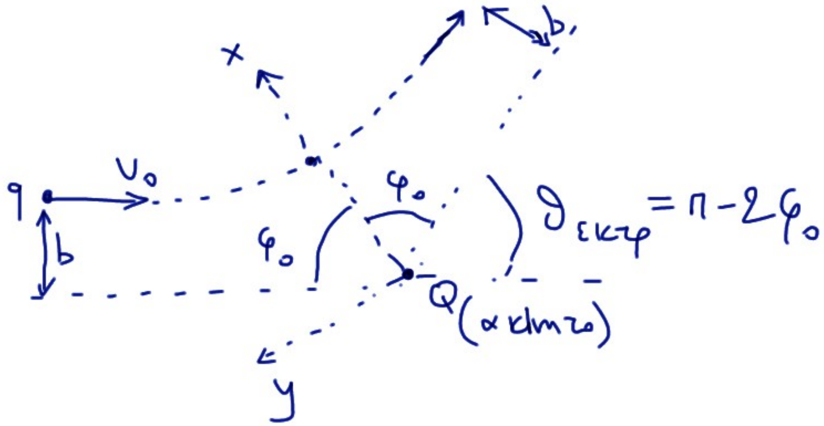


$$\varphi_0=\arccos\frac{1}{\varepsilon}$$

$$\dot r=\frac{d(1/u)}{d\varphi}\dot\varphi=-\frac{L}{m}u'=\frac{k}{L}\varepsilon\sin\varphi, \qquad r\dot\varphi=\frac{L}{mr}=\frac{k}{L}(-1+\varepsilon\cos\varphi)$$

$$\bar v=\frac{k}{L}\varepsilon\sin\varphi\,\hat r+\frac{k}{L}(-1+\varepsilon\cos\varphi)\,\hat\varphi, \qquad E=\frac{mv^2}{2}+\frac{k}{r} \Leftrightarrow \varepsilon=\sqrt{1+\frac{2L^2E}{mk^2}}$$

Σκέδαση.



Αρχικά $r = \infty$, $v = v_0$

παράμετρος κρούσης b.

$$E = \frac{m v_0^2}{2}, \quad |L| = m|\bar{r} \times \bar{v}| = m b v_0$$

$$k = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0} \ (>0)$$ Τροχιά $$r = \frac{p}{-1 + \varepsilon\cos\varphi}$$ με $$p = \frac{L^2}{mk} = \frac{m b^2 v_0^2}{k}$$

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2L^2 E}{mk^2}} = \sqrt{1 + b^2 v_0^4 m^2 / k^2}$$. Ασύμπτωτες $\cos\varphi_0 = \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \varphi_0 = \arccos\frac{1}{\varepsilon}$

$$\tan\frac{\vartheta_{\varepsilon\kappa\tau\rho}}{2} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_0\right) = \cot\varphi_0 = \frac{\cos\varphi_0}{\sqrt{1 - \cos^2\varphi_0}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} = \frac{k}{b v_0^2 m}$$

Ελάχιστη απόσταση $$r_{min} = \frac{p}{-1 + \varepsilon} = \frac{k}{m v_0^2}\left(\sqrt{1 + b^2 v_0^4 m^2/k^2} + 1\right).$$

(Αν το Q δεν είναι ακίνητο τότε στο σύστημα του κέντρου μάζας θα είναι $\tan\frac{\vartheta_{\varepsilon\kappa\tau\rho}}{2} = \frac{k}{b v_0^2 \mu}$.)

Διατομή σκέδασης:

$$d\Omega = 2\pi \sin\theta_{\varepsilon\kappa\tau\rho} \left| d\theta_{\varepsilon\kappa\tau\rho} \right|.$$

$$d\sigma = 2\pi b \, db$$

$$\tan\frac{\theta_{\varepsilon\kappa\tau\rho}}{2} = \frac{k}{b v_0^2 m} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2\frac{\theta_{\varepsilon\kappa\tau\rho}}{2}} \frac{d\theta_{\varepsilon\kappa\tau\rho}}{2} = -\frac{k}{b^2 v_0^2 m} db \Leftrightarrow d\theta_{\varepsilon\kappa\tau\rho} = -\frac{2 m v_0^2}{k} \sin^2\frac{\theta_{\varepsilon\kappa\tau}}{2} \, db$$

$$d\Omega \underset{\sin\theta_{\varepsilon\kappa\tau} = 2\sin\frac{\theta_{\varepsilon\kappa\tau}}{2}\cos\frac{\theta_{\varepsilon\kappa\tau}}{2}}{=\!=\!=\!=\!=} 4\pi \sin^3\frac{\theta_{\varepsilon\kappa\tau}}{2} \cos\frac{\theta_{\varepsilon\kappa\tau}}{2} \frac{2 m v_0^2}{k} db$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{2\pi b \, db}{d\Omega} = \frac{k^2}{4 m^2 v_0^4 \sin^4\frac{\theta_{\varepsilon\kappa\tau}}{2}}$$ είναι η διαφορική διατομή σκέδασης.

Δίνει $\frac{dN}{d\Omega} = \frac{N}{A}\frac{d\sigma}{d\Omega}$ που μετρά ο ανιχνευτής σε γωνία $\theta_{\varepsilon\kappa\tau\rho}$.

Για δεδομένη v_0 τα σωμάτια πλησιάζουν σε

$\min\{r_{min}\} = \dfrac{2K}{mv_0^2}$ και σκεδάζονται.

Για $\dfrac{2K}{mv_0^2} \lesssim 10^{-12}\,\text{cm}$ το πείραμα αποκλίνει.

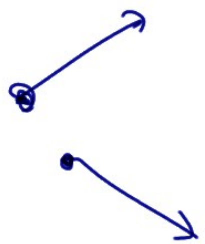
Αυτές είναι οι διαστάσεις των πυρήνα.

Κρούσεις:

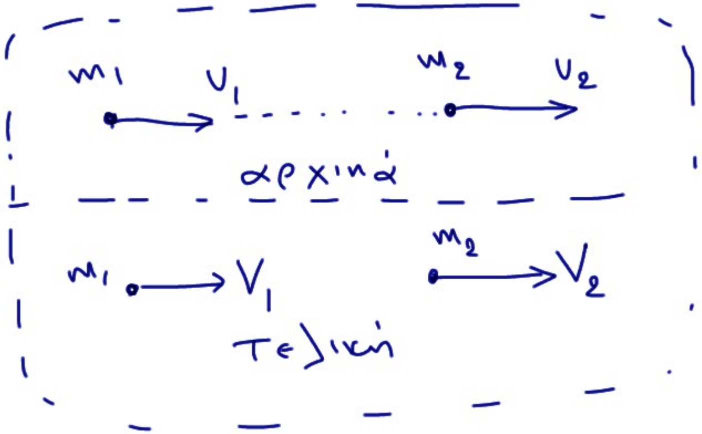
Αρχικά

Αλληλεπίδραση (δυνάμεις επαφής ή από απόσταση).

Τελικά



Συγγραμμικές ελαστικές κρούσεις:



$$\left.\begin{array}{l} m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 V_1 + m_2 V_2 \\ \dfrac{m_1 v_1^2}{2} + \dfrac{m_2 v_2^2}{2} = \dfrac{m_1 V_1^2}{2} + \dfrac{m_2 V_2^2}{2} \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

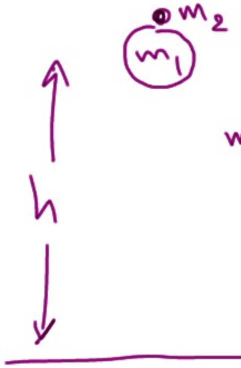
$$\Leftrightarrow \left.\begin{cases} m_1(v_1 - V_1) = -m_2(v_2 - V_2) \\ \underbrace{m_1(v_1 - V_1)}(v_1 + V_1) = \underbrace{-m_2(v_2 - V_2)}(v_2 + V_2) \end{cases}\right\} \xRightarrow[v_2 \neq V_2]{v_1 \neq V_1}$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} m_1(v_1 - V_1) = -m_2(v_2 - V_2) \\ v_1 + V_1 = v_2 + V_2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} V_1 = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \dfrac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 \\ V_2 = \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \dfrac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2 \end{cases}$$

Ισοδύναμα $v_1 - v_2 = -(V_1 - V_2)$ δηλ. η σχετική ταχύτητα αντιστρέφεται.

- Αν $m_1 = m_2$, $V_1 = v_2$, $V_2 = v_1$ (ανταλλαγή ταχυτήτων).
- Αν $m_1 >> m_2$, $V_1 \approx v_1$, $V_2 = 2v_1 - v_2$ (αντιστροφή στο σύστημα του m_1)

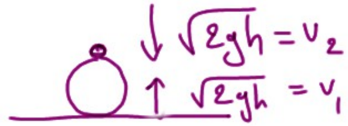
Άσκηση:



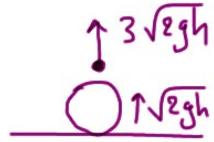
$m_1 >> m_2$

(+) ↑

λίγο πριν



λίγο μετά



$$V_2 \approx 2v_1 - v_2 = 2\sqrt{2gh} - \left(-\sqrt{2gh}\right) = 3\sqrt{2gh}$$

Θα φτάσει σε ύψος $\dfrac{V_2^2}{2g} = 9h$

Μη-ελαστικές, πλαστικές κρούσεις, συγκρατικές.

Συντελεστής αποκατάστασης e : $V_2 - V_1 = e(v_1 - v_2)$

$e=1$ για ελαστικές, $e=0$ για πλαστικές

$0 < e < 1$ ανελαστικές ($e > 1$ – εκρήξεις)

θεωρώ αρχικά ακίνητο το m_2

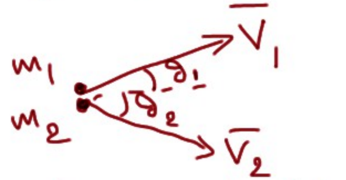
Τότε διατήρηση ορμής

$$\left.\begin{aligned} m_1 v_1 + \cancel{m_2 v_2} &= m_1 V_1 + m_2 V_2 \\ V_2 - V_1 &= e(v_1 - v_2) \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} V_1 &= \frac{m_1 - e m_2}{m_1 + m_2} v_1 \\ V_2 &= \frac{(1+e) m_1}{m_1 + m_2} v_1 \end{aligned}\right. \qquad (\text{για } v_2 = 0)$$

Μεταβολή ενέργειας $\longrightarrow$ $$\frac{\frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2} - \frac{m_1 v_1^2}{2}}{m_1 v_1^2/2} = (e^2 - 1)\frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

Ελαστικές, μη-συγγραμμικές με ακίνητο αρχικά το m_2.

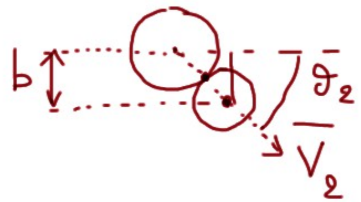


$$m_1\bar{v}_1 = m_1\bar{V}_1 + m_2\bar{V}_2 \qquad (1)$$

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2} \qquad (2)$$

Το σύστημα δεν είναι πλήρες (3 εξισώσεις με 4 αγνώστους — τα διανύσματα στο επίπεδο).

Θέλω άλλη πληροφορία π.χ.



$$\sin\theta_2 = \frac{b}{R_1+R_2}$$

$$\left((1)\right)^2 \rightsquigarrow m_1^2 v_1^2 = m_1^2 V_1^2 + m_2^2 V_2^2 + 2m_1 m_2 \bar{V}_1\cdot\bar{V}_2 \xrightarrow{(2)}$$

$$\bar{V}_1\cdot\bar{V}_2 = \frac{(m_1-m_2)V_2^2}{2m_1} \Leftrightarrow \cos(\theta_1+\theta_2) = \frac{(m_1-m_2)V_2}{2m_1V_1}$$

Αν $m_1=m_2$ τότε $\theta_1+\theta_2=\frac{\pi}{2}$ (δηλ. μετά την κρούση $\bar{V}_1 \perp \bar{V}_2$.)

Στο σύστημα του κέντρου μάζας :

$$\bar V = \frac{m_1 \bar v_1 + \cancel{m_2 \bar v_2}}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 \bar V_1 + m_2 \bar V_2}{m_1 + m_2} .$$

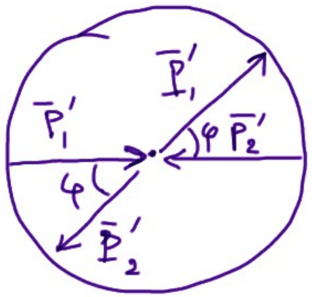
$m_1 \bar v_1' + m_2 \bar v_2' = 0 \Leftrightarrow \bar p_1' + \bar p_2' = 0$ αντίθετες οι ορμές.

Μετά την κρούση $m_1 \bar V_1' + m_2 \bar V_2' = 0$ (πάλι αντίθετες) $\bar{\mathcal{P}}_1' + \bar{\mathcal{P}}_2' = 0$

Για ελαστικής κρούσης $\dfrac{p_1'^2}{2m_1} + \dfrac{p_2'^2}{2m_2} = \dfrac{\mathcal{P}_1'^2}{2m_1} + \dfrac{\mathcal{P}_2'^2}{2m_2} \xLeftrightarrow[\mathcal{P}_1' = \mathcal{P}_2']{p_1' = p_2'}$

$\Leftrightarrow$ τα $\bar p_1'$, $\bar p_2'$, $\bar{\mathcal{P}}_1'$, $\bar{\mathcal{P}}_2'$ έχουν ίσα μέτρα,

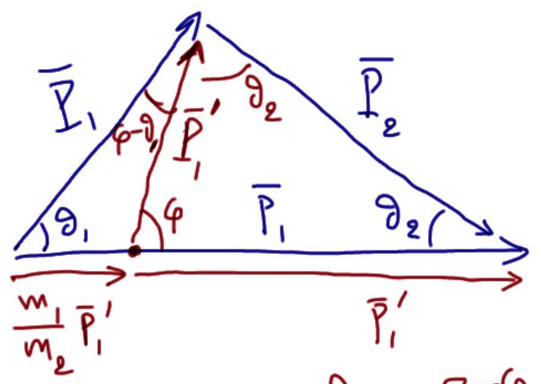
ίσα με $m_2 |\bar v_2'| = m_2 |\bar V| = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} |\bar v_1|$.

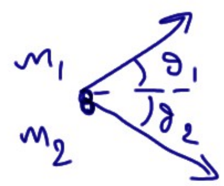


Γυρίζοντας στο σύστημα εργαστηρίου (όπου $v_2 = 0$):

$\bar p_1 = m_1 \bar V + \bar p_1'$, $\cancel{\bar p_2}^{\,0} = m_2 \bar V + \bar p_2'$, $\bar p_2' = -\bar p_1'$ άρα $\bar V = \bar p_1'/m_2$, $\bar p_1 = \frac{m_1+m_2}{m_2}\bar p_1'$

Μετά την κρούση όμοια $\bar P_1 = \underbrace{m_1 \bar V}_{\frac{m_1}{m_2}\bar p_1'} + \bar P_1'$, $\bar P_2 = m_2 \bar V + \bar P_2'$, $\bar P_2' = -\bar P_1'$





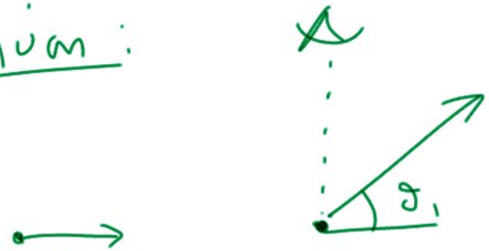
$$\varphi = \pi - 2\theta_2 \Leftrightarrow \theta_2 = \frac{\pi-\varphi}{2} \quad \text{και} \quad \sin\frac{\varphi}{2} = \frac{P_2/2}{P_1'} \xRightarrow{P_1' = m_2 V} V_2 = 2V\sin\frac{\varphi}{2}$$

$$\frac{\sin\theta_1}{P_1'} = \frac{\sin(\varphi-\theta_1)}{\frac{m_1}{m_2}p_1'} \underset{P_1'=p_1'}{\Longrightarrow} \sin(\varphi-\theta_1) = \frac{m_1}{m_2}\sin\theta_1 \Leftrightarrow \tan\theta_1 = \frac{\sin\varphi}{\frac{m_1}{m_2}+\cos\varphi}$$

Άσκηση:

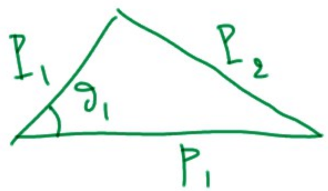
Ρίχνω πολλά σώματα m σε ακίνητους στόχους 2m.
Κρούση ελαστική.
Αν θέλω να διαλέξω σωμάτια m που έχουν μετά την κρούση ενέργεια $E_1 = \frac{E}{3}$ σε ποια γωνία να κοιτάξω;

Λύση:



$$E_1 = \frac{E}{3} \Leftrightarrow \frac{P_1'^2}{2m_1} = \frac{1}{3}\frac{p_1^2}{2m_1} \Leftrightarrow P_1' = \frac{p_1}{\sqrt{3}}$$

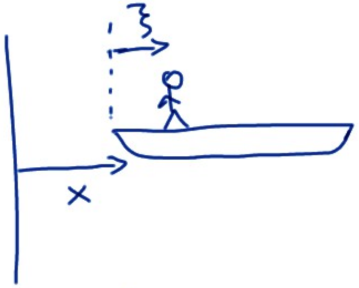
Αφού ελαστική $\quad E_2 = \frac{2E}{3} \Leftrightarrow \frac{P_2^2}{2m_2} = \frac{2}{3}\frac{p_1^2}{2m_1} \xRightarrow{m_2=2m_1} P_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}p_1$



$$P_2^2 = P_1'^2 + p_1^2 - 2P_1'p_1\cos\theta_1 \Leftrightarrow \cos\theta_1 = 0 \Leftrightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{2}$$

Άσκηση: Άνθρωπος σε βάρκα, αρχικά ακίνητα.

Ο άνθρωπος κινείται για κάποιο χρονικό διάστημα, μετά πάλι ακίνητος.



Αν η δύναμη αντίστασης από το νερό στη βάρκα είναι ανάλογη της ταχύτητας, δείξτε ότι η βάρκα τελικά θα σταματήσει στην αρχική της θέση.

Λύση:

$$\bar{r}_\beta = x\,\hat{x}\,, \quad \bar{v}_\beta = \dot{x}\,\hat{x}\,, \quad \bar{v}_\alpha = \bar{v}_\beta + \dot{\xi}\,\hat{x} = (\dot{x}+\dot{\xi})\,\hat{x}$$

Ολική ορμή $\bar{P} = \left[M\dot{x} + m(\dot{x}+\dot{\xi})\right]\hat{x} = \left[(M+m)\dot{x} + m\dot{\xi}\right]\hat{x}$

$$\dot{\bar{P}} = \bar{F}_{\varepsilon\xi} = -\lambda\,\bar{v}_\beta \Leftrightarrow (M+m)\ddot{x} + m\ddot{\xi} = -\lambda\dot{x} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (M+m)\dot{x} + \lambda x = -m\dot{\xi} + C_1$ με $C_1 = 0$ από αρχικές συνθήκες

Στην τελική φάση όπου $\dot{\xi} = 0$ ισχύει $(M+m)\dot{x} + \lambda x = 0$

$\Leftrightarrow x = D\,e^{-\frac{\lambda}{M+m}t}$ Για $t \to \infty$, $x \to 0$.