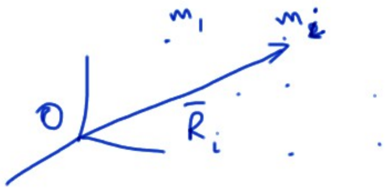
Συστήματα σωματιδίων

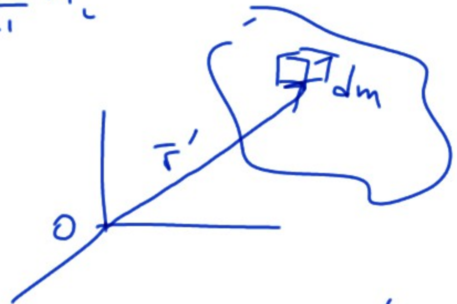
Έστω m_i, $i=1,2,\dots,N$ σωμάτια με θέσεις $\bar{R}_i(t)$.



Κέντρο μάζας (ΚΜ)

$$\vec{R} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \bar{R}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$$

Για συνεχείς κατανομές



$$\bar{R} = \frac{\int dm\, \bar{r}'}{\int dm}$$

δηλ. $$\frac{\iiint \bar{r}' \rho \, d\tau'}{\iiint \rho \, d\tau'} \quad \text{ή} \quad \frac{\iint \bar{r}' \sigma \, d\alpha'}{\iint \sigma \, d\alpha} \quad \text{ή} \quad \frac{\int \bar{r}' \lambda \, dl}{\int \lambda \, dl}$$

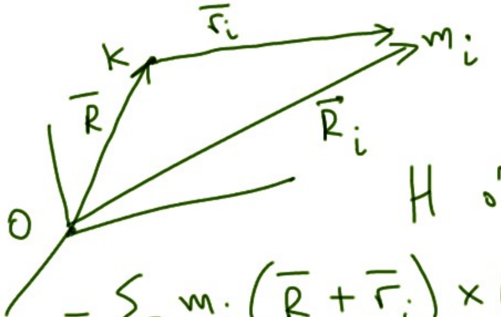
$$d\tau' = d^3 \bar{r}'$$

Ορμή ΚΜ:

$$\vec{P} = \sum_i m_i \dot{\vec{R}}_i = \frac{d}{dt}\left(\sum_i m_i \vec{R}_i\right) = \frac{d}{dt}\left(\sum_i m_i \vec{R}\right) = M\dot{\vec{R}} \quad \text{όπου} \quad \sum_i m_i = M$$

Δηλ. η ολική ορμή του συστήματος υλικών σημείων ισούται με την ορμή ενός σημείου μάζας ίσης με την ολική μάζα M και ταχύτητα αυτή του ΚΜ.

Στροφορμή ως προς κάποιο ακίνητο σημείο O:



Έστω $\bar{r}_i$ το διάνυσμα θέσης του m_i ως προς το ΚΜ.

Τότε $\bar{R}_i = \bar{R} + \bar{r}_i$, $\dot{\bar{R}}_i = \dot{\bar{R}} + \dot{\bar{r}}_i$

Η ολική στροφορμή ως προς το O: $\bar{L} = \sum_i m_i \bar{R}_i \times \dot{\bar{R}}_i =$

$$= \sum_i m_i (\bar{R} + \bar{r}_i) \times (\dot{\bar{R}} + \dot{\bar{r}}_i) = \underbrace{\sum_i m_i}_{M} \bar{R} \times \dot{\bar{R}} + \bar{R} \times \underbrace{\sum_i m_i \dot{\bar{r}}_i}_{0} + \underbrace{\sum_i m_i \bar{r}_i}_{0} \times \dot{\bar{R}} + \sum_i m_i \bar{r}_i \times \dot{\bar{r}}_i$$

$$\Leftrightarrow \bar{L} = M \bar{R} \times \dot{\bar{R}} + \sum_i m_i \bar{r}_i \times \dot{\bar{r}}_i$$

δηλ. η ολική στροφορμή ισούται με το άθροισμα της στροφορμής του ΚΜ ως προς το O συν την στροφορμή του συστήματος ως προς το ΚΜ.

Κινητική ενέργεια :

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\dot{\vec{R}}_i\right)^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}_i\right)^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\dot{\vec{R}}\right)^2 +$$

$$+ \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\dot{\vec{r}}_i\right)^2 + \dot{\vec{R}} \cdot \underbrace{\sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i}_{0} \Leftrightarrow T = \frac{M}{2} \dot{\vec{R}}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2}$$

Δηλ. η κινητική ενέργεια του συστήματος ισούται με την κινητική ενέργεια του ΚΜ συν την κινητική ως προς το Κ.Μ.

Έστω στην m_i ασκείται εξωτερική δύναμη $\vec{F}_i^{\varepsilon\xi}$ και

εσωτερικές $\sum_{j\neq i} \bar{F}_{ji}$ → δύναμη από το m_j στο m_i.

Αν ισχύει ο 3ος νόμος του Νεύτωνα, $\vec{F}_{ji} = -\bar{F}_{ij}$.

<u>Κίνηση του ΚΜ</u>:

$$m_i \ddot{\vec{R}}_i = \bar{F}_i^{\varepsilon\xi} + \sum_{j\neq i} \vec{F}_{ji}$$

Αθροίζοντας ως προς i:

$$M\ddot{\bar{R}} = \sum_i \bar{F}_i^{\varepsilon\xi} + \overbrace{\sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}} \bar{F}_{ji}}^{\frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}} \bar{F}_{ji} + \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}} \bar{F}_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}} \left(\bar{F}_{ji} + \bar{F}_{ij}\right) = 0}$$

δηλ. $M\ddot{\bar{R}} = \sum_i \bar{F}_i^{\varepsilon\xi} = \vec{F}^{\varepsilon\xi}$

Το ΚΜ κινείται σαν να ήταν ένα σημείο με μάζα M στο οποίο ασκείται η ολική εξωτερική δύναμη.

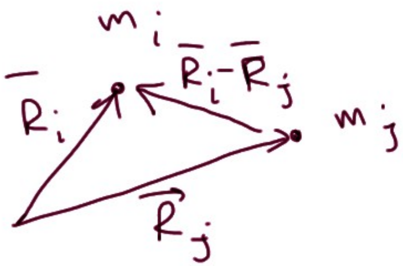
Παράγωγος ολικής στροφορμής:

$$\dot{\bar{L}} = \sum_i m_i \bar{R}_i \times \ddot{\bar{R}}_i = \sum_i \bar{R}_i \times \bar{F}_i = \sum_i \bar{R}_i \times \bar{F}_i^{\varepsilon\xi} + \underbrace{\sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}} \bar{R}_i \times \vec{F}_{ji}}$$

$$\frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}} \bar{R}_i \times \bar{F}_{ji} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}} \bar{R}_j \times \underbrace{\bar{F}_{ij}}_{-\bar{F}_{ji}} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}} \left(\bar{R}_i - \bar{R}_j\right) \times \bar{F}_{ji}$$

Αφού ισχύει ο 3ος νόμος Νεύτωνα, οι δυνάμεις είναι κεντρικές,

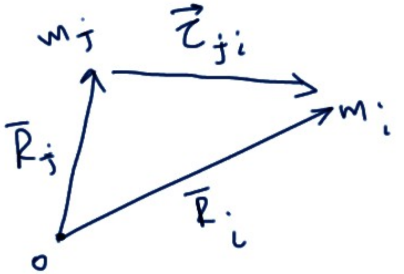


δηλ. $\bar{F}_{ji} \,//\, \bar{R}_i - \bar{R}_j$

Άρα η παράγωγος της ολικής στροφορμής ισούται με τη συνολική ροπή των εξωτερικών δυνάμεων.

Ολοκλήρωμα ενέργειας :

Έστω ότι οι εξωτερικές δυνάμεις είναι συντηρητικές $\bar{F}_i^{\varepsilon\xi} = -\bar{\nabla}_i V_i^{\varepsilon\xi}(\bar{R}_i)$



και οι εσωτερικές δυνάμεις "κεντρικές"

$$\bar{F}_{ji} = f(r_{ji})\,\hat{r}_{ji} \quad \text{όπου} \quad \bar{r}_{ji} = \bar{R}_i - \bar{R}_j\ ,\ r_{ji} = |\bar{R}_i - \bar{R}_j|\ ,$$

$$\hat{r}_{ji} = \frac{\bar{R}_i - \bar{R}_j}{|\bar{R}_i - \bar{R}_j|}$$

οπότε προέρχονται από δυναμική ενέργεια $V_{ji}(r_{ji}) = V_{ji}\left(|\bar{R}_i - \bar{R}_j|\right) = V_{ij}(r_{ji})$

και ισχύει $\bar{F}_{ji} = -\nabla_i V_{ji} = \underbrace{-\frac{d}{dr_{ji}} V_{ji}(r_{ji})}_{f(r_{ji})}\ \underbrace{\nabla_i r_{ji}}_{\hat{r}_{ji}}$

$\nabla_i \to$ παραγώγιση ως προς $\bar{R}_i$

(ισχύει $\bar{F}_{ij} = -\bar{F}_{ij}$)

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_i \frac{m_i}{2}\dot{\bar{R}}_i^2\right) = \sum_i m_i \dot{\bar{R}}_i \cdot \ddot{\bar{R}}_i = \sum_i \dot{\bar{R}}_i \cdot \bar{F}_i^{\varepsilon\xi} + \sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} \dot{\bar{R}}_i \cdot \bar{F}_{ji}^{\varepsilon\sigma}$$

Όμως $\displaystyle \sum_i \dot{\bar{R}}_i \cdot \bar{F}_i^{\varepsilon\xi} = -\sum_i \frac{d\bar{R}_i \cdot \nabla V_i^{\varepsilon\xi}(\bar{R}_i)}{dt} = -\sum_i \frac{dV_i^{\varepsilon\xi}(\bar{R}_i)}{dt}$

και $\displaystyle \sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} \dot{\bar{R}}_i \cdot \bar{F}_{ji}^{\varepsilon\sigma} = \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} \underbrace{\left(\dot{\bar{R}}_i - \dot{\bar{R}}_j\right)}_{\frac{d\vec{r}_{ji}}{dt}} \cdot \underbrace{\bar{F}_{ji}^{\varepsilon\sigma}}_{-\frac{dV_{ij}}{dr_{ji}}\hat{r}_{ji}} = -\frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} \frac{dV_{ij}}{dt}$

$$\hat{r}_{ji} \cdot \frac{d\vec{r}_{ji}}{dt} = \frac{dr_{ji}}{dt}$$

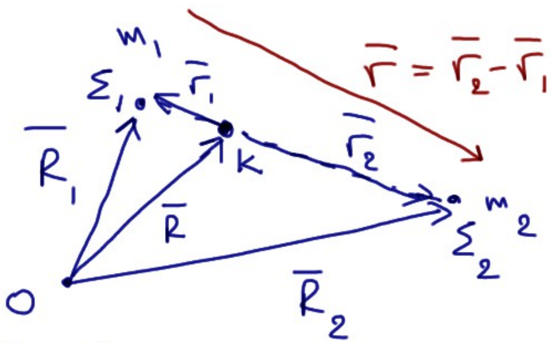
$$= -\sum_{i>j} \frac{dV_{ij}}{dt}$$

Άρα $\displaystyle \frac{d}{dt}\underbrace{\left(T + \sum_i V_i^{\varepsilon\xi} + \sum_{i>j} V_{ij}\right)}_{E} = 0$

συνεισφέρει η ενέργεια αλληλεπίδρασης V_{ij} μόνο μια φορά

Η ενέργεια γράφεται $\displaystyle \frac{M\dot{\bar{R}}^2}{2} + \sum_i V_i^{\varepsilon\xi} + \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\bar{r}}_i^2 + \underbrace{\sum_{i>j} V_{ij}} = E = \sigma\tau\alpha\vartheta$

Το πρόβλημα των δύο σωμάτων:



$$\bar{r} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1 = \bar{R}_2 - \bar{R}_1$$

$$\bar{R} = \frac{m_1 \bar{R}_1 + m_2 \bar{R}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\bar{r}_1 = \overline{K\Sigma_1} = \overline{O\Sigma_1} - \overline{OK} = \bar{R}_1 - \frac{m_1 \bar{R}_1 + m_2 \bar{R}_2}{m_1 + m_2} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\left(\bar{R}_2 - \bar{R}_1\right)$$

$$\bar{r}_2 = \overline{K\Sigma_2} = \overline{O\Sigma_2} - \overline{OK} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\left(\bar{R}_2 - \bar{R}_1\right)$$

(ισχύει $m_1 \bar{r}_1 + m_2 \bar{r}_2 = 0$)

Έστω $\bar{r} = \overline{\Sigma_1 \Sigma_2} = \bar{R}_2 - \bar{R}_1 = \bar{r}_2 - \bar{r}_1$

Είναι $\bar{R}_1 = \bar{R} + \bar{r}_1 = \bar{R} - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\bar{r}$ και $\bar{R}_2 = \bar{R} + \bar{r}_2 = \bar{R} + \frac{m_1}{m_1 + m_2}\bar{r}$.

Οι εξισώσεις κίνησης για τα m_1, m_2 είναι
$$\begin{cases} m_1 \ddot{\bar{R}}_1 = \bar{F}_{21} + \bar{F}_1^{\varepsilon\xi} & (1) \\ m_2 \ddot{\bar{R}}_2 = \bar{F}_{12} + \bar{F}_2^{\varepsilon\xi} & (2) \end{cases}$$

$$(1) + (2) \xrightarrow{\bar{F}_{12} + \bar{F}_{21} = 0} \boxed{(m_1 + m_2)\ddot{\bar{R}} = \bar{F}_1^{\varepsilon\xi} + \bar{F}_2^{\varepsilon\xi}}$$ δίνει την κίνηση του ΚΜ.

$$\frac{(2)}{m_2} - \frac{(1)}{m_1} \xrightarrow{\bar{F}_{21} = -\bar{F}_{12}} \ddot{\bar{R}}_2 - \ddot{\bar{R}}_1 = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\bar{F}_{12} + \frac{1}{m_2}\bar{F}_2^{\varepsilon\xi} - \frac{1}{m_1}\bar{F}_1^{\varepsilon\xi}$$

Ορίζοντας την ανηγμένη μάζα $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \Leftrightarrow \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

γράφω $\mu \ddot{\bar{r}} = \bar{F}_{12} + \mu\left(\frac{1}{m_2}\bar{F}_2^{\varepsilon\xi} - \frac{1}{m_1}\bar{F}_1^{\varepsilon\xi}\right) \to$ δίνει την σχετική θέση $\bar{r}$.

(Αν το σύστημα απομονωμένο, δηλ. $\bar{F}_{1,2}^{\varepsilon\xi} = 0$ τότε $\ddot{\bar{R}} = 0$, $\mu \ddot{\bar{r}} = \bar{F}_{12}$)

Σύνοψη:

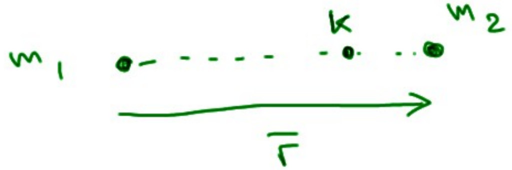
$$\left.\begin{aligned} \bar{R} &= \frac{m_1 \bar{R}_1 + m_2 \bar{R}_2}{m_1 + m_2} \\ \bar{r} &= \bar{R}_2 - \bar{R}_1 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} \bar{R}_1 &= \bar{R} - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\bar{r} \\ \bar{R}_2 &= \bar{R} + \frac{m_1}{m_1 + m_2}\bar{r} \end{aligned}\right\}$$

Όμοια $\left.\begin{aligned} 0 &= m_1 \bar{r}_1 + m_2 \bar{r}_2 \\ \bar{r} &= \bar{r}_2 - \bar{r}_1 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{aligned} \bar{r}_1 &= -\frac{m_2 \bar{r}}{m_1 + m_2} \\ \bar{r}_2 &= \frac{m_1 \bar{r}}{m_1 + m_2} \end{aligned}$

$$(m_1 + m_2)\ddot{\bar{R}} = \bar{F}_1^{\varepsilon\xi} + \bar{F}_2^{\varepsilon\xi}$$

$$\mu \ddot{\bar{r}} = \bar{F}_2^{\varepsilon\sigma} + \mu\left(\frac{1}{m_2}\bar{F}_2^{\varepsilon\xi} - \frac{1}{m_1}\bar{F}_1^{\varepsilon\xi}\right) \quad \text{όπου} \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Παράδειγμα: κίνηση δύο μαζών στο βαρυτικό τους πεδίο:



Απομονωμένο σύστημα

Άρα $\ddot{\bar{R}} = 0$ δηλ. το ΚΜ εκτελεί ευθύγραμμη/ομαλή κίνηση.

Στο σύστημα του ΚΜ, συνεχώς $\bar{R} = 0$.

(είναι αδρανειακό).

$\mu \ddot{\bar{r}} = \bar{F}_{12}$ → δύναμη από το m_1 στο m_2. > $\bar{F}_{12} = -\dfrac{G m_1 m_2}{r^2}\hat{r}$

↳ θέση του m_2 ως προς το m_1

Δηλ. $\mu \ddot{\bar{r}} = -\dfrac{G \overbrace{m_1 m_2}^{\mu(m_1+m_2)}}{r^2}\hat{r} \iff \boxed{\mu \ddot{\bar{r}} = -\dfrac{G(m_1+m_2)\mu}{r^2}\hat{r}}$

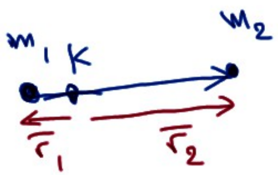
έχουμε ίδιο πρόβλημα με κίνηση μάζας μ σε πεδίο βαρύτητας που δημιουργεί μάζα $m_1 + m_2$.

$$\mu \ddot{\bar{r}} = -\frac{G(m_1+m_2)\mu}{r^2}\hat{r}$$

$$\bar{L} = \mu\, \bar{r} \times \dot{\bar{r}} \quad , \quad E = \underbrace{\frac{\cancel{\mu}\, \dot{\bar{r}}^2}{2}}_{\frac{\mu \dot{r}^2}{2} + \underbrace{\frac{\mu r^2 \dot{\varphi}^2}{2}}_{L^2/2\mu r^2}} - \frac{G(m_1+m_2)\mu}{r}$$

Δείξτε ότι $\bar{L}$ = άθροισμα στροφορμής των m_1, m_2

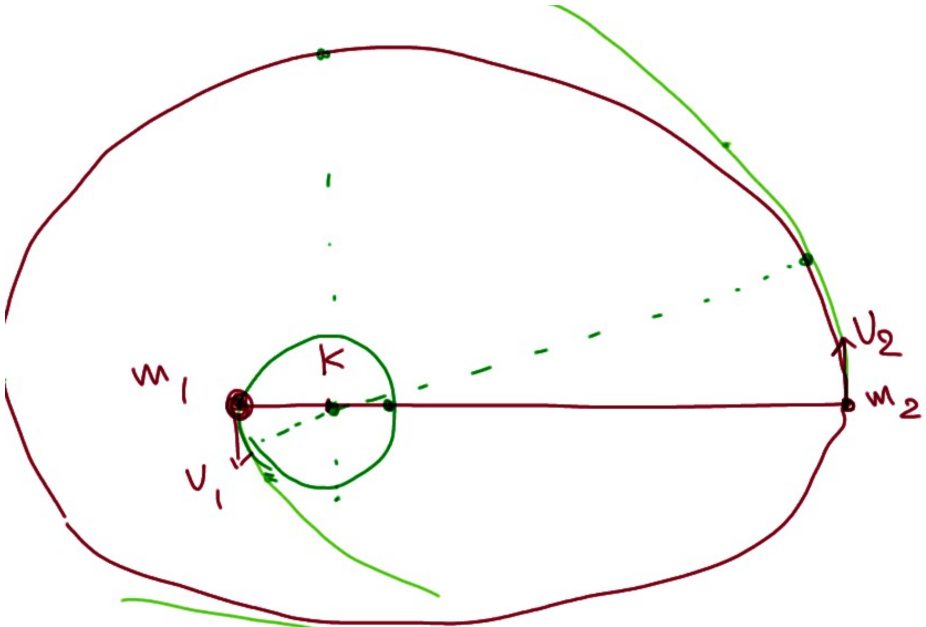
και $E = \frac{1}{2} m_1 \dot{\bar{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\bar{r}}_2^2 - \frac{G m_1 m_2}{r}$

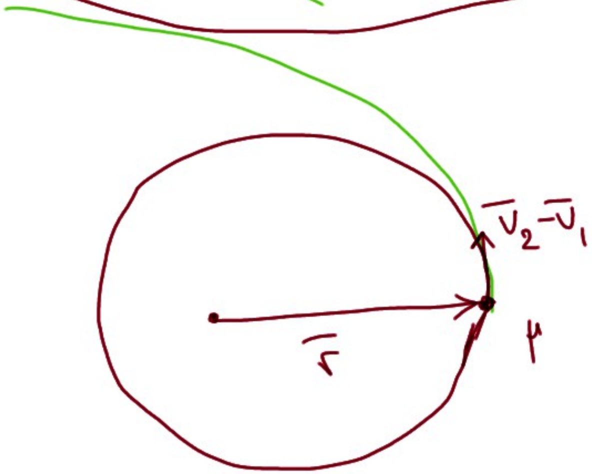


$$\bar{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1+m_2}\bar{r} = -\frac{m_2/m_1}{1+m_2/m_1}\bar{r}$$

$$\bar{r}_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}\bar{r} = \frac{1}{1+m_2/m_1}\bar{r}$$

Αν $m_1 >> m_2$ τότε $\bar{r}_1 \approx -\frac{m_2}{m_1}\bar{r}$, $\bar{r}_2 = \bar{r}$





$$m_1 r_1 = m_2 r_2$$

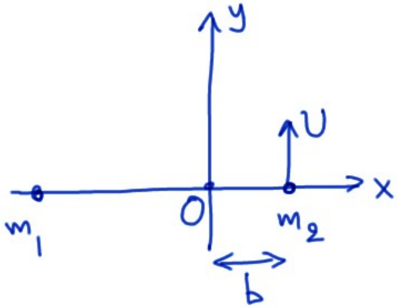
$$m_1 v_1 = m_2 v_2$$

$$\bar{r}_1 = -\frac{\frac{m_2}{m_1}}{1+\frac{m_2}{m_1}}\,\bar{r} \qquad r_1 = \frac{\frac{m_2}{m_1}}{1+\frac{m_2}{m_1}}\,r, \ \varphi_1 = \varphi + \pi$$

$$\bar{r}_2 = \frac{1}{1+\frac{m_2}{m_1}}\,\bar{r} \qquad r_2 = \frac{r}{1+\frac{m_2}{m_1}}, \ \varphi_2 = \varphi$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2 \alpha^3}{G(m_1+m_2)}$$ περιοδος από 3° νόμο Kepler.

$$\alpha_1 = \frac{m_2/m_1}{1+m_2/m_1}\,\alpha, \quad \alpha_2 = \frac{1}{1+\frac{m_2}{m_1}}\,\alpha$$



Τα m_1, $m_2=\lambda m_1$ αλληλεπιδρούν και η δυναμική ενέργειά τους είναι $V=-k/r^n$, $k>0$, $0<n<2$.
Το σύστημα είναι απομονωμένο και το κέντρο μάζας σταθερό στο O.
Αρχικά το m_2 στο $\bar{R}_{20}=b\hat{x}$ και κινείται με $\bar{V}_{20}=U\hat{y}$.

(α) Ποια η θέση και η ταχύτητα του m_1 αρχικά;
(β) Ποια εξίσωση καθορίζει την κίνηση των μαζών; Υπάρχει ολοκλήρωμα ενέργειας και στροφορμής;
(γ) Για ποια U τα σώματα κινούνται κυκλικά;
(δ) Για ποια U το σύστημα διαλύεται;
(ε) Ποια εξίσωση καθορίζει τις τροχιές; Ποια η λύση της για $n=1$;

<u>Λύση:</u>

(α) $m_1\bar{R}_{10}+m_2\bar{R}_{20}=0 \Leftrightarrow \bar{R}_{10}=-\lambda b\hat{x}$, $m_1\bar{V}_{10}+m_2\bar{V}_{20}=0 \Leftrightarrow \bar{V}_{10}=-\lambda U\hat{y}$

(β) $\mu\ddot{\bar{r}}=\bar{F}_{12}=-\nabla V=-\frac{nk}{r^{n+1}}\hat{r}$ με $\mu=\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}=\frac{\lambda}{1+\lambda}m_1$.

Κεντρική δύναμη άρα υπάρχει ολοκλήρωμα στροφορμής. $\bar{L}=\mu\bar{r}\times\bar{v}$, $\bar{v}=\dot{\bar{r}}$

Αρχικά $\bar{r}_0=\bar{R}_{20}-\bar{R}_{10}=(1+\lambda)b\hat{x}$, $\bar{v}_0=\bar{V}_{20}-\bar{V}_{10}=(1+\lambda)U\hat{y}$, $\bar{L}=\mu(1+\lambda)b\hat{x}\times(1+\lambda)U\hat{y}=L\hat{z}$

με $L=\mu bU(1+\lambda)^2=\mu r_0 v_0$. Δηλ. $\mu r^2\dot{\varphi}=L=$ σταθ.

Αφού η δύναμη συντηρητική υπάρχει ολοκλήρωμα ενέργειας

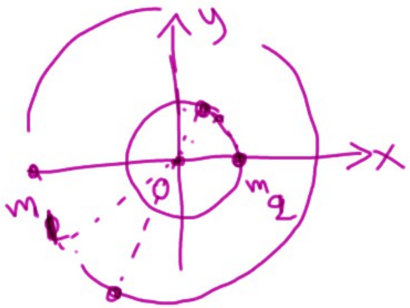
$$\boxed{\mu \ddot{\bar{r}} = -\frac{nk}{r^{n+1}}\hat{r}}$$

$$E = \frac{\mu \dot{r}^2}{2} + \frac{\mu r^2 \dot{\varphi}^2}{2} - \frac{k}{r^n} \xrightarrow{\dot{\varphi} = L/\mu r^2} \frac{\mu \dot{r}^2}{2} + \underbrace{\frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r^n}}_{V_{eff}(r)}$$

με $E = \frac{\mu v_0^2}{2} - \frac{k}{r_0^n} = \frac{\mu (1+\lambda)^2 U^2}{2} - \frac{k}{(1+\lambda)^n b^n}$

(αρχικά $\dot{r}_0 = 0$ αφού $\bar{r}_0 \perp \bar{v}_0$).

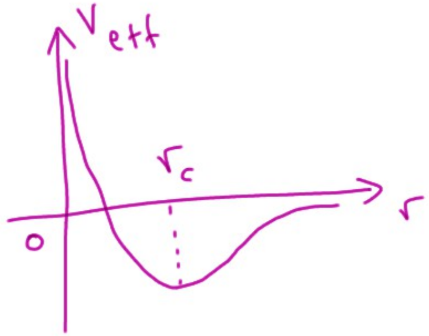
(γ)



$$\frac{m_2 U^2}{b} = \frac{nk}{r_0^{n+1}} \Leftrightarrow U = \sqrt{\frac{n b k}{m_2 r_0^{n+1}}} = \sqrt{\frac{nk}{m_2 (\lambda+1)^{n+1} b^n}}$$

(ισχύει αντίστοιχα και $\frac{m_1 (\lambda U)^2}{\lambda b} = \frac{nk}{r_0^{n+1}}$, αλλά και $\frac{\mu v_0^2}{r_0} = \frac{nk}{r_0^{n+1}}$)

Αλλιώς: $V_{eff} = \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r^n}$, $V'_{eff} = -\frac{L^2}{\mu r^3} + \frac{nk}{r^{n+1}}$



V_{eff} ελάχιστο στο $r_c = \left(\frac{L^2}{n\mu k}\right)^{\frac{1}{2-n}} = \left(\frac{\mu r_0^2 v_0^2}{nk}\right)^{\frac{1}{2-n}}$

Κυκλική τροχιά όταν $r_0 = r_c \Leftrightarrow r_0^{2-n} = \frac{\mu r_0^2 v_0^2}{nk} \Leftrightarrow U = \sqrt{\frac{nk}{m_2(1+\lambda)^{n+1} b^n}}$

(δ) Από το γράφημα του V_{eff} βλέπουμε ότι για να είναι επιτρεπτή η περιοχή $r = \infty$ πρέπει $E \geq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\mu(1+\lambda)^2 U^2}{2} \geq \frac{k}{(1+\lambda)^n b^n} \Leftrightarrow U \geq \sqrt{\frac{2k}{m_2(1+\lambda)^{n+1} b^n}}$$

(Αλλιώς: $\frac{m_1 v_{10}^2}{2} + \frac{m_2 v_{20}^2}{2} - \frac{k}{r_0^n} = E$ και απαιτώ $E \geq 0$).

(ε) $u'' + u = -\frac{\mu F}{L^2 u^2} = \frac{\mu n k}{L^2} u^{n-1} = \frac{nk}{\mu r_0^2 v_0^2} u^{n-1}$

Για $n=1$, $u'' + u = \frac{k}{\mu r_0^2 v_0^2} \Leftrightarrow u = \frac{k}{\mu r_0^2 v_0^2} + C_1 \sin\varphi + C_2 \cos\varphi$.

Αρχικά $\varphi = 0$, $u = \frac{1}{r_0}$, $u' = 0$ (διότι $\dot{r}_0 = 0$) οπότε $r = \dfrac{\mu r_0^2 v_0^2 / k}{1 + \left(\frac{\mu r_0 v_0^2}{k} - 1\right)\cos\varphi}$

Κωνική τομή με εκκεντρότητα $\varepsilon = \left| \frac{\mu r_0 v_0^2}{k} - 1 \right| = \left| \frac{(1+\lambda)^2 m_2 b U^2}{k} - 1 \right|$