Σχετικιστική δυναμική (ειδική σχετικότητα):

Νόμος Νεύτωνα $\frac{d\bar{p}}{dt}=\bar{F}$ όπου $\bar{p}=\gamma m\bar{v}$, $\bar{v}=\frac{d\bar{r}}{dt}$, $\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\bar{v}^2/c^2}}$

Αν $\bar{F}=-\nabla V$, $\bar{v}\cdot\frac{d\bar{p}}{dt}=-\bar{v}\cdot\bar{\nabla}V$ (*)

$$\bar{v}\cdot\frac{d\bar{p}}{dt}=\frac{m}{\gamma}\,\gamma\bar{v}\cdot\frac{d(\gamma\bar{v})}{dt}=\frac{mc^2}{2\gamma}\frac{d}{dt}\Big(\underbrace{\gamma^2\frac{v^2}{c^2}}_{\gamma^2-1}\Big)=mc^2\frac{d\gamma}{dt}=\frac{d}{dt}(\gamma mc^2)$$

$-\bar{v}\cdot\bar{\nabla}V=-\frac{d\bar{r}\cdot\nabla V}{dt}=-\frac{dV}{dt}$ αν $V=V(\bar{r})$ (δηλ. $\frac{\partial V}{\partial t}=0$).

Άρα (*) $\rightarrow \frac{d}{dt}(\gamma mc^2+V)=0 \Leftrightarrow \boxed{\gamma mc^2+V=E}$ =σταθ

ισοδύναμο με $\sqrt{p^2c^2+m^2c^4}+V=E \Leftrightarrow \frac{p^2}{2m}+\frac{m^2c^4-(E-V)^2}{2mc^2}=0$

Ορίζοντας τον ιδιόχρονο τ από

$$c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \iff \left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 = 1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 =$$

$$= 1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{\gamma^2} \iff \boxed{\frac{dt}{d\tau} = \gamma}$$

είναι $\bar{p} = m\dfrac{d\bar{r}}{d\tau} = m\dot{\bar{r}}$, $\dot{\bar{p}} = \gamma \bar{F}$

$$\frac{d\bar{p}}{d\tau} = \frac{d\bar{p}}{dt}\gamma$$

Σε πολικές $\dot{\bar{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\varphi}\hat{\varphi}$, $\dot{\bar{p}} = m\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)\hat{r} + \dfrac{m}{r}\dfrac{d}{d\tau}\left(r^2\dot{\varphi}\right)\hat{\varphi}$

Αν η δύναμη κεντρική $\left(F = -\dfrac{dV}{dr}\right)$ τότε $\begin{cases} m\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right) = \gamma F \quad (1) \quad \text{με } \gamma = \dfrac{E-V}{mc^2} \quad (3) \\ m r^2 \dot{\varphi} = L \quad (2) \end{cases}$

(Διαφορές: Το γ στην $\hat{r}$ συνιστώσα και $(\dot{\ }) = \dfrac{d}{d\tau}$)

Η (1) μέσω της (2) ανάγει το πρόβλημα σε μονοδιάστατο και είναι ισοδύναμη με το ολοκλήρωμα ενέργειας $\dfrac{m\dot{r}^2}{2} + \dfrac{L^2}{2mr^2} + \dfrac{m^2c^4 - (E-V)^2}{2mc^2} = 0$ (4)

Εξίσωση τροχιάς $u'' + u = -\frac{m F \gamma}{L^2 u^2} = -\frac{F(E-V)}{c^2 L^2 u^2}$ (5)

Ίδια με $u'^2 + u^2 + \frac{m^2c^4 - (E-V)^2}{L^2c^2} = 0$ (6)

η οποία προκύπτει από (4) με $\dot{r} = \frac{d(1/u)}{d\varphi}\dot{\varphi} = -\frac{u'}{\cancel{u^2}}\frac{L}{m}\cancel{u^2} = -\frac{L}{m}u'$.

Η τροχιά επίπεδη ($\bar{r} \times \bar{F} = 0$ δηλ. $\bar{L} = \sigma\tau\alpha\theta$ άρα
κίνηση στο επίπεδο $\bar{L} \cdot \bar{r} = 0$)

Εφαρμογή : κίνηση e^- γύρω από πυρήνα Ze

(Άτομο Bohr, $1^η$ στοιβάδα $L=\hbar$

$$\left.\begin{aligned} F = \frac{mv^2}{r} &\Leftrightarrow \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{mv^2}{r} \\ L=\hbar &\Leftrightarrow mvr = \hbar \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{v}{c} = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar c} = \frac{Z}{137}, \quad \underbrace{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar c}}_{\text{σταθερά της λεπτής υφής}} =$$

Για μεγάλα Z πρέπει να λάβω υπόψη ειδική σχετικότητα.)

Με ειδική σχετικότητα :

$$\bar{F} = -\frac{k}{r^2}\hat{r} \quad \text{όπου} \quad k = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0}, \quad V = -\frac{k}{r}$$

κίνηση επίπεδη, χρησιμοποιώ πολικές.

Εξίσωση τροχιάς $u'' + u = -\dfrac{F(E-V)}{c^2L^2u^2} = \dfrac{k}{c^2L^2}(E+ku) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \quad u'' + \left(1 - \frac{k^2}{c^2L^2}\right)u = \frac{kE}{c^2L^2}$$

$$\frac{k}{cL} = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 c\hbar} = \frac{Z}{137}$$

• για $Z < 137$, $\quad \lambda^2 = 1 - \dfrac{k^2}{L^2c^2} = 1 - \left(\dfrac{Z}{137}\right)^2 > 0$

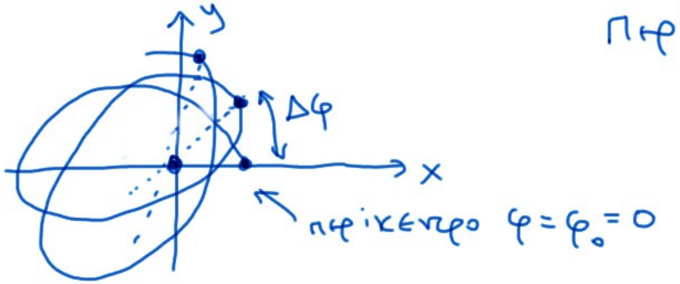
και $\quad u'' + \lambda^2 u = \dfrac{1}{p} \quad$ με $\quad p = \dfrac{L^2c^2}{kE}$

Λύση $\quad u = \dfrac{1}{p} + \dfrac{\varepsilon}{p}\cos\left[\lambda(\varphi-\varphi_0)\right] \Leftrightarrow r = \dfrac{p}{1+\varepsilon\cos\left[\lambda(\varphi-\varphi_0)\right]} \quad$ με $\lambda < 1$

(Το ε είναι η εκκεντρότητα και συνδέεται με την ενέργεια

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \left(\frac{L^2c^2}{k^2} - 1\right)\frac{E^2 - m^2c^4}{E^2}}$$, από (6))

Για $\varepsilon < 1$ "ελλειπτική" τροχιά με περιστρεφόμενο μεγάλο άξονα.



Περίκεντρα: $\cos\left[\lambda(\varphi-\varphi_0)\right] = 1 \Leftrightarrow \lambda(\varphi-\varphi_0) = 2n\pi, \; n \in \mathbb{Z}$.

δηλ. $\varphi = \varphi_0, \quad \varphi = \varphi_0 + \dfrac{2\pi}{\lambda}, \ldots$

Διαφορά $\quad \dfrac{2\pi}{\lambda} = 2\pi + \underbrace{2\pi\left(\dfrac{1}{\lambda} - 1\right)}_{\Delta\varphi}$

$$\Omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T}\left(\frac{1}{\lambda} - 1\right)$$

Στο άτομο $\lambda \simeq 1^-$ αν $Z << 137$ και

$$\Delta\varphi = 2\pi\left(\frac{1}{\lambda} - 1\right) = 2\pi\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{k^2}{L^2c^2}}} - 1\right) \approx \frac{\pi k^2}{L^2c^2} \qquad \left((1+\epsilon)^{\nu} \approx 1+\nu\epsilon\right)$$

η γωνία μετάπτωσης του περίκεντρου σε μια περιστροφή.

$$\Delta\varphi = \pi\left(\frac{Z}{137}\right)^2.$$

- Αν $Z \geqslant 137$

$$u'' + \underbrace{\left(1 - \frac{k^2}{L^2c^2}\right)}_{-\lambda'^2 \leq 0} u = \frac{Ek}{L^2c^2}$$

οπότε εκθετικές λύσεις

$$u = -\frac{Ek}{L^2c^2\lambda'^2} + c_1 e^{\lambda'\varphi} + c_2 e^{-\lambda'\varphi}$$

$u \xrightarrow[\varphi\to\infty]{} \infty$ και άρα $r \longrightarrow 0$

(το ίδιο για $\lambda' = 0$ διότι $u = \frac{1}{2}\frac{Ek}{L^2c^2}\varphi^2 + c_1 + c_2$

$\xrightarrow[\varphi\to\infty]{} \infty$ δηλ. $r \to 0$)

Μετάπτωση περιηλίου του Ερμή λόγω ειδικής σχετικότητας:

Ίδιο πρόβλημα, με $k = GMm$.

Τροχιά Ερμή ελλειπτική με $\varepsilon = 0.206$ και περίοδο $T = 0.241$ έτη

$\langle R \rangle = 58 \cdot 10^9\ m$, $\langle u \rangle = \dfrac{2\pi \langle R \rangle}{T} = 48\ \dfrac{km}{s}$ $\left(= \sqrt{\dfrac{GM}{\langle R \rangle}} \right)$

$$\Delta\varphi = \frac{\pi k^2}{L^2 c^2} = \pi \left(\frac{GMm}{Lc} \right)^2 \ \underset{GM = \langle u \rangle^2 \langle R \rangle}{\overset{L \approx m \langle u \rangle R,\ \gamma \approx 1}{=\!=\!=\!=}} \ \pi \left(\frac{\langle u \rangle}{c} \right)^2 = 8 \cdot 10^{-8}\ rad$$

σε χρόνο 0.241 έτη.

Σε ένα αιώνα $\Theta_{100} = \dfrac{8 \cdot 10^{-8}\ rad}{0.241\ \text{έτη}} \cdot 100\ \text{έτη} = 3.3 \cdot 10^{-5}\ rad$

$1\ rad = 206265''$ $\left(\dfrac{180^\circ}{\pi} = \dfrac{180}{\pi} 3600'' \right)$

Άρα $\Theta_{100} \approx 7''$

Δεν συμφωνεί με την παρατηρούμενη τιμή $43''$ ανά αιώνα

Τα φαινόμενα γενικής σχετικότητας σημαντικά.

Γενική σχετικότητα :

$$c^2 d\tau^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu = \left(1-\frac{r_s}{r}\right)c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1-r_s/r} - r^2 d\varphi^2 \quad \text{με} \quad r_s = \frac{2GM}{c^2}$$

και γεωδαισιακές $\dfrac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\rho\sigma}\dfrac{dx^\rho}{d\tau}\dfrac{dx^\sigma}{d\tau} = 0$

Διατήρηση στροφορμής $L = m r^2 \dot{\varphi}$ με $\dot{(\ )} = \dfrac{d}{d\tau}$

M

Διατήρηση ενέργειας $E = \dfrac{m\dot{r}^2}{2} + \dfrac{L^2}{2mr^2}\left(1-\dfrac{2GM}{c^2 r}\right) - \dfrac{GMm}{r}$

δηλ. $V = -\dfrac{GMm}{r} - \dfrac{L^2 GM}{mc^2 r^3}$

ή ισοδύναμη με δύναμη $\bar{F} = -\nabla V = \left(-\dfrac{GMm}{r^2} - \dfrac{3GML^2}{mc^2 r^4}\right)\hat{r}$

$$u'' + u = -\frac{mF}{L^2u^2} = \frac{GMm^2}{L^2} + \frac{3GM}{c^2}u^2$$

(δεν λύνεται ακριβώς)

$$\left(\left(1-\frac{2GM}{c^2 r}\right)\frac{dt}{d\tau} = \sqrt{1+\frac{2E}{mc^2}}\right)$$

$$u'' + u = \frac{GMm^2}{L^2} + \frac{3GM}{c^2}u^2 \Leftrightarrow u'' = f(u) \quad \mu\epsilon \quad f(u) = \frac{GMm^2}{L^2} + \frac{3GM}{c^2}u^2 - u$$

Σχεδόν κυκλική τροχιά:

$$\text{Κυκλική} \quad r = \frac{1}{u_0}, \quad f(u_0) = 0, \quad u_0 \approx \frac{GMm^2}{L^2}$$

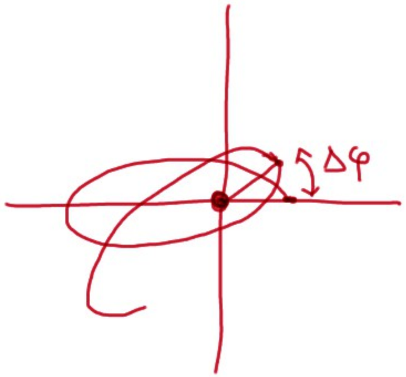
$$f(u) \approx \cancel{f(u_0)} + f'(u_0)(u-u_0) = \left(\frac{6GM}{c^2}u_0 - 1\right)(u-u_0)$$

$$u = u_0 + q, \quad q'' + \lambda^2 q = 0 \quad \mu\epsilon \quad \lambda^2 = 1 - \frac{6G^2M^2m^2}{L^2c^2}$$

$$q = \underset{\downarrow \, \varepsilon u_0}{D}\cos\left[\lambda(\varphi-\varphi_0)\right] \quad \delta\eta\lambda. \quad u = \frac{GMm^2}{L^2}\left(1 + \varepsilon\cos\left[\lambda(\varphi-\varphi_0)\right]\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad r = \frac{L^2/GMm^2}{1+\varepsilon\cos\left(\lambda(\varphi-\varphi_0)\right)} \quad \mu\epsilon \quad \lambda = \sqrt{1 - \frac{6G^2M^2m^2}{L^2c^2}}$$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} - 2\pi = 2\pi\left[\left(1 - \frac{6G^2M^2m^2}{L^2c^2}\right)^{-1/2} - 1\right] \approx \frac{6\pi G^2M^2m^2}{L^2c^2}$$



Για τον Ερμή

$$\alpha = \frac{L^2/mk}{1-\varepsilon^2} = \frac{L^2/GMm^2}{1-\varepsilon^2} \Leftrightarrow L^2 = GMm^2\alpha(1-\varepsilon^2)$$

και $$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{GM}{\alpha^3} \Leftrightarrow GM = \frac{4\pi^2\alpha^3}{T^2}$$

βρίσκουμε $$\Delta\varphi = \frac{6\pi G^2M^2m^2}{L^2c^2} = \frac{24\pi^3\alpha^2}{T^2c^2(1-\varepsilon^2)}$$

$\alpha = 5.79\cdot 10^{10}$ m , $T = 0.24$ yrs , $\varepsilon = 0.2$, $c = 3\cdot 10^8$ m/s

οπότε $\Delta\varphi = 5\cdot 10^{-7}$ rad $= 0.1''$ ανά 0.24 yrs

Άρα $$\Theta_{100} = \frac{0.1''}{0.24}\cdot 100 = 43.3''$$

Σε άλλους πλανήτες το φαινόμενο αμυδρότερο

διότι ασθενής $v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$ οπότε $\Delta\varphi = \pi \frac{GM}{c^2 R}$

αντιστρόφως ανάλογο του R

και αφετέρου η περίοδος $T = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM}}$ είναι μεγαλύτερη

οπότε η μετάπτωση ανά χρόνο είναι $\frac{\Delta\varphi}{T} = \frac{(GM)^{3/2}}{2c^2 R^{5/2}}$

π.χ. για τη Γη, με $R_{Γης} = 1.5 \cdot 10^{11}$ m είναι

$$\frac{\left(\frac{\Delta\varphi}{T}\right)_{Γης}}{\left(\frac{\Delta\varphi}{T}\right)_{Ερμή}} = \left(\frac{R_{Ερμής}}{R_{Γης}}\right)^{5/2} = \left(\frac{58}{150}\right)^{5/2} = 0.09$$

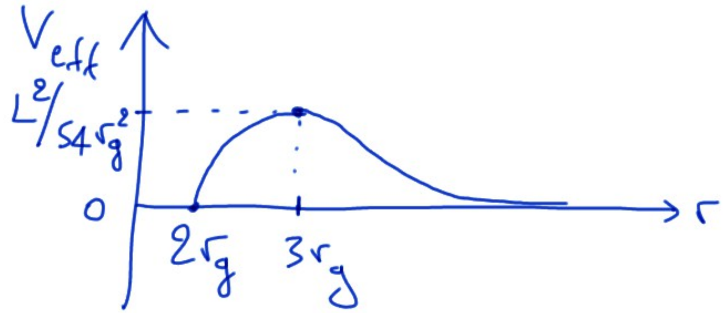
Τροχιές φωτονίων σε χωρόχρονο Schwarzschild μάζας M.
(θέμα 3 από εξέταση 9/5/2019).

Είναι ίδιες με Νευτώνειες τροχιές σωμάτων μοναδιαίας μάζας σε κεντρικό δυναμικό $V(r) = -\dfrac{L^2 r_g}{r^3}$ όπου $r_g = \dfrac{GM}{c^2}$

και $L = r^2 \dot{\varphi}$ η στροφορμή.

(α) $V_{eff}(r) = \dfrac{L^2}{2mr^2} - \dfrac{L^2 r_g}{r^3}$, $V'_{eff} = \dfrac{L^2}{r^4}(3r_g - r)$

$V_{eff_{max}} = V_{eff}\Big|_{r=3g} = \dfrac{L^2}{54\, r_g^2}$

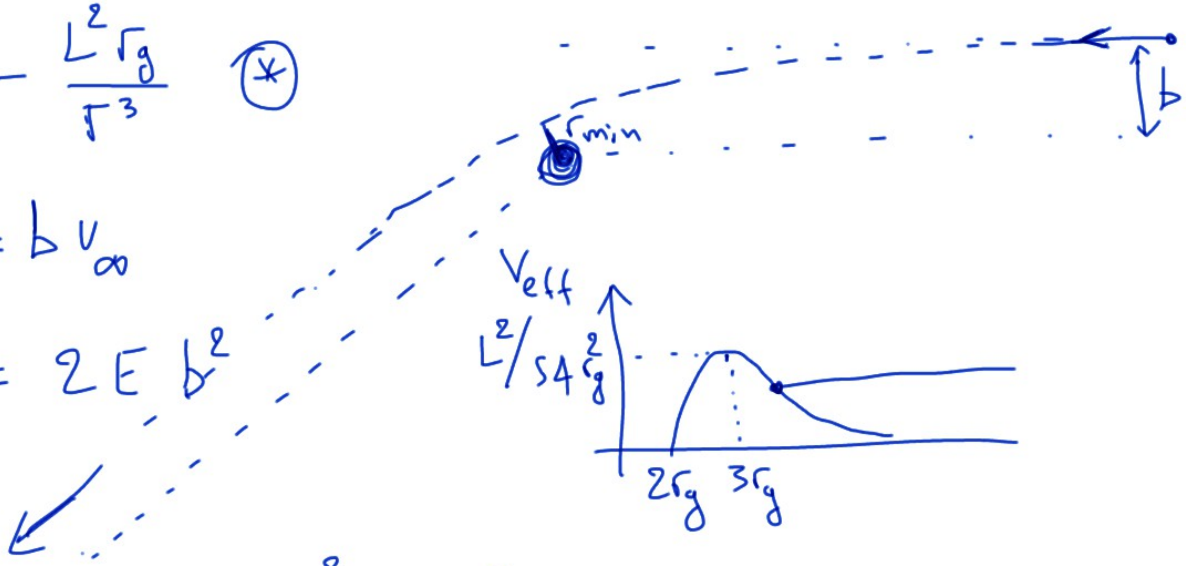


(β) Κυκλικές τροχιές ⟶ ακρότατα του V_{eff} δηλ. $r = 3r_g$
Ασταθής (μέγιστο το ακρότατο).

(γ1) $E = \frac{\dot r^2}{2} + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{L^2 r_g}{r^3}$ (*)

$E = \frac{v_\infty^2}{2}$, $L = b v_\infty$

άρα $L^2 = b^2 v_\infty^2 = 2 E b^2$

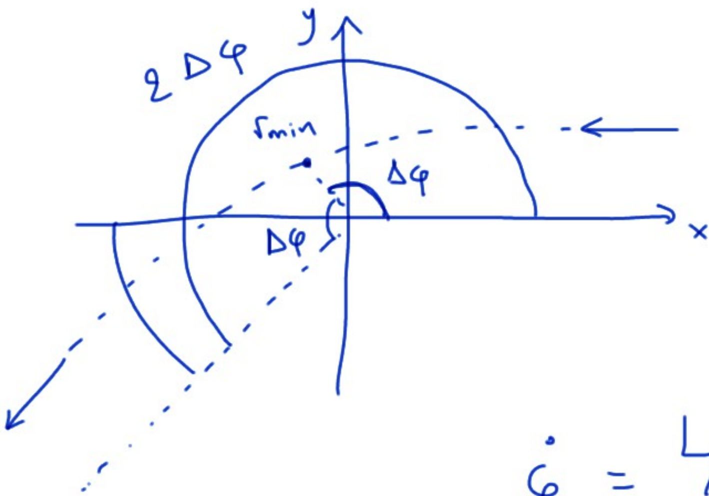


(γ2)

$E < V_{eff_{max}} \Leftrightarrow E < \frac{L^2}{54 r_g^2} \xLeftrightarrow{L^2 = 2Eb^2} b > \sqrt{27}\, r_g \approx 5.2\, r_g$

(γ3) (*) $\rightsquigarrow \dot r = \pm L \sqrt{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{2 r_g}{r^3}}$

Ελάχιστη ακτίνα για $\dot r = 0 \Rightarrow \frac{1}{b^2} - \frac{1}{r_{min}^2} + \frac{2 r_g}{r_{min}^3} = 0$



Γωνία εκτροπής $= 2\Delta\varphi - \pi$

$$\Delta\varphi = \int d\varphi = \int_{\infty}^{r_{min}} \frac{\dot{\varphi}}{\dot{r}}\, dr$$

$$\dot{\varphi} = L/r^2 , \qquad \dot{r} = -L\sqrt{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{2r_g}{r^3}}$$

Δη/. $$\Delta\varphi = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{\frac{1}{r^2}\, dr}{\sqrt{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{2r_g}{r^3}}}$$