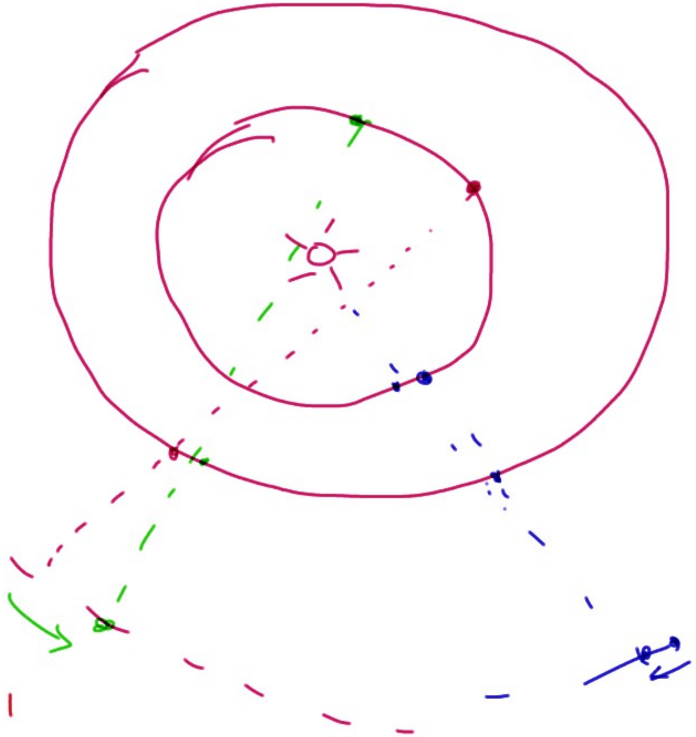
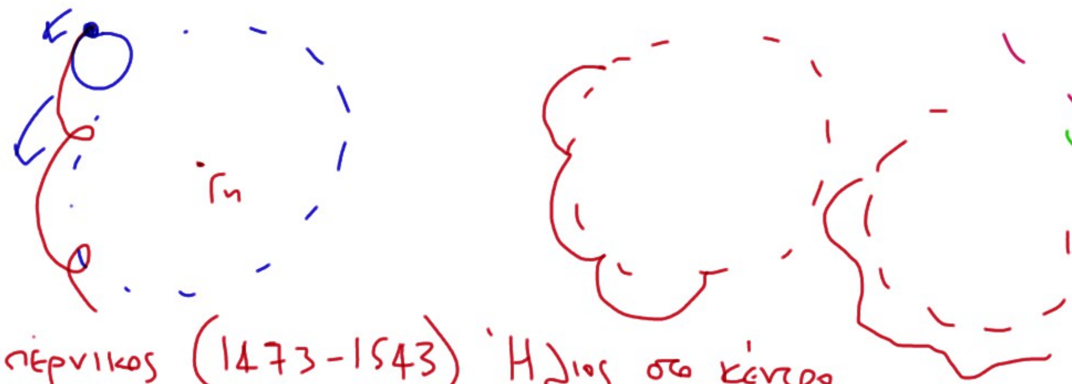
Ελκτικές κεντρικές δυνάμεις $\bar{F} = -\frac{k}{r^2}\hat{r}$, $k > 0$.

π.χ. Ήλιος ← Γη $k = GM_\odot M_\oplus$

Προσπάθεια κατανόησης κίνησης πλανητών



Πτολεμαίος επίκυκλοι 2^{o} αιώνα μ.Χ.



Κοπέρνικος (1473-1543) Ήλιος στο κέντρο

Κέπλερ (1571-1630) : Νόμοι → ελλειπτικές τροχιές με τον Ήλιο στην μια εστία
→ σταθερή εμβαδική ταχύτητα 
→ $T^2 \propto \alpha^3$

Νεύτωνας (1643-1727) : Απάντησε το γιατί.

Κίνηση σε ελκτικό κεντρικό πεδίο $\bar{F} = -\frac{k}{r^2}\hat{r}$, $k>0$.

$$V = -\int \bar{F}\cdot d\bar{r} = -\int -\frac{k}{r^2}dr = -\frac{k}{r} + \cancel{C}^{\,0}$$

$$u'' + u = -\frac{mF}{L^2u^2} \xrightarrow[u=1/r]{F=-ku^2} u'' + u = \frac{mk}{L^2} \Leftrightarrow$$

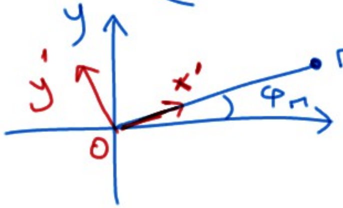
$$\Leftrightarrow u = \underbrace{\frac{mk}{L^2}}_{\text{μερική λύση}} + \underbrace{D\cos(\varphi-\varphi_\pi)}_{\text{λύση της ομογενούς με } D>0,\ \varphi_\pi \text{ σταθερές}}$$

$\left(\text{ή } u = \frac{mk}{L^2} + C_1\cos\varphi + C_2\sin\varphi\right)$

Ορίζω $p = \frac{L^2}{mk}$ και $D = \frac{\varepsilon}{p}$ οπότε $\frac{1}{r} = \frac{1}{p}\left[1+\varepsilon\cos(\varphi-\varphi_\pi)\right]$

$$\Leftrightarrow \boxed{r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos(\varphi-\varphi_\pi)}}$$

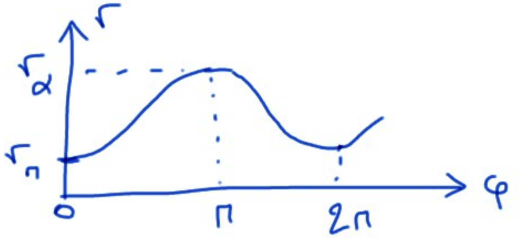
(Με κατάλληλη στροφή, $\varphi-\varphi_\pi \to \varphi$)



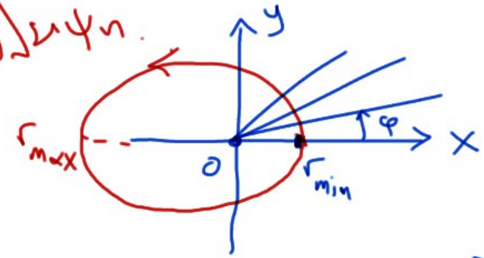
περίκεντρο (σημείο με ελάχιστο $r = r_{min} = \frac{p}{1+\varepsilon}$)

Τροχιές $\quad r = \dfrac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$

$\varepsilon<1$



έλλειψη

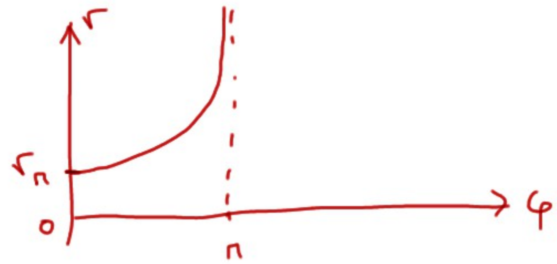


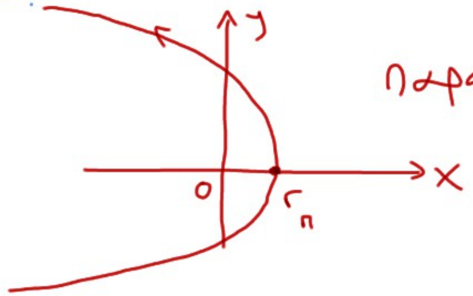
$$r_{min} = \frac{p}{1+\varepsilon} = r_\pi$$

$$r_\alpha = r_{max} = r\big|_{\varphi=\pi} = \frac{p}{1-\varepsilon}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned}\right|$$ περιοδικές συναρτήσεις με περίοδο 2π.

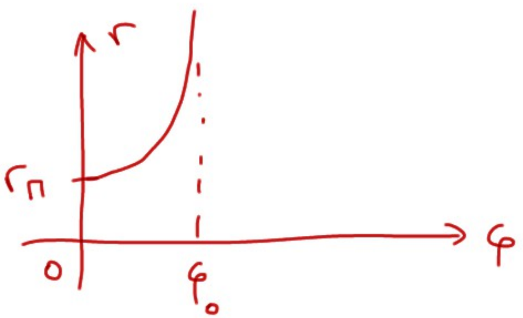
$\varepsilon=1$



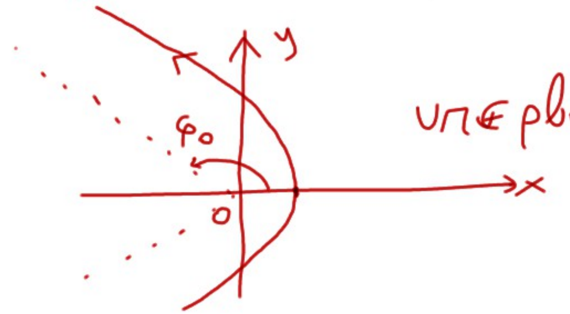


παραβολή

$\varepsilon>1$



$1+\varepsilon\cos\varphi_0=0 \Leftrightarrow \varphi_0=\arccos\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right)$ (αμβλεία γωνία).



υπερβολή

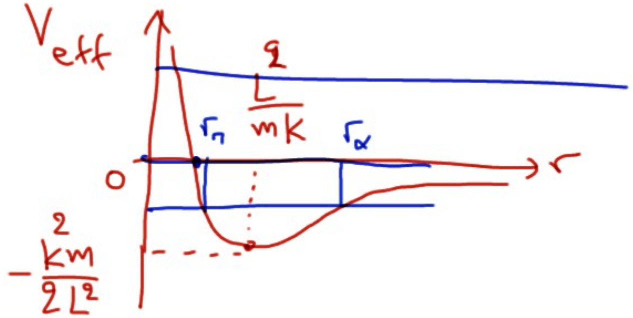
Η σταθερά ε συνδέεται με την ενέργεια:

$$v_r = \dot r = \frac{d(1/u)}{d\varphi}\dot\varphi = -\frac{1}{u^2}u'\frac{L}{mr^2} = -\frac{L}{m}u' \xrightarrow[p=L^2/mk]{u=\frac{1+\varepsilon\cos\varphi}{p}} \frac{k\varepsilon}{L}\sin\varphi$$

$$v_\varphi = r\dot\varphi = \frac{L}{mr} = \frac{L}{m}u = \frac{k}{L}(1+\varepsilon\cos\varphi), \quad V = -ku$$

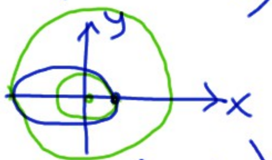
$$\frac{m\dot r^2}{2} + \frac{m(r\dot\varphi)^2}{2} + V = E \Leftrightarrow E = \frac{mk^2}{2L^2}(\varepsilon^2-1) \Leftrightarrow \varepsilon = \sqrt{1+\frac{2EL^2}{mk^2}} \quad (*)$$

$$V_{eff} = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{k}{r}, \quad \frac{dV_{eff}}{dr} = \frac{k}{r^3}\left(r - \frac{L^2}{mk}\right)$$



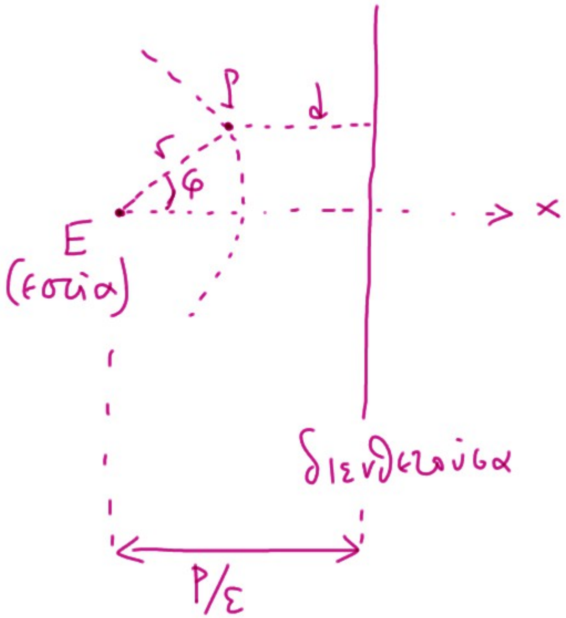
- $E<0 \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \varepsilon<1$ (αψίδες τα r_α (απόκεντρο) και r_π (περίκεντρο) όπου $\dot r = 0$)

αντιστοιχεί σε ελλειπτική τροχιά.



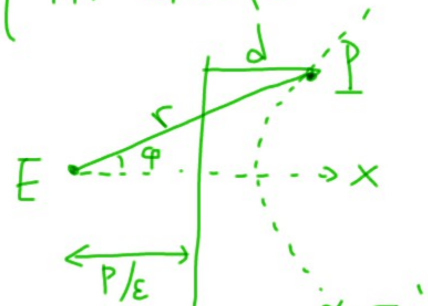
- $E = -\frac{k^2m}{2L^2} \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \varepsilon = 0$ κύκλος $r = \frac{L^2}{mk}$ (ισχύει $\frac{mv^2}{r} = \frac{k}{r^2}$)
- $E = 0 \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \varepsilon = 1$: $r \geq r_\pi$ Παραβολή και $v_\infty = 0$
- $E > 0 \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \varepsilon > 1$: $r \geq r_\pi$ υπερβολή και $v_\infty > 0$.

Κωνικές τομές :



$$\left.\begin{aligned} \frac{r}{d} &= \varepsilon \\ d &= \frac{p}{\varepsilon} - r\cos\varphi \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}}$$

(Αν έχουμε τα E, P εκατέρωθεν της διευθετούσας



$\varepsilon = \dfrac{r}{d}$ και $d = r\cos\varphi - \dfrac{p}{\varepsilon}$

άρα $r = \dfrac{p}{-1+\varepsilon\cos\varphi}$ υπερβολή (μόνο $\varepsilon>1$ δεκτό)

αυτή είναι η τροχιά σε $\bar{F} = \frac{k}{r^2}\hat{r}$ με $k>0$)

Η τροχιά $r = \dfrac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$ σε καρτεσιανές:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi = \frac{p\cos\varphi}{1+\varepsilon\cos\varphi} \\ y &= r\sin\varphi = \frac{p\sin\varphi}{1+\varepsilon\cos\varphi} \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{x}{p-\varepsilon x} \\ \sin\varphi &= \frac{y}{p-\varepsilon x} \end{aligned}\right\} \xRightarrow{\sin^2\varphi+\cos^2\varphi=1}$$

$$\left(\frac{x}{p-\varepsilon x}\right)^2 + \left(\frac{y}{p-\varepsilon x}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow x^2+y^2 = (p-\varepsilon x)^2 \Leftrightarrow (1-\varepsilon^2)x^2 + 2p\varepsilon x + y^2 - p^2 = 0$$

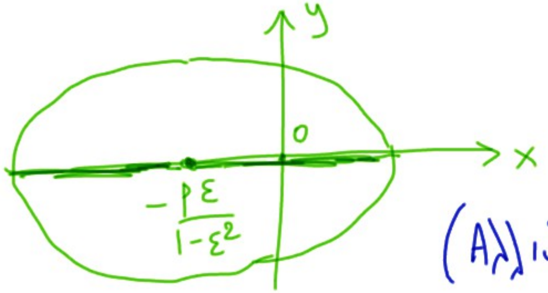
$$\Leftrightarrow \underbrace{x^2 + 2x\frac{p\varepsilon}{1-\varepsilon^2} + \left(\frac{p\varepsilon}{1-\varepsilon^2}\right)^2} - \left(\frac{p\varepsilon}{1-\varepsilon^2}\right)^2 - \frac{p^2}{1-\varepsilon^2} + \frac{y^2}{1-\varepsilon^2} = 0$$

$$\left(x+\frac{p\varepsilon}{1-\varepsilon^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1-\varepsilon^2} = \frac{p^2}{(1-\varepsilon^2)^2} \overset{\varepsilon<1}{\Longleftrightarrow} \left(\frac{x+\frac{p\varepsilon}{1-\varepsilon^2}}{\frac{p}{1-\varepsilon^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}}\right)^2 = 1$$

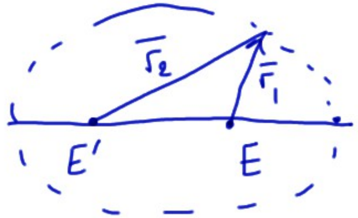
Έλλειψη

$\dfrac{p}{1-\varepsilon^2}$ → μεγάλος ημιάξονας α

$\dfrac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$ → μικρός ημιάξονας b



(Αλλιώς

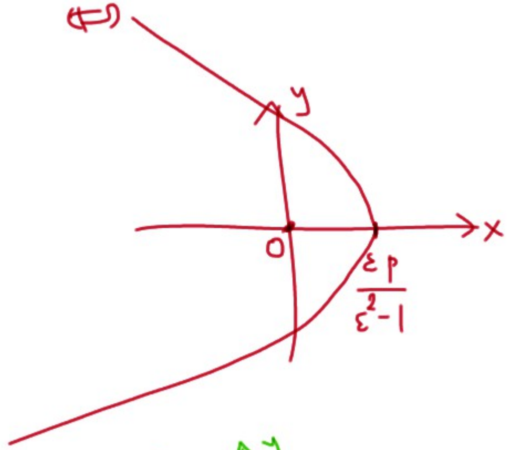


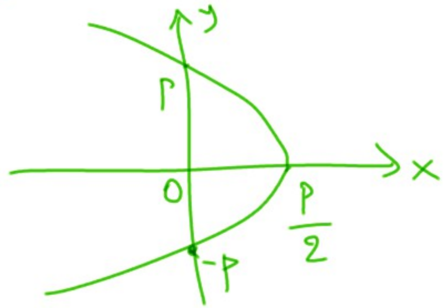
$r_1 + r_2 = 2\alpha$)

$$\left(x+\frac{\varepsilon p}{1-\varepsilon^2}\right)^2+\frac{y^2}{1-\varepsilon^2}=\frac{p^2}{(1-\varepsilon^2)^2}$$

Αν $\varepsilon>1$ ισχύει $\left(x-\frac{\varepsilon p}{\varepsilon^2-1}\right)^2-\frac{y^2}{\varepsilon^2-1}=\frac{p^2}{(\varepsilon^2-1)^2}$ $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x-\frac{\varepsilon p}{\varepsilon^2-1}}{\frac{p}{\varepsilon^2-1}}\right)^2-\left(\frac{y}{\frac{p}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}}\right)^2=1$$ υπερβολή

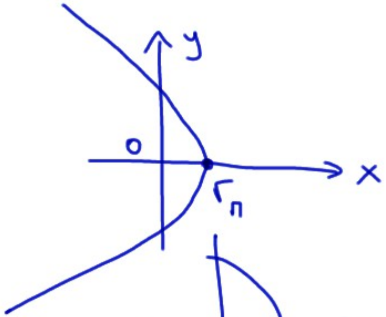




Αν $\varepsilon=1$: $2px+y^2-p^2=0 \Leftrightarrow$

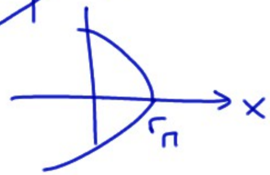
$$\Leftrightarrow \frac{y^2}{2p}=-\left(x-\frac{p}{2}\right)$$

Χαρακτηριστικά κωνικών τομών $r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$, $r_\pi = r_{min} = \frac{p}{1+\varepsilon}$



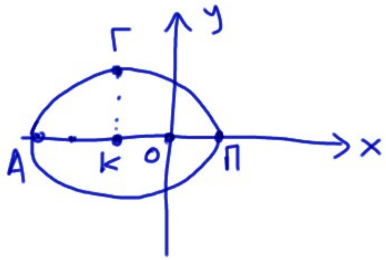
- $\varepsilon > 1$ υπερβολή

ασύμπτωτες $\varphi = \arccos\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right)$



- $\varepsilon = 1$ παραβολή

- $\varepsilon < 1$ έλλειψη



$r_\pi = \frac{p}{1+\varepsilon} = \alpha(1-\varepsilon)$

$r_\alpha = \frac{p}{1-\varepsilon} = \alpha(1+\varepsilon)$

$\alpha = \frac{r_\alpha + r_\pi}{2} = \frac{p}{1-\varepsilon^2}$ μεγάλος ημιάξονας άρα $p = \alpha(1-\varepsilon^2)$

$KO = K\Pi - O\Pi = \alpha - r_\pi = \alpha\varepsilon$

Μικρός ημιάξονας $b = K\Gamma = \sqrt{r_\Gamma^2 - KO^2} = \alpha\sqrt{1-\varepsilon^2}$

γιατί $r_\Gamma = \alpha$ ($r_1 + r_2 = 2\alpha$ και στο Γ είναι $r_1 = r_2$).

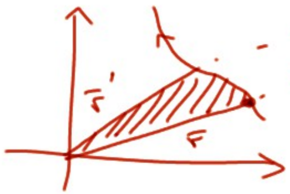
Το ίδιο από $\left.\frac{dy}{d\varphi}\right|_\Gamma = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{p\sin\varphi}{1+\varepsilon\cos\varphi}\right)\Big|_\Gamma = 0 \Leftrightarrow \cos\varphi_\Gamma = -\varepsilon$ και $b = y_\Gamma = \frac{p\sqrt{1-\varepsilon^2}}{1-\varepsilon^2} = p/\sqrt{1-\varepsilon^2}$.

ή $b = \alpha\sqrt{1-\varepsilon^2}$.

<u>Νόμοι Κέπλερ</u> : $\bar F = -\frac{k}{r^2}\hat r$, $k = GMm$

1ος νόμος : Ελλειπτικές τροχιές : πρόκειται οι λύσεις που βρήκαμε με $\varepsilon<1$

2ος νόμος : Σταθερή εμβαδική ταχύτητα $\Leftrightarrow$ σταθερή στροφορμή



($dS = \frac{|\bar r \times \bar r'|}{2}$, $\bar r' = \bar r + d\bar r$, $\frac{|\bar r \times d\bar r|}{2}$)

άρα $\frac{dS}{dt} = \frac{|\bar r \times \bar v|}{2} = \frac{L}{2m}$

3ος νόμος : $T^2 \propto \alpha^3$

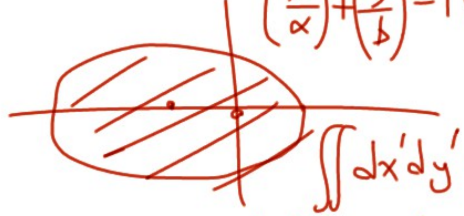
<u>Απόδειξη</u>:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{L}{2m} \Leftrightarrow \frac{\pi \alpha b}{T} = \frac{L}{2m}$$

Από $p = \frac{L^2}{mk} = \frac{L^2}{GMm^2} \Leftrightarrow \frac{L}{m} = \sqrt{GMp}$, $p = \alpha(1-\varepsilon^2)$, $b = \alpha\sqrt{1-\varepsilon^2}$

έχουμε $\frac{2\pi\alpha^2\cancel{\sqrt{1-\varepsilon^2}}}{T} = \sqrt{GM\alpha\cancel{(1-\varepsilon^2)}} \Leftrightarrow \boxed{T = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}}\alpha^{3/2}}$

$$\left(\frac{x'}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{y'}{b}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \xi^2 + \eta^2 = 1$$



$$\iint dx'dy' = \alpha b \underbrace{\iint d\xi d\eta}_{\pi}$$

$x' = \xi\alpha$, $y' = \eta b$

Για τη Γη, $T = 1$ έτος, $\alpha = 1$ AU. Αν μετρώ το T σε έτη και το α σε AU, $T = \alpha^{3/2}$

$\Omega = \sqrt{GM/\alpha^3}$

$m\Omega^2\alpha = GMm/\alpha^2$

Ω = γωνιακή ταχύτητα Kepler

<u>Άσκηση</u>: Δείξτε ότι για ελλειπτικές πλανητικές τροχιές $E=-\frac{GMm}{2\alpha}$

<u>Λύση</u>:

$F=-\frac{GMm}{r^2}$,

Α' τρόπος: $\varepsilon=\sqrt{1+\frac{2EL^2}{mk^2}} \Leftrightarrow E=\frac{mk^2}{2L^2}(\varepsilon^2-1) \underset{p=\alpha(1-\varepsilon^2)}{\overset{p=L^2/mk}{\Longleftrightarrow}} E=-\frac{k}{2\alpha}$.

Β' τρόπος: Οι r_α και r_π είναι τα άκρα της ακτινικής κίνησης.

Εκεί $\dot{r}=0$ άρα $L=mrv \Leftrightarrow v=\frac{L}{mr}$

Επίσης $\frac{mv^2}{2}-\frac{k}{r}=E \Leftrightarrow \frac{L^2}{2mr^2}-\frac{k}{r}=E \Leftrightarrow Er^2+kr-\frac{L^2}{2m}=0$

(το ίδιο από $V_{eff}=E$)

$r_{\alpha,\pi}=\frac{k\pm\sqrt{k^2-2EL^2/m}}{-2E}$ και $\underbrace{r_\alpha+r_\pi}_{2\alpha}=-\frac{k}{E} \Leftrightarrow E=-\frac{k}{2\alpha}$

Άσκηση: Δείξτε ότι οι ταχύτητες πλανητών στο περιήλιο/αφήλιο της τροχιάς τους είναι $v_\pi = \sqrt{\frac{GM}{\alpha}\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}$, $v_\alpha = \sqrt{\frac{GM}{\alpha}\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}$.

Λύση:

$$F = -\frac{k}{r^2}, \quad k = GM_\odot m$$

$$r_\alpha = \alpha(1+\varepsilon), \quad r_\pi = \alpha(1-\varepsilon)$$

$$m r_\alpha v_\alpha = m r_\pi v_\pi \Leftrightarrow v_\alpha = v_\pi \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \quad (1)$$

$$\frac{m v_\alpha^2}{2} - \frac{GM_\odot m}{r_\alpha} = \frac{m v_\pi^2}{2} - \frac{GM_\odot m}{r_\pi} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} v_\pi = \dots$$

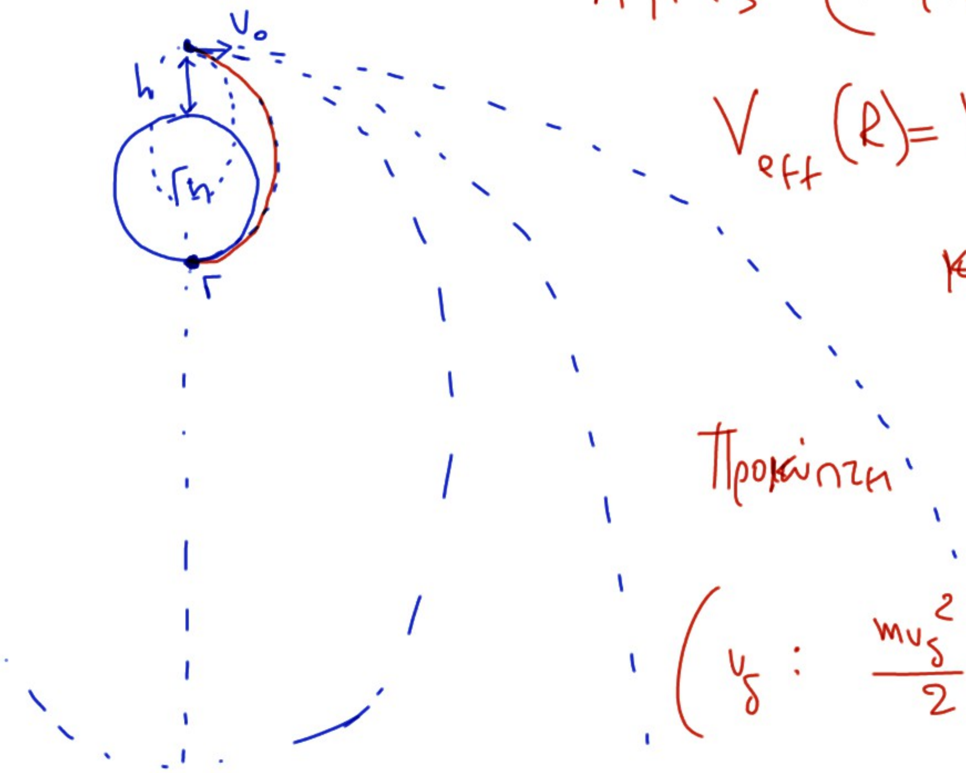
Αλλιώς: $\frac{mv^2}{2} - \frac{GM_\odot m}{r} = E = -\frac{GM_\odot m}{2\alpha} \Leftrightarrow \boxed{v^2 = GM_\odot\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{\alpha}\right)}$

Αλλιώς: $p = \frac{L^2}{mk} \Leftrightarrow L = \sqrt{mkp} = \sqrt{mk\alpha(1-\varepsilon^2)}$ και

$$v_\alpha = \frac{L}{m r_\alpha} = \dots, \quad v_\pi = \frac{L}{m r_\pi} = \dots$$

Άσκηση: Από ύψος h πάνω από την επιφάνεια της Γης εκτοξεύουμε οριζόντια σώμα. Ποια πρέπει να είναι η αρχική του ταχύτητα ώστε η τροχιά του να εφάπτεται σε τόπο της Γης Γ; Ποιο το σημείο Γ;

Λύση:



Αψίδες (ακρότατα r) στις $r = R$, $R+h$.

$$V_{eff}(R) = V_{eff}(R+h) \quad \text{με} \quad V_{eff}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$$

και $L = m(R+h)v_0$

Προκύπτει $$v_0 = \sqrt{\frac{GM}{R\left(1+\frac{h}{R}\right)\left(1+\frac{h}{2R}\right)}}$$

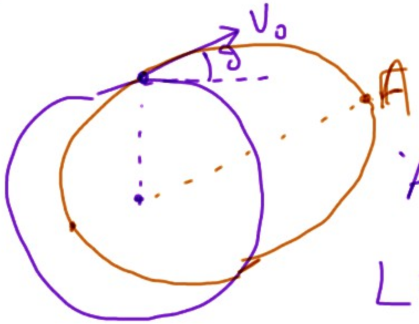
$$\left(v_\delta : \frac{mv_\delta^2}{2} - \frac{GMm}{R+h} = 0 \Leftrightarrow v_\delta = \sqrt{\frac{2GM}{R+h}} \right)$$

Άσκηση: Πλάγια βολή από τόπο της Γης, με $v_0 = \sqrt{\frac{GM}{R}}$ και γωνία θ.

(α) Μέγιστο ύψος; (β) Δείξτε ότι ο μεγάλος ημιάξονας είναι παράλληλος στην $\vec{v}_0$.

Λύση:

(α)



$$V_{eff} = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$$

Άκρα ακτινικής κίνησης $V_{eff} = E$

$$L = mRv_0 \sin(\widehat{\vec{r},\vec{v}_0}) = mRv_0\cos\theta \quad \text{ή} \quad mrv_\varphi$$

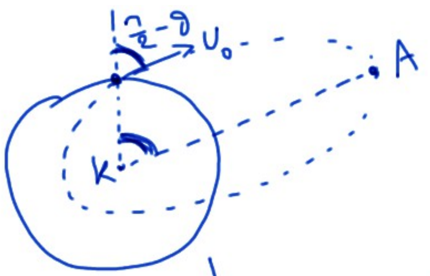
και $E = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{GMm}{R}$, δηλ. $L = m\sqrt{GMR}\cos\theta$

και $E = -\frac{GMm}{2R}$

Άρα $V_{eff} = E \Leftrightarrow \frac{m^2R^2v_0^2\cos^2\theta}{2mr^2} - \frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{2R} \Leftrightarrow r = R(1 \pm \sin\theta)$

Δηλ. μέγιστο ύψος $r_{max} = R(1+\sin\theta)$

Αλλιώς:
$$\left.\begin{aligned} mRv_0\cos\theta &= m r_\alpha v_\alpha \\ \frac{mv_0^2}{2} - \frac{GMm}{R} &= \frac{mv_\alpha^2}{2} - \frac{GMm}{r_\alpha} \end{aligned}\right\} \Rightarrow r_\alpha = R(1+\sin\theta)$$

(β) 

$$u'' + u = \frac{mK}{L^2} \qquad K = GMm \qquad L = m v_0 R\cos\vartheta \quad \text{με } v_0 = \sqrt{\frac{GM}{R}} \qquad \frac{1}{R\cos^2\vartheta}$$

$$\Leftrightarrow \quad u = \frac{1}{R\cos^2\vartheta} + C_1\cos\varphi + C_2\sin\varphi$$

Αρχικά έστω $\varphi = 0$, $r = R$ δηλ. $u = \frac{1}{R}$, $u' = \frac{d(1/r)/dt}{d\varphi/dt} = -\frac{\dot r/r^2}{L/mr^2} = -\frac{m}{L}\dot r =$

$$= -\frac{m v_r}{L} = -\frac{m\, v_0 \sin\vartheta}{m v_0 R\cos\vartheta} = -\frac{\tan\vartheta}{R}.$$

Έτσι βρίσκω $u\big|_{\varphi=0} = \frac{1}{R} \Leftrightarrow \frac{1}{R} = \frac{1}{R\cos^2\vartheta} + C_1$, $u'\big|_{\varphi=0} = -\frac{\tan\vartheta}{R} \Leftrightarrow C_2 = -\frac{\tan\vartheta}{R}$

δηλ. $$u = \frac{1 - \sin^2\vartheta\cos\varphi - \sin\vartheta\cos\vartheta\sin\varphi}{R\cos^2\vartheta} \Leftrightarrow r = \frac{R\cos^2\vartheta}{1 - \sin\vartheta\,\sin(\varphi+\vartheta)}$$

Απόγειο $r_A = \frac{R\cos^2\vartheta}{1-\sin\vartheta}$ όταν $\sin(\varphi+\vartheta) = 1 \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} - \vartheta$

άρα από σχήμα οι $\overline{KA}$ και $\overline{v}_0$ παράλληλες.