Άσκηση: Κίνηση σε $\bar{F} = -k\hat{r}$, $k>0$.

(α) Για ποια L, E έχουμε κυκλική τροχιά ακτίνας r_0;

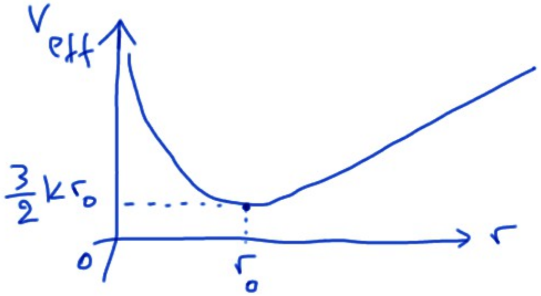
(β) Έστω διαταράσσουμε την κυκλική τροχιά χωρίς να αλλάξουμε την στροφορμή π.χ. δίνοντας μια μικρή v_{r_0} όταν $\varphi=0$. Ποια η διαταραχή;

Λύση:

$$V = -\int \bar{F}\cdot d\bar{r} = -\int\Big(-k\,\underbrace{\hat{r}\cdot d\bar{r}}_{dr}\Big) = kr + \cancelto{0}{c} \quad , \quad V_{eff} = \frac{L^2}{2mr^2} + kr$$

$$\frac{dV_{eff}}{dr} = -\frac{L^2}{mr^3} + k = \frac{k}{r^3}\left(r^3 - \frac{L^2}{mk}\right) \gtrless 0 \ , \quad r \gtrless r_0 \quad \text{όπου} \quad r_0 = \left(\frac{L^2}{mk}\right)^{1/3}.$$

$$V_{eff,min} = V_{eff}(r_0) = \frac{3}{2}kr_0 = \frac{3}{2}\left(\frac{k^2L^2}{m}\right)^{1/3}.$$



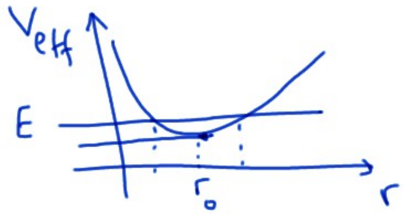
(α) Πρέπει $E = V_{eff,min} = \frac{3}{2}kr_0$ και $r=r_0$ δηλ. $L = \sqrt{mkr_0^3}$

Σε κάθε ακτίνα αν δώσουμε κατάλληλη $\bar{v}_0 \perp \bar{r}_0$ με $\underbrace{v_0 = \frac{L}{mr_0} = \sqrt{\frac{kr_0}{m}}}_{\frac{mv_0^2}{r_0} = |F| = k}$ η τροχιά θα είναι κυκλική.

$\left(L = mr_0v_0 \text{ και } E = \frac{mv_0^2}{2} + kr_0 \text{ με } v_0 \text{ από } \frac{mv_0^2}{r_0} = k\right)$.

Κυκλική συχνότητα = γωνιακή ταχύτητα τροχιάς $= \omega_0 = \frac{v_0}{r_0} = \sqrt{\frac{k}{mr_0}}$.

(β) Σταθερή L άρα V_{eff} ίδια $V_{eff} = \frac{L^2}{2mr^2} + kr$ με $L = \sqrt{mkr_0^3}$.



Αν διαταράξω λίγο την κυκλική τροχιά

Θέτω $q = r - r_0$ και $V_{eff}(r) \approx V_{eff}(r_0) + \cancel{V'_{eff}(r_0)\, q} + \frac{1}{2} V''_{eff}(r_0)\, q^2$

$$= V_{eff,min} + \frac{3L^2}{2mr_0^4} q^2$$

και $\frac{m\dot{q}^2}{2} + \frac{3L^2}{2mr_0^4} q^2 = σταθ$ $\xrightarrow{\text{παραγωγίζω}}$ $\cancel{m}\ddot{q} + \frac{3L^2}{m^2 r_0^4} q = 0$

$$\omega^2 = 3\frac{(m r_0 v_0)^2}{m^2 r_0^4} = 3\left(\frac{v_0}{r_0}\right)^2 = 3\omega_0^2$$

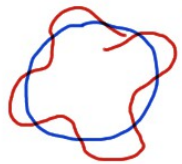
δηλ. $\omega = \sqrt{3}\, \omega_0$

$q = C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t)$, $r = r_0 + C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t)$ με $\omega = \sqrt{3}\, \omega_0$

$\dot{r} = C_1 \omega \cos(\omega t) - C_2 \omega \sin(\omega t)$

επικυκλική κυκλική συχνότητα

$r|_{t=0} = r_0 \Leftrightarrow C_2 = 0$, $\dot{r}|_{t=0} = v_{r_0} \Leftrightarrow C_1 = \frac{v_{r_0}}{\omega}$



$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{T_0}{\sqrt{3}}$

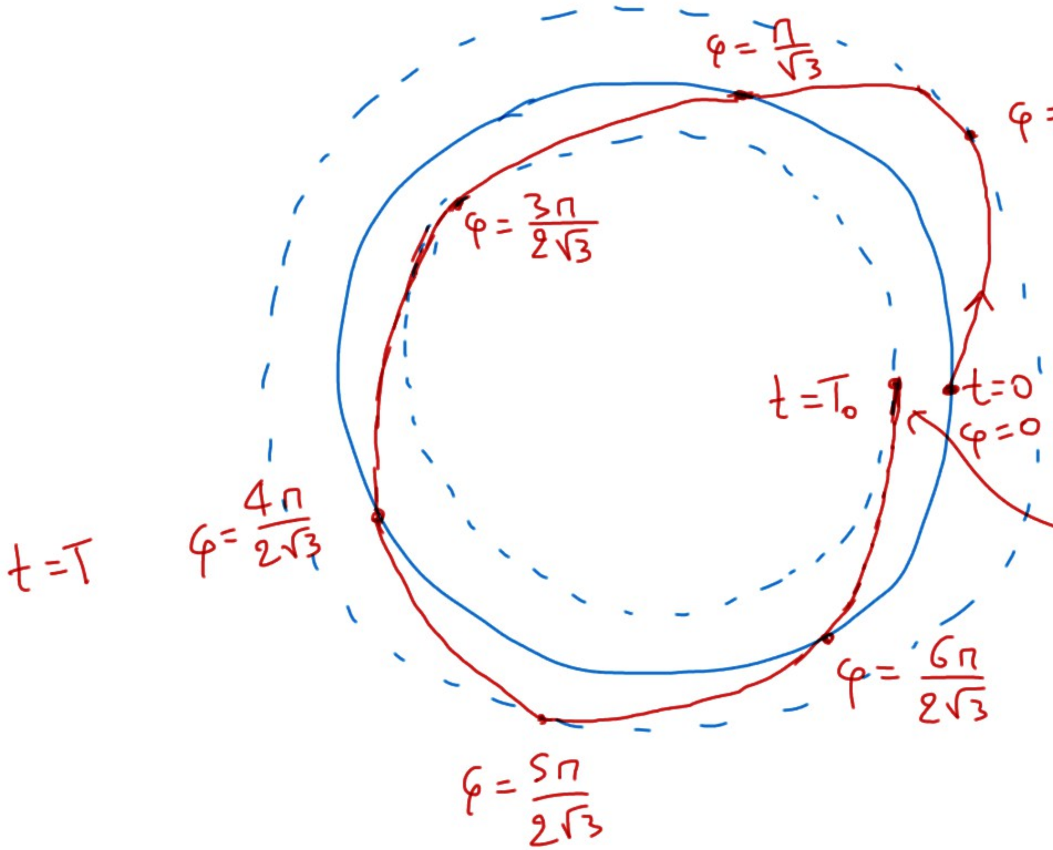
$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

δηλ. $r = r_0 + \frac{v_{r_0}}{\omega} \sin(\omega t)$, $\varphi = \omega_0 t$ (ακριβέστερα

$\dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2} = \frac{L}{mr_0^2}\left(1 + \frac{v_{r_0}}{\omega r_0}\sin(\omega t)\right)^{-2} \approx \underbrace{\frac{L}{mr_0^2}}_{\omega_0}\left(1 - \frac{2v_{r_0}}{\omega r_0}\sin(\omega t)\right) \Leftrightarrow \varphi \approx \omega_0 t - \frac{2v_{r_0}}{\omega r_0}\left[1 - \cos(\omega t)\right] \approx \omega_0 t$)

Η κίνηση μη περιοδική διότι δεν υπάρχει ΕΚΠ (T, T_0).

$$r \approx r_0 + \underbrace{\varepsilon}_{\frac{v_{r_0}}{\omega}} \sin(\sqrt{3}\,\varphi)$$



$$\varphi = \frac{7\pi}{2\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{49}{48}}\, 2\pi \approx 2\pi$$

Άσκηση: Σώμα m σε πεδίο $\vec{F} = - m r [\Omega(r)]^2 \hat{r}$ όπου $\Omega(r)$ κάποια συνάρτηση της ακτίνας. Αρχικά κινείται κυκλικά σε τροχιά ακτίνας r_0 με γωνιακή ταχύτητα $\Omega(r_0)$.

Δείξτε ότι η συνθήκη για να είναι ευσταθής η κυκλική αυτή τροχιά σε διαταραχές που διατηρούν την στροφορμή είναι $\left.\frac{d}{dr}(r^4 \Omega^2)\right|_{r=r_0} > 0$.

Απόδειξη: $\frac{m\dot{r}^2}{2} + V_{eff}(r) = E$ όπου $V_{eff}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + V$, $V = +\int m r \Omega^2 dr$,

$L = m r_0^2 \Omega(r_0)$, δηλ. $V_{eff}(r) = \frac{m r_0^4 [\Omega(r_0)]^2}{2r^2} + \int m r [\Omega(r)]^2 dr$.

$V'_{eff}(r) = - \frac{m r_0^4 [\Omega(r_0)]^2}{r^3} + m r [\Omega(r)]^2$. Πράγματι μηδενίζεται για $r = r_0$ (άρα η $r = r_0$ είναι κυκλική τροχιά).

$$V''_{eff}(r) = \frac{3 m r_0^4 [\Omega(r_0)]^2}{r^4} + m [\Omega(r)]^2 + m r \frac{d [\Omega(r)]^2}{dr}$$

Ευσταθείς διαταραχές όταν $V''_{eff}(r_0) > 0 \Leftrightarrow 4 m r_0^3 [\Omega(r_0)]^2 + m r_0^4 \left.\frac{d [\Omega(r)]^2}{dr}\right|_{r=r_0} > 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left.\frac{d}{dr}(r^4 \Omega^2)\right|_{r=r_0} > 0$$

$$r = r_0 + q\,, \quad V_{eff}(r) \simeq V_{eff}(r_0) + \frac{1}{2} V''_{eff}(r_0)\, q^2 \quad \text{με}$$

$$V''_{eff}(r_0) = \left[4m\Omega^2 + mr\frac{d\Omega^2}{dr}\right]_{r=r_0} = \frac{m}{r_0^3}\left[4r^3\Omega^2 + r^4\frac{d\Omega^2}{dr}\right]_{r=r_0} = \frac{m}{r_0^3}\frac{d}{dr}\left(r^4\Omega^2\right)\Big|_{r=r_0}$$

$$\frac{\cancel{m}\dot{q}^2}{2} + \frac{\cancel{m}}{2r_0^3}\left[\frac{d}{dr}\left(r^4\Omega^2\right)\right]_{r_0} q^2 = \sigma\tau\alpha\vartheta \rightarrow \ddot{q} + \underbrace{\left[\frac{1}{r^3}\frac{d}{dr}\left(r^4\Omega^2\right)\right]_{r_0}}_{\omega^2} q = 0$$

Ουσιαστικά $\omega = \sqrt{\left[\frac{1}{r^3}\frac{d}{dr}\left(r^4\Omega^2\right)\right]_{r_0}} = \sqrt{\left[\frac{1}{mr^3}\frac{d}{dr}\left(-r^3F\right)\right]_{r_0}}$ διότι $F = -mr\Omega^2$

δη) ευστάθεια αν η $-F$ ελαττώνεται πιο αργά από $1/r^3$.

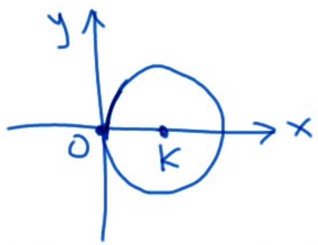
π.χ. αν $F = -k/r^n$, $k>0$, $\frac{d}{dr}\left(-r^3F\right) = \frac{d}{dr}\left(k\,r^{3-n}\right) = k(3-n)\,r^{2-n}$

$\omega = \sqrt{\frac{k(3-n)}{m\,r_0^{n+1}}}$, ω_0 από $m\omega_0^2 r_0 = -F = \frac{k}{r_0^n} \Leftrightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m\,r_0^{n+1}}}$

Άρα $\omega = \omega_0\sqrt{3-n}$.

Άσκηση: Σε ποιο κεντρικό πεδίο $\bar{F} = f(r)\hat{r}$ το σώμα καταλήγει στο κέντρο ακολουθώντας κυκλική τροχιά;

Λύση:



$$u = u(\varphi) \quad \text{με} \quad u = \frac{1}{r}$$

$$u'' + u = -\frac{mf}{L^2u^2} \quad (*)$$

Εξίσωση κύκλου $(x-x_0)^2 + y^2 = R^2$ με $x_0 = R$ ώστε το $x=0, y=0$ να είναι σημείο του κύκλου. Άρα $(x-R)^2 + y^2 = R^2 \Leftrightarrow x^2 - 2Rx + y^2 = 0 \xleftrightarrow[y = r\sin\varphi]{x = r\cos\varphi}$

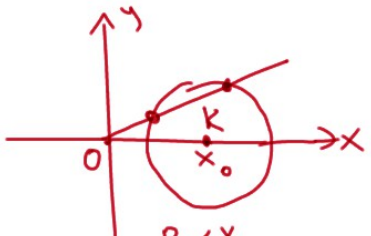
$$r = 2R\cos\varphi.$$

Οπότε $u = \frac{1}{r} = \frac{1}{2R\cos\varphi}$, $u' = +\frac{\sin\varphi}{2R\cos^2\varphi}$, $u'' = \frac{\cos^2\varphi + 2\sin^2\varphi}{2R\cos^3\varphi} = \frac{1+\sin^2\varphi}{2R\cos^3\varphi}$

$$(*) \rightarrow f = -\frac{L^2u^2}{m}(u''+u) = -\frac{L^2}{4mR^3\cos^5\varphi} = -\frac{8R^2L^2}{mr^5}$$

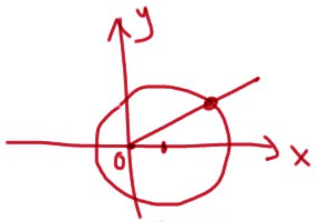
Δηλ. πρέπει $f = -\frac{k}{r^5}$, $k>0$ και $L^2 = \frac{m}{8R^2}k$

Γενικότερα, αν η τροχιά κυκλική ;



$R<x_0$

ή



$R>x_0$

$(x-x_0)^2+y^2=R^2$ σε πολικές $x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi$, $r^2-2x_0 r\cos\varphi+x_0^2-R^2=0$

$$\Leftrightarrow r = x_0\cos\varphi \pm\sqrt{R^2-x_0^2\sin^2\varphi} \Leftrightarrow u=\frac{1}{r}=\frac{x_0\cos\varphi\mp\sqrt{R^2-x_0^2\sin^2\varphi}}{x_0^2-R^2}$$

$$(x_0^2-R^2)u' = -x_0\sin\varphi \pm \frac{x_0^2\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{R^2-x_0^2\sin^2\varphi}}$$

$$(x_0^2-R^2)u'' = -x_0\cos\varphi \pm \frac{x_0^2(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)}{\sqrt{}} \pm x_0^4\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,\frac{1}{(\sqrt{})^3}$$

$$u''+u=\dots=\frac{R^2}{(\pm\sqrt{})^3}=\frac{R^2}{(r-x_0\cos\varphi)^3}$$ και $$\cos\varphi=\frac{r^2+x_0^2-R^2}{2x_0 r}$$

οπότε $u''+u=\frac{8R^2r^3}{(r^2+R^2-x_0^2)^3}$. Τελικά $f=-\frac{L^2u^2}{m}(u''+u)\Leftrightarrow \boxed{f=\frac{-8L^2R^2r}{m(r^2+R^2-x_0^2)^3}}$

Άσκηση: Σε ποιο πεδίο $\bar{F} = f(r)\hat{r}$ είναι δυνατή η κίνηση με $r = r_0 e^{-\lambda t}$;

Λύση:

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2} = \frac{L}{mr_0^2} e^{2\lambda t} \Leftrightarrow \varphi = \frac{L e^{2\lambda t}}{2\lambda m r_0^2} + \varphi_0 \Leftrightarrow e^{2\lambda t} = \frac{2\lambda m r_0^2}{L}(\varphi-\varphi_0)$$

Άρα $u(\varphi) = \frac{1}{r_0 e^{-\lambda t}} = \frac{1}{\cancel{r_0}}\sqrt{\frac{2\lambda m \cancel{r_0^2}}{L}(\varphi-\varphi_0)} = \sqrt{\frac{2\lambda m}{L}(\varphi-\varphi_0)}$ άρα $\varphi-\varphi_0 = \frac{Lu^2}{2\lambda m}$

$$u' = \dots, \quad u'' = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2\lambda m}{L}\frac{1}{(\varphi-\varphi_0)^3}} = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2\lambda m}{L}\frac{(2\lambda m)^3}{L^3 u^6}} = -\frac{\lambda^2 m^2}{L^2 u^3}$$

$$u'' + u = -\frac{mf}{L^2u^2} \Leftrightarrow f = -\frac{L^2u^2}{m}\left(-\frac{\lambda^2 m^2}{L^2 u^3} + u\right) = \underline{m\lambda^2 r - \frac{L^2}{mr^3}}$$

Απάντηση: $\bar{F} = \left(m\lambda^2 r - \frac{\ell^2}{mr^3}\right)\hat{r}$ και η στροφορμή του σώματος είναι $L = \ell$.

Ποιες οι τροχιές σε $\bar{F} = \left(m\lambda^2 r - \frac{\ell^2}{m r^3}\right)\hat{r}$;

Λύση:

$$u'' + u = -\frac{mF}{L^2 u^2} \quad \text{με} \quad F = \frac{m\lambda^2}{u} - \frac{\ell^2}{m}u^3 \quad \text{δηλ.}$$

$$u'' + \left(1 - \frac{\ell^2}{L^2}\right)u = -\frac{m^2\lambda^2}{L^2 u^3}$$

Πολλ/ζω με u': $\quad u'u'' + \left(1 - \frac{\ell^2}{L^2}\right)uu' = -\frac{m^2\lambda^2}{L^2 u^3}u' \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{u'^2}{\cancel{2}} + \left(1 - \frac{\ell^2}{L^2}\right)\frac{u^2}{\cancel{2}} = \frac{m^2\lambda^2}{\cancel{2}L^2u^2} + \frac{C}{\cancel{2}} \Rightarrow$$

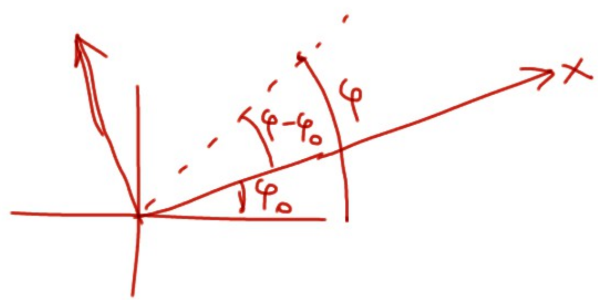
$$\Rightarrow (uu')^2 + \left(1 - \frac{\ell^2}{L^2}\right)(u^2)^2 = \frac{m^2\lambda^2}{L^2} + C(u^2) \quad (*) \qquad \text{Θέτω} \quad u^2 = h(\varphi) + D$$

οπότε $uu' = \frac{h'}{2}$ και $(*) \rightarrow \frac{h'^2}{4} + \left(1 - \frac{\ell^2}{L^2}\right)\left(h^2 + D^2 + \underline{\underline{2Dh}}\right) = \frac{m^2\lambda^2}{L^2} + \underline{\underline{Ch}} + CD$

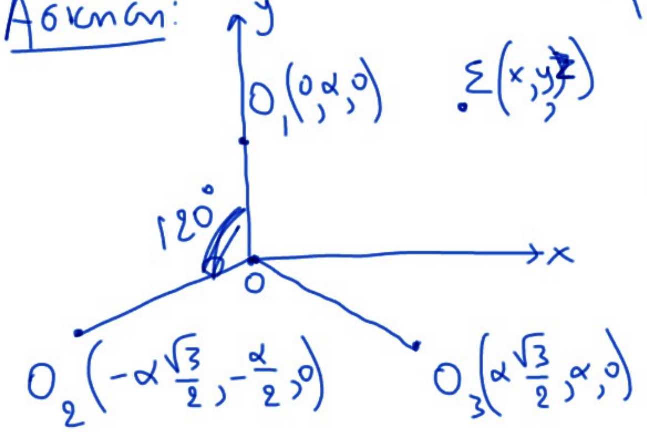
Διαλέγοντας $C = 2D\left(1 - \frac{\ell^2}{L^2}\right)$ έχω $\quad \frac{h'^2}{2} + 4\left(1 - \frac{\ell^2}{L^2}\right)\frac{h^2}{2} = \text{σταθ}$

$$\xrightarrow{\text{παραγωγίζοντας}} \quad h'' + 4\left(1 - \frac{\ell^2}{L^2}\right)h = 0$$

- Αν $l^2 < L^2$, $h = h_0 \cos\left[2\sqrt{1-\frac{l^2}{L^2}}\,(\varphi-\varphi_0)\right]$, $u = \sqrt{h+D}$, $r = \frac{1}{\sqrt{h+D}}$
- Αν $l^2 > L^2$, $h = h_0 \cosh\left[2\sqrt{\frac{l^2}{L^2}-1}\,(\varphi-\varphi_0)\right]$, $u = \sqrt{h+D}$, $r = \frac{1}{\sqrt{h+D}}$
- Αν $l^2 = L^2$, $h = h_0(\varphi-\varphi_0)$, $u = \sqrt{h_0\varphi + D_0}$, $r = \frac{1}{\sqrt{h_0\varphi+D_0}}$



Άσκηση:



Τα κέντρα δυνάμεων O_1, O_2, O_3 σε κορυφές ισόπλευρου τριγώνου.

Ασκούν δυνάμεις $-\frac{k}{3}\vec{r}'$ με $k>0$ σε σώμα σε θέση $\vec{r}'$ ως προς αυτά.

Ποια η κίνηση του σώματος;

Λύση:

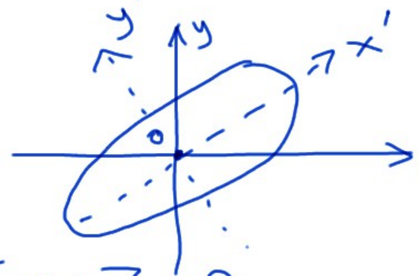
$$m\ddot{\vec{r}} = -\frac{k}{3}\underbrace{\vec{O_1\Sigma}}_{\vec{O\Sigma}-\vec{OO_1}} - \frac{k}{3}\underbrace{\vec{O_2\Sigma}}_{\vec{O\Sigma}-\vec{OO_2}} - \frac{k}{3}\underbrace{\vec{O_3\Sigma}}_{\vec{O\Sigma}-\vec{OO_3}} = -k\vec{O\Sigma} + \frac{k}{3}\underbrace{\left(\vec{OO_1}+\vec{OO_2}+\vec{OO_3}\right)}_{0} = -k\vec{r}$$

Δηλ. κεντρική η συνισταμένη!

Πιο εύκολα σε καρτεσιανές: $m\ddot{\vec{r}} = -\overset{m\omega^2}{k}\vec{r} \Leftrightarrow \ddot{\vec{r}} + \omega^2\vec{r} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{x} + \omega^2 x = 0 \\ \ddot{y} + \omega^2 y = 0 \\ \ddot{z} + \omega^2 z = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = D_x \sin(\omega t + \varphi_x) \\ y = D_y \sin(\omega t + \varphi_y) \end{cases}$$

$$Ax^2 + By^2 + \Gamma xy + \Delta x + E y + Z = 0$$



$$\left(\frac{x'}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{y'}{b}\right)^2 = 1$$

<u>Άσκηση</u>: Σώμα κινείται στο επίπεδο υπό την επίδραση $\bar{F} = -m\omega^2 \bar{r}$.

(α) Αν η κίνηση γίνεται στο χώρο $r_1 \leq r \leq r_2$ δείξτε ότι

$L = m\omega r_1 r_2$ και $E = \frac{1}{2} m\omega^2 (r_1^2 + r_2^2)$.

(β) Δείξτε ότι η τροχιά είναι έλλειψη $\frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2\varphi}{r_1^2} + \frac{\sin^2\varphi}{r_2^2}$ όπου η φ μετράται από το περίκεντρο (ελάχιστη απόσταση).

<u>Λύση</u>:

$V_{eff}(r_1) = V_{eff}(r_2) = E$ όπου $V_{eff} = \frac{L^2}{2mr^2} + \underbrace{\frac{m\omega^2 r^2}{2}}_{V = -\int \bar{F} \cdot d\bar{r} = \int_0^r m\omega^2 r\, dr}$

$$\frac{L^2}{2mr_1^2} + \frac{m\omega^2 r_1^2}{2} = \frac{L^2}{2mr_2^2} + \frac{m\omega^2 r_2^2}{2} \Leftrightarrow L^2 = \frac{m^2\omega^2 (r_2^2 - r_1^2)}{\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2}} = m^2\omega^2 r_1^2 r_2^2 \Leftrightarrow \boxed{L = m\omega r_1 r_2}$$

$$E = \frac{(m\omega r_1 r_2)^2}{2mr_1^2} + \frac{m\omega^2 r_1^2}{2} = \boxed{\frac{m\omega^2}{2}(r_1^2 + r_2^2) = E}$$

(β) $u'' + u = -\frac{mF}{L^2 u^2}$ ή $\frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{m\omega^2 r^2}{2} = E$ με $\dot{r} = \frac{d(1/u)}{d\varphi}\dot{\varphi} = -\frac{u'}{u^2}\frac{L}{mr^2} = -\frac{Lu'}{m}$

δηλ. $\frac{L^2}{2m}(u'^2 + u^2) + \frac{m\omega^2}{2u^2} = E \Leftrightarrow u'^2 + u^2 + \frac{1}{r_1^2 r_2^2 u^2} = \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2}$

$$(uu')^2 + (u^2)^2 + \frac{1}{r_1^2 r_2^2} - \left(\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}\right)(u^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad h'^2 + 4h^2 = \left(\frac{1}{r_1^2}-\frac{1}{r_2^2}\right)^2$$ όπου $$h = u^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}\right)$$

Αναλογία με $$\frac{\cancel{m}\dot{x}^2}{\cancel{2}} + \frac{\cancel{m}\omega^2 x^2}{\cancel{2}} = \frac{\cancel{m}\omega^2 x_0^2}{\cancel{2}} \rightsquigarrow x = x_0\cos(\omega t+\varphi_0)$$

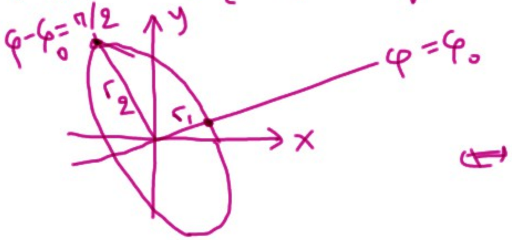
$$\omega = 2$$

$$h = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_1^2}-\frac{1}{r_2^2}\right)\cos\left[2(\varphi-\varphi_0)\right]$$

δηλ. $$u^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_1^2}-\frac{1}{r_2^2}\right)\cos\left[2(\varphi-\varphi_0)\right] + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}\right)$$

Για $\varphi=\varphi_0$, $u^2 = \frac{1}{r_1^2} \Leftrightarrow r = r_1$ = μικρότερη απόσταση (περίκεντρο)

Με $\cos\left[2(\varphi-\varphi_0)\right] = \cos^2(\varphi-\varphi_0) - \sin^2(\varphi-\varphi_0)$, $u^2 = \frac{\cos^2(\varphi-\varphi_0)}{r_1^2} + \frac{\sin^2(\varphi-\varphi_0)}{r_2^2}$



Στους στραμμένους άξονες $\frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2\varphi}{r_1^2} + \frac{\sin^2\varphi}{r_2^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{r_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{r_2}\right)^2 = 1$ έλλειψη.