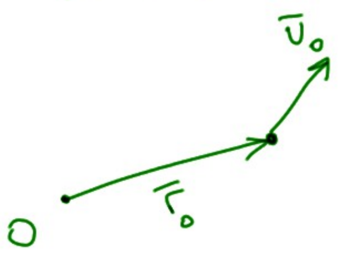
Κεντρικές δυνάμεις $\quad \bar{F} = f(r)\,\hat{r}$

(μέτρο εξαρτάται μόνο από το r).

Κίνηση επίπεδη



$$\bar{v}(t+\Delta t) = \bar{v}(t) + \bar{\alpha}(t)\,\Delta t$$

$$\bar{r}(t+\Delta t) = \bar{r}(t) + \bar{v}(t)\,\Delta t$$

Δεν υπάρχει αιτία να διώξει το σώμα από το επίπεδο που ορίζουν τα $\bar{r}_0, \bar{v}_0$.

Αλλιώς: $\quad \bar{N} = \bar{r}\times\bar{F} = 0 \quad$ άρα $\quad \bar{L} = \text{σταθ} \quad$ (διότι $\dot{\bar{L}} = \bar{r}\times\bar{F}$)

$\bar{L}\cdot\bar{r} = 0$ εξίσωση επιπέδου κάθετου στο $\bar{L}$, το οποίο περνά από το O.

Χρησιμοποιώ πολικές (r, φ) στο επίπεδο της κίνησης.

$$\bar r = r\hat r, \quad \bar v = \dot r\hat r + r\dot\varphi\hat\varphi, \quad \bar\alpha = (\ddot r - r\dot\varphi^2)\hat r + \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot\varphi)\hat\varphi$$

Νόμος Νεύτωνα $m\bar\alpha = \bar F = f(r)\hat r \Leftrightarrow \begin{cases} m(\ddot r - r\dot\varphi^2) = f(r) & (1) \\ \underbrace{mr^2\dot\varphi}_{r m v_\varphi} = L = \sigma\tau\alpha\theta & (2) \end{cases}$

$(2) \rightarrow \dot\varphi = \frac{L}{mr^2} \quad (2)'$

$(1) \xrightarrow{(2)'} m\ddot r = \overbrace{\frac{L^2}{mr^3} + f(r)}^{f_{eff}(r)} \quad (3)$: "μονοδιάστατη" κίνηση

$\bar\nabla \times \bar F = 0$ άρα η $\bar F$ συντηρητική με $V(r) = -\int f(r)dr$

Υπάρχει ολοκλήρωμα ενέργειας $\frac{1}{2}mv^2 + V(r) = E \Leftrightarrow$

περιστροφική κινητική ενέργεια

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}m\dot r^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot\varphi^2 + V(r) = E \overset{(2)'}{\Leftrightarrow} \frac{1}{2}m\dot r^2 + \underbrace{\frac{L^2}{2mr^2} + V(r)}_{V_{eff}(r)} = E$

$V_{eff}(r) \left(= -\int f_{eff}(r)dr \right)$

Δηλ. με $V_{eff}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + V(r)$ γράφω $\frac{1}{2}m\dot r^2 + V_{eff}(r) = E \quad (4)$

Από γραφική μελέτη $V_{eff}(r) \leq E \rightarrow$ όρια, $|\dot r| = \frac{2}{m}\left[E - V_{eff}(r)\right]$, $t = \int \frac{dr}{\dot r} = \pm\int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - V_{eff}(r)\right]}}$

Εξίσωση τροχιάς (σχέση $r-\varphi$) :

Α' τρόπος: Ορίζω $u=\frac{1}{r}$ και το θεωρώ $u=u(\varphi)$.

$$\dot r = \frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\frac{L}{mr^2} = -\frac{L}{m}\frac{du}{d\varphi} = -\frac{L}{m}u'$$

$$\ddot r = \frac{d}{d\varphi}(\dot r)\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{L}{m}u''\frac{L}{mr^2} \overset{r=1/u}{=\!=\!=} -\frac{L^2}{m^2}u^2u''.$$

ισχύει ομοίως και αν $f=f(r,\varphi)$

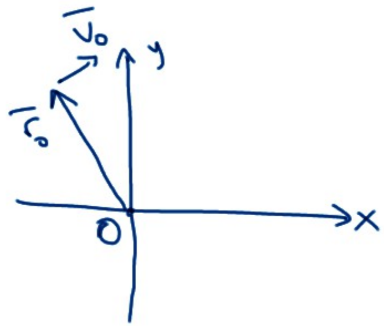
Άρα (3) $\rightarrow$ $m\left(-\frac{L^2}{m^2}u^2u''\right) = \frac{L^2u^3}{m} + f\left(\frac{1}{u}\right) \Leftrightarrow \boxed{u''+u = -\frac{m}{L^2u^2}f\left(\frac{1}{u}\right)}$ (5)

Β' τρόπος: (4) $\rightarrow$ $\frac{1}{2}m\left(\frac{L}{m}u'\right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V = E \Leftrightarrow \frac{L^2}{2m}\left(u'^2+u^2\right) + V = E$ (6)

Γ' τρόπος: $\varphi = \int d\varphi = \int \underbrace{\frac{d\varphi}{dt}}_{L/mr^2}\frac{dr}{\dot r} = \pm\int \frac{L\,dr}{mr^2\sqrt{\frac{2}{m}\left[E-V_{eff}(r)\right]}}$

$\dot r$ ⇝ συνάρτηση του r από (4)

Άσκηση: Σώμα $m=1$ κινείται στο πεδίο κεντρικής δύναμης $\bar F = -625\,\hat r$.
Αρχικά βρίσκεται στο $\bar r_0 = -3\hat x + 4\hat y$ και έχει ταχύτητα $\bar v_0 = 4\hat x + 3\hat y$.
Ποιες οι αψίδες της τροχιάς;



Λύση:

$\bar r_0 = -3\hat x + 4\hat y$ άρα $r_0 = \sqrt{x^2+y^2} = 5$

και φ_0 κοινή λύση των $\cos\varphi_0 = \frac{x}{r} = \frac{-3}{5}$, $\sin\varphi_0 = \frac{y}{r} = \frac{4}{5}$

δηλ. $\varphi_0 = \arccos(-3/5)$ διότι ανήκει στο 2° τεταρτημόριο.

$$\dot r_0 = \bar v_0 \cdot \hat r_0 = \bar v_0 \cdot \frac{\bar r_0}{r_0} = 0, \quad \bar L = m\,\bar r_0 \times \bar v_0 = \begin{vmatrix} \hat x & \hat y & \hat z \\ -3 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -25\,\hat z, \quad \dot\varphi_0 = \frac{L}{m r_0^2} = -1$$

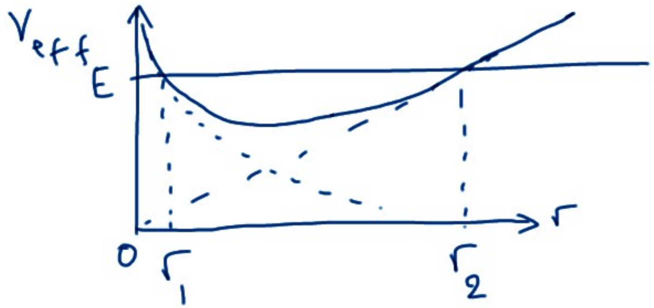
(αλλιώς $v_{\varphi_0} = \bar v_0 \cdot \hat\varphi_0 = \bar v_0 \cdot \left(-\sin\varphi_0\,\hat x + \cos\varphi_0\,\hat y\right) = \bar v_0 \cdot \left(-\frac{y_0}{r_0}\hat x + \frac{x_0}{r_0}\hat y\right) = (4\hat x + 3\hat y)\cdot\left(-\frac{4}{5}\hat x - \frac{3}{5}\hat y\right) = -5$

και $L = m r_0 v_{\varphi_0} = -25$, $\dot\varphi_0 = \frac{v_{\varphi_0}}{r_0} = \frac{-5}{5} = -1$).

$$V = -\int \bar F \cdot d\bar r = -\int (-625)\,\underbrace{\hat r \cdot d\bar r}_{dr} = 625\,r + \cancel{c}^{\,0}$$

και $$V_{eff} = \frac{L^2}{2mr^2} + V = \frac{625}{2r^2} + 625\,r$$

$$V_{eff} = \frac{625}{2r^2} + 625\,r$$



όρια τροχιάς $V_{eff}(r) \leq E$

με $E = \left[\cancel{\frac{m\dot{r}^2}{2}} + V_{eff}(r)\right]_{t=0} = V_{eff}(r_0) = V_{eff}(5) = 251 \cdot \frac{25}{2}$

Η μια αψίδα είναι η $r_0 = 5$.

Οι αψίδες $\dot{r} = 0 \Leftrightarrow V_{eff}(r) = E \Leftrightarrow \frac{625}{2r^2} + 625\,r = 251 \cdot \frac{25}{2} \Leftrightarrow r^3 - \frac{251}{50}r^2 + \frac{1}{2} = 0$

$$\begin{array}{l|l}
r^3 - \frac{251}{50}r^2 + \frac{1}{2} & r-5 \\ \hline
-r^3 + 5r^2 & r^2 - \frac{r}{50} - \frac{1}{10} \\ \hline
\quad -\frac{r^2}{50} + \frac{1}{2} & \\
\quad +\frac{r^2}{50} - \frac{r}{10} & \\ \hline
\quad -\frac{r}{10} + \frac{1}{2} & \\
\quad\quad 0 &
\end{array}$$

Δηλ. $(r-5)\left(r^2 - \frac{r}{50} - \frac{1}{10}\right) = 0$

$\Leftrightarrow r = 5$ ή $\frac{1 \pm \sqrt{1001}}{100}$

Δεκτές λύσεις (θετικές) οι:

$r_1 = \frac{1+\sqrt{1001}}{100} = 0.326$ και $r_2 = 5$.

Αλλιώς: στις αψίδες $\dot{r}=0$ άρα

$$\left.\begin{aligned} L &= mrv \\ \frac{mv^2}{2}+V &= E \end{aligned}\right\} \quad \text{απαλείφω } v=\frac{L}{mr}$$

$$\frac{L^2}{2mr^2}+V=E$$

(δηλ. $V_{eff}(r)=E$)

Εξίσωση τροχιάς $u''+u=-\frac{mF}{L^2u^2}=\frac{1}{u^2}$ δεν λύνεται.

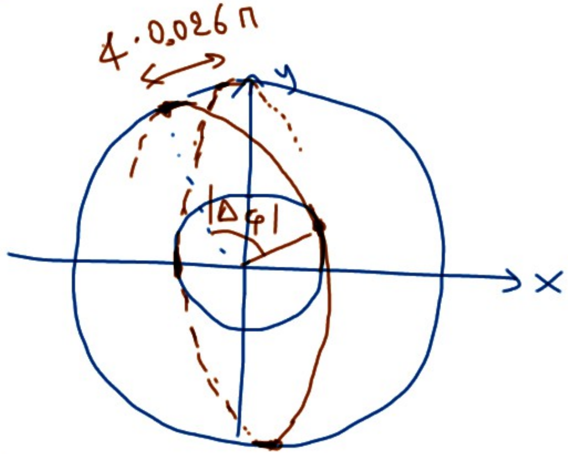
Όσο το r αλλάζει από r_1 σε r_2 το φ αλλάζει κατά

$$\Delta\varphi=\int d\varphi=\int \underbrace{\frac{d\varphi}{dt}}_{\frac{L}{mr^2}}\underbrace{\frac{dt}{dr}}_{\frac{1}{\dot{r}}}dr=\int_{r_1}^{r_2}\frac{\frac{L}{mr^2}dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E-V_{eff}\right)}}=$$

$$=\int_{0.326}^{5}\frac{-25\,dr}{r^2\sqrt{251.25-\frac{625}{r^2}-625r}}=-0.526\pi$$

αριθμητική λύση

δηλ. $|\Delta\varphi|=\frac{\pi}{2}+0.026\pi$



Η κίνηση γίνεται στο δακτύλιο $r_1\le r\le r_2$

Άσκηση: Κίνηση σε $\bar{F} = -\frac{k}{r^3}\hat{r}$, $k>0$

Αρχικά $\varphi=0$, $r=r_0$, $\bar{v} = v_0\hat{\varphi}$ $(\dot{r}_0 = 0$, αψίδα$)$

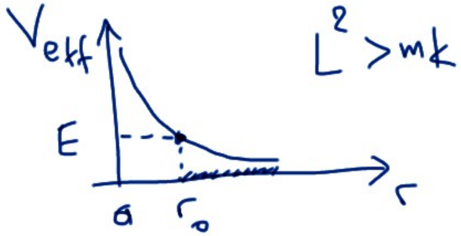
(α) Για ποιες v_0 πάει στο κέντρο; Ποια η τροχιά; Σε πόσο χρόνο $r=0$;

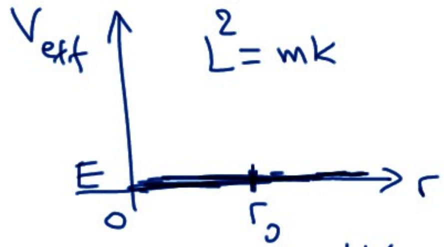
(β) Για ποιες v_0 πάει στο άπειρο; —"— Ποια η $\bar{v}_\infty$; Ποια η $\bar{r}(t)$;

Λύση:

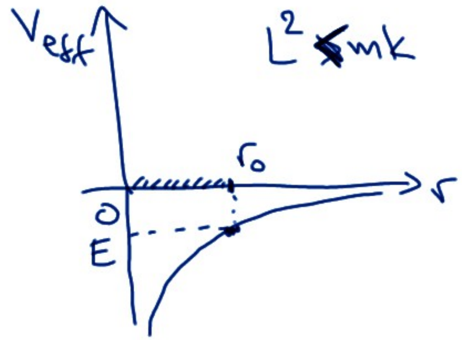
$$V = -\int \bar{F}\cdot d\bar{r} = \int \frac{k}{r^3}dr = -\frac{k}{2r^2} + \cancel{c}^{\,0}$$

$$L = m r_0 v_0, \quad E = \frac{m v_0^2}{2} - \frac{k}{2r_0^2}, \quad V_{eff} = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{k}{2r^2} = \frac{L^2 - mk}{2mr^2} \quad \left(E = V_{eff}(r_0)\right)$$



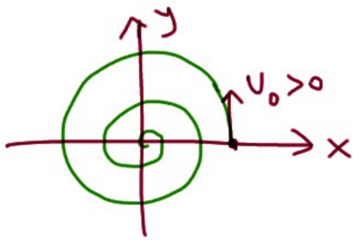


$$m\ddot{r} = -\frac{dV_{eff}}{dr}$$



$$V_{eff}(r) \le E$$

(α) $L^2 < mk \Leftrightarrow m^2 v_0^2 r_0^2 < mk \Leftrightarrow v_0 < \sqrt{\frac{k}{m r_0^2}}$



Εξίσωση τροχιάς $\quad u'' + u = -\frac{mF}{L^2u^2} = \frac{mku^{\cancel{3}}}{L^2\cancel{u^2}} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow u'' - \underbrace{\left(\frac{mk}{L^2}-1\right)}_{\lambda^2>0} u = 0 \Leftrightarrow u = C_1 e^{\lambda\varphi} + C_2 e^{-\lambda\varphi}, \quad \lambda = \sqrt{\frac{mk}{L^2}-1}$$

Αρχικές συνθήκες : $u\big|_{\varphi=0} = \frac{1}{r_0}$, $u'\big|_{\varphi=0} = 0$ (αφού $\dot r_0 = 0$ και $u' = \frac{d(1/r)}{d\varphi} = -\frac{1}{r^2}\frac{\dot r}{\dot\varphi} = -\frac{\dot r}{L/m}$)

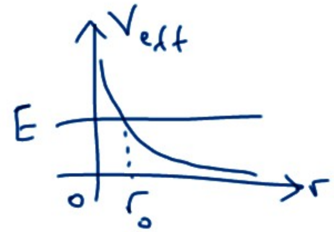
Δηλ. $\begin{cases} \frac{1}{r_0} = C_1 + C_2 \\ 0 = \lambda C_1 - \lambda C_2 \end{cases} \Leftrightarrow C_1 = C_2 = \frac{1}{2r_0}$ και $u = \frac{e^{\lambda\varphi}+e^{-\lambda\varphi}}{2r_0}$

$$\Rightarrow r = \frac{2r_0}{e^{\lambda\varphi}+e^{-\lambda\varphi}} = \frac{r_0}{\cosh(\lambda\varphi)}$$

$t = \int_{r_0}^{0}\frac{dr}{\dot r}$ με $\dot r = -\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - V_{eff}(r)\right]}$, δηλ. $t = \frac{1}{\lambda v_0}\int_0^{r_0}\frac{dr}{\sqrt{r_0^2/r^2 - 1}} = \frac{1}{\lambda v_0}\int_0^{r_0}\frac{r\,dr}{\sqrt{r_0^2-r^2}} =$

$= \frac{1}{\lambda v_0}\left[-\sqrt{r_0^2-r^2}\right]_0^{r_0} = \frac{r_0}{\lambda v_0}$ ή $t = \int\frac{d\varphi}{\dot\varphi} = \int_0^\infty \frac{d\varphi}{L/mr^2} = \frac{mr_0^2}{L}\int_0^\infty\frac{d\varphi}{\cosh^2(\lambda\varphi)} = \frac{mr_0^2}{\lambda L}\left[\tanh(\lambda\varphi)\right]_0^\infty$

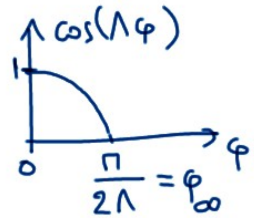
(β) $L^2 > mk \Leftrightarrow v_0 > \sqrt{\dfrac{k}{m r_0^2}}$.



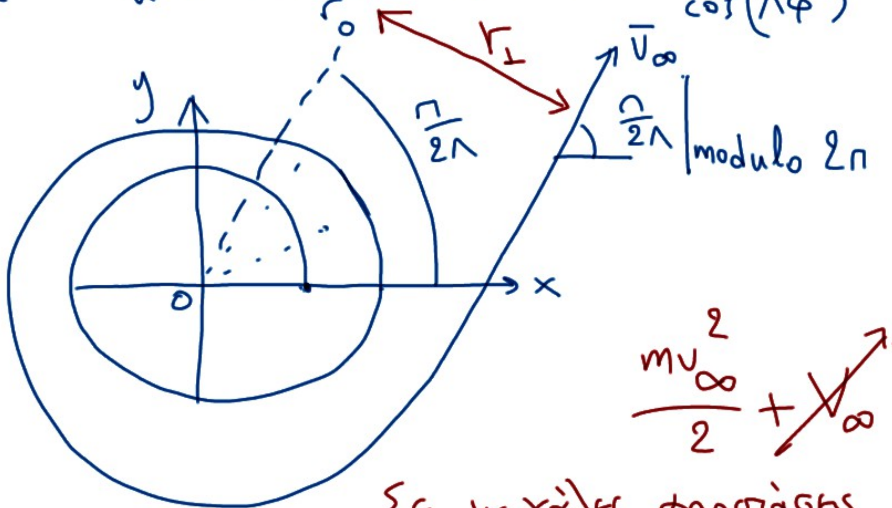
Εξίσωση τροχιάς $u'' + u = \dfrac{mk}{L^2} u \Leftrightarrow u'' + \underbrace{\left(1 - \dfrac{mk}{L^2}\right)}_{\Lambda^2 > 0} u = 0$

$\Leftrightarrow u = C_1 \cos(\Lambda\varphi) + C_2 \sin(\Lambda\varphi)$, με $\Lambda = \sqrt{1 - mk/L^2}$.

Αρχικές συνθήκες $u\big|_{\varphi=0} = \dfrac{1}{r_0} \Leftrightarrow C_1 = \dfrac{1}{r_0}$ και $u'\big|_{\varphi=0} = 0$ (αφού $\dot{r}_0 = 0$) $\Leftrightarrow C_2 = 0$



οπότε $u = \dfrac{\cos(\Lambda\varphi)}{r_0} \Leftrightarrow r = \dfrac{r_0}{\cos(\Lambda\varphi)}$

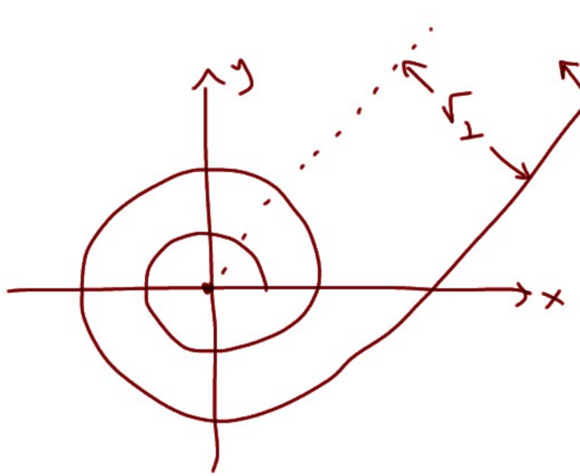


Για $\varphi \to \dfrac{\pi}{2\Lambda}$, $r \to \infty$

Δηλ. $\varphi \xrightarrow[t \to \infty]{} \dfrac{\pi}{2\Lambda} = \dfrac{\pi}{2\sqrt{1 - mk/L^2}}$.

$\dfrac{m v_\infty^2}{2} + \cancel{V_\infty}^{\,0} = E \Leftrightarrow v_\infty = \sqrt{v_0^2 - \dfrac{k}{m r_0^2}}$

Σε μεγάλες αποστάσεις $v_\varphi = \dfrac{L}{mr} \to 0$ και $v_r \to v_\infty$



$$\varphi_\infty = \frac{\pi}{2\Lambda}\Big|_{\text{modulo } 2\pi}$$

$$\bar v_\infty = v_\infty\left(\cos\varphi_\infty\,\hat x + \sin\varphi_\infty\,\hat y\right)$$

$$\bar L = \bar r \times m\bar v = m\left(\bar r_{\parallel} + \bar r_\perp\right)\times \bar v = m\,\bar r_\perp \times \bar v$$

$$\Rightarrow L = m\,r_\perp v_\infty \Leftrightarrow r_\perp = \frac{L}{m v_\infty} = \frac{r_0}{\Lambda}$$

(Το ίδιο από $\bar v_\infty = v_\infty\hat\varepsilon$ με $\hat\varepsilon = \cos\varphi_\infty\,\hat x + \sin\varphi_\infty\,\hat y$ και

$$\bar r_\perp = \hat\varepsilon \times \left(\bar r \times \hat\varepsilon\right) \quad \text{με} \quad \bar r = r\,\hat r = \frac{r_0}{\cos(\Lambda\varphi)}\left(\cos\varphi\,\hat x + \sin\varphi\,\hat y\right)$$

οπότε

$$\bar r_\perp = -r_0\,\frac{\sin(\varphi_\infty-\varphi)}{\cos(\Lambda\varphi)}\underbrace{\left(-\sin\varphi\,\hat x + \cos\varphi\,\hat y\right)}_{\hat\varphi} \overset{0/0}{=} -\frac{r_0}{\Lambda}\hat\varphi_\infty\ \Big)$$

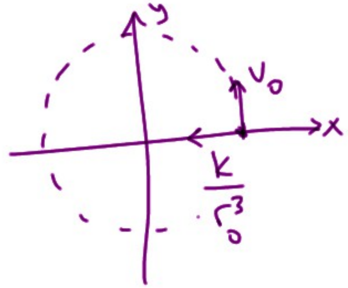
$$\dot\varphi = \frac{L}{mr^2} = \frac{L}{mr_0^2}\cos^2(\Lambda\varphi) \Leftrightarrow \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos^2(\Lambda\varphi)} = \int_0^t \frac{L}{mr_0^2}\,dt \Leftrightarrow \tan(\Lambda\varphi) = \frac{\Lambda v_0}{r_0}t \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \varphi = \frac{1}{\Lambda}\arctan\left(\frac{\Lambda v_0 t}{r_0}\right)$$

$$r = \frac{r_0}{\cos(\Lambda\varphi)} = r_0\sqrt{\frac{\sin^2(\Lambda\varphi)+\cos^2(\Lambda\varphi)}{\cos^2(\Lambda\varphi)}} = r_0\sqrt{\tan^2(\Lambda\varphi)+1} = \sqrt{r_0^2 + \Lambda^2 v_0^2 t^2}\,.$$

(Το ίδιο από $t = \int_{r_0}^{r}\frac{dr}{\dot r}$ με $\dot r = +\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V_{eff}\right)} = \frac{\sqrt{L^2-mk}}{m r_0 r}\sqrt{r^2 - r_0^2}$ ...)

(Αν $L^2 = mk$ τότε



$$\frac{mv_0^2}{r_0} = |F| \Leftrightarrow \frac{mv_0^2}{r_0} = \frac{k}{r_0^3} \Leftrightarrow m^2 v_0^2 r_0^2 = mk$$

$$\Leftrightarrow L^2 = mk$$

και το σώμα εκτελεί κυκλική κίνηση.

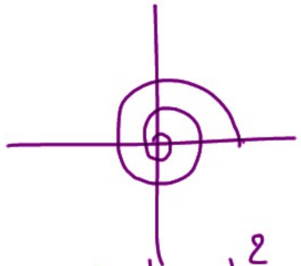
Η F δίνει ακριβώς την κεντρομόλο που χρειάζεται.

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = -|F|$$

$$m\ddot{r} = mr\dot{\varphi}^2 + F = \frac{L^2}{mr^3} + F$$

$|F|_0 < \frac{L^2}{mr_0^3}$

$\Leftrightarrow km < L^2$



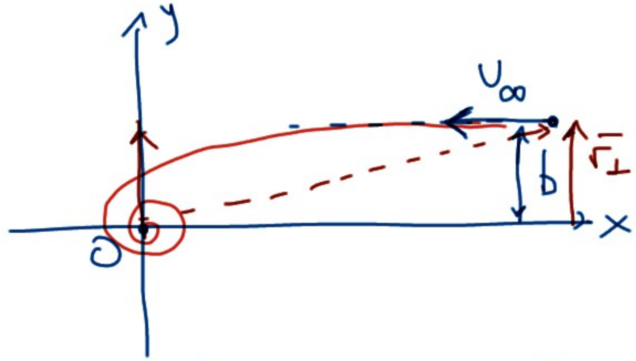
$|F|_0 > \frac{L^2}{mr_0^3}$

$\Leftrightarrow km > L^2$)

Άσκηση: Κίνηση στο πεδίο $\bar{F} = -\frac{k}{r^3}\hat{r}$, $k>0$.

Αρχικά $r = r_\infty \to \infty$, $\varphi = 0$, $v = v_\infty$, παράμετρος κρούσης $b = \sqrt{\frac{k}{m v_\infty^2}}$.

Ποια η τροχιά;



Λύση:

$$\bar{L} = m\,\bar{r}\times\bar{v} = m\,\bar{r}_\perp\times\bar{v} = m b v_\infty \hat{z}$$

$$u'' + u = -\frac{mF}{L^2u^2} = \frac{-m(-ku^3)}{(mbv_\infty)^2u^2} = u \Leftrightarrow u'' = 0 \Leftrightarrow u = C_1 + C_2\varphi$$

Αρχικά $\varphi = 0$, $u = 0$ άρα $C_1 = 0$, $u' = \frac{d(1/r)}{d\varphi} = \frac{\frac{d(1/r)}{dt}}{\dot{\varphi}} = \frac{-\dot{r}/r^2}{L/mr^2} = -\frac{\dot{r}}{L/m} =$

$= \frac{-(-v_\infty)}{mbv_\infty/m}$ (διότι $\dot{r}\big|_0 = -v_\infty$) δηλ. $u' = \frac{1}{b} \Leftrightarrow C_2 = 1/b$

$v_\varphi = L/mr = 0$

$$u = \frac{\varphi}{b} \Leftrightarrow r = b/\varphi$$

Αλλιώς: $V_{eff} = \frac{L^2}{2mr^2} + V = \dots = 0$ άρα $\frac{m\dot{r}^2}{2} = \text{σταθ} \Leftrightarrow \dot{r} = -v_\infty$

$\Leftrightarrow r = r_\infty - v_\infty t$ και $\dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2} = \frac{L}{m(r_\infty - v_\infty t)^2} \Leftrightarrow \varphi = \frac{b}{r} - \frac{b}{r_\infty} \approx \frac{b}{r}$