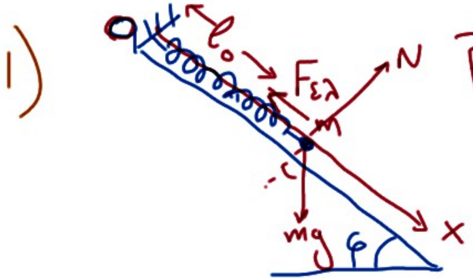
## Αρμονική ταλάντωση, αμείωτη (σταθερού πλάτους):

$$\ddot q + \omega_0^2 q = 0$$

Παραδείγματα:

1)



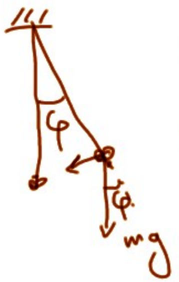

$\vec F_{\epsilon\lambda} = -k(x-\ell_0)\hat x$

$$m\ddot x = mg\sin\varphi - k(x-\ell_0)$$

$$q = x - x_0 \quad \text{με} \quad x_0 = \ell_0 + \frac{mg\sin\varphi}{k}$$

$$\ddot q + \underbrace{\left(\frac{k}{m}\right)}_{\omega_0^2} q = 0$$

2) Εκκρεμές (κατακόρυφο, ιδανικό)




$$mR\ddot\varphi = -mg\sin\varphi$$

$$\Leftrightarrow \ddot\varphi + \frac{g}{R}\sin\varphi = 0$$

Αν $|\varphi| \ll 1$, $\sin\varphi \approx \varphi$

$$\ddot\varphi + \underbrace{\left(\frac{g}{R}\right)}_{\omega_0^2}\varphi = 0$$

3) Γύρω από ελάχιστο $V(x)$

$$V(x) \approx V(x_0) + \cancel{V'(x_0)}(x-x_0) + \frac{1}{2}V''(x_0)(x-x_0)^2$$

δηλ. $V \approx V(x_0) + \frac{1}{2}\underbrace{V''(x_0)}_{k} q^2$ με $q = x - x_0$

$\frac{1}{2}m\dot q^2 + \frac{1}{2}k q^2 = $ σταθ. παραγωγίζω

$$\Rightarrow \ddot q + \underbrace{\left(\frac{k}{m}\right)}_{\omega_0^2} q = 0$$

$$\ddot{q}+\omega_0^2 q=0 \Leftrightarrow q=\underset{\substack{\downarrow \\ D\sin\varphi_0}}{C_1}\cos(\omega_0 t)+\underset{\substack{\downarrow \\ D\cos\varphi_0}}{C_2}\sin(\omega_0 t) \quad (*) \quad = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{πλάτος}}}{D}\sin(\omega_0 t+\varphi_0) \quad (**)$$

$$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$$

$$\left.\begin{array}{l} C_1 = D\sin\varphi_0 \\ C_2 = D\cos\varphi_0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow D=\sqrt{C_1^2+C_2^2}$$

$\varphi_0$ κοινή λύση των $\sin\varphi_0=\dfrac{C_1}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}$, $\cos\varphi_0=\dfrac{C_2}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}$

Όμοια $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$ και $q=D\cos(\omega_0 t+\varphi_0)$

Αν αρχικά $q\big|_{t=0}=q_0$, $\dot{q}\big|_{t=0}=v_0$ τότε $(*) \rightarrow q_0=C_1$

$\frac{d}{dt}(*) \rightarrow v_0=C_2\omega_0 \Leftrightarrow C_2=\frac{v_0}{\omega_0}$

$$\boxed{q=q_0\cos(\omega_0 t)+\frac{v_0}{\omega}\sin(\omega_0 t)}$$

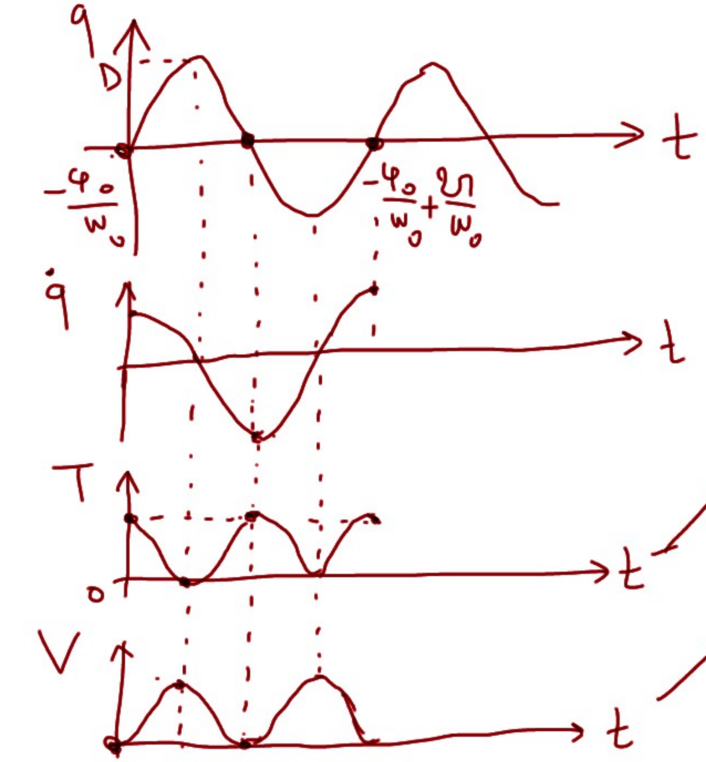
Αλλιώς, τε $(**)$: $\left.\begin{array}{l} q_0=D\sin\varphi_0 \\ v_0=D\omega_0\cos\varphi_0 \end{array}\right]$ ....

Κινητική ενέργεια ταλάντωσης $T = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 D^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)$

($q = D \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$)

Δυναμική ενέργεια ταλάντωσης $V = \frac{1}{2} \underbrace{k}_{m\omega_0^2} q^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 D^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)$

$$T + V = E = \frac{1}{2} m \omega_0^2 D^2$$



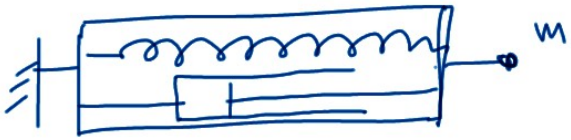

$$\cos^2 \xi = \frac{1 + \cos(2\xi)}{2}$$

περίοδος $\pi / \omega_0$

$$\sin^2 \xi = \frac{1 - \cos(2\xi)}{2}$$

Αρμονική ταλάντωση με αντίσταση ανάλογη της ταχύτητας

$$m\ddot{x} = -\underset{\downarrow\, m\omega_0^2}{k}x - 2\gamma m\dot{x}$$




$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

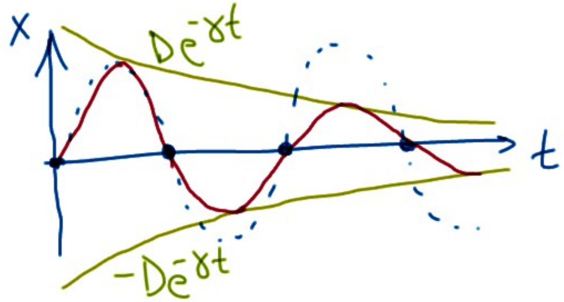
Ψάχνω λύσεις $e^{\lambda t}$. Αντικαθιστώ $\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0$, $\Delta = 4(\gamma^2 - \omega_0^2) = 4i^2(\omega_0^2-\gamma^2)$

- ασθενής απόσβεση $\gamma < \omega_0$.

$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}$ και $x = C_1 e^{(-\gamma+i\sqrt{\ })t} + C_2 e^{(-\gamma-i\sqrt{\ })t}$

$$\Leftrightarrow \quad x = e^{-\gamma t}\left(C_1 e^{i\sqrt{\ }t} + C_2 e^{-i\sqrt{\ }t}\right) = e^{-\gamma t}\left[D_1\cos\left(\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\,t\right) + D_2\sin\left(\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\,t\right)\right]$$

$$\text{ή} \quad x = \underbrace{De^{-\gamma t}}_{\text{μειούμενο πλάτος (φθίνουσα ταλάντωση)}}\sin\left(\underbrace{\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}}_{\text{κυκλική συχνότητα}}\,t + \varphi_0\right)$$

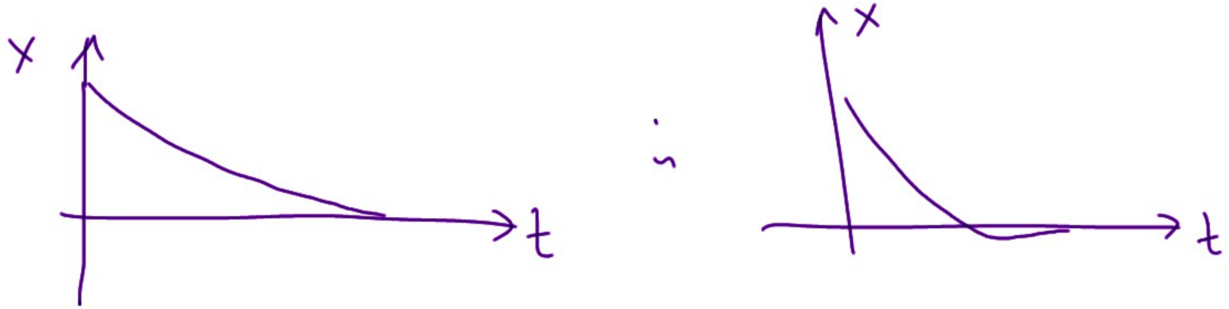



Πρακτικά σε $t \sim \frac{5}{\gamma}$, $x \simeq 0$

• ισχυρή απόσβεση $\gamma > \omega_0$: $\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ (και τα δύο αρνητικά)

$$x = c_1 e^{-\left(\gamma - \sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}\right)t} + c_2 e^{-\left(\gamma + \sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}\right)t}$$

$x$ πρακτικά 0 σε χρόνο $\dfrac{5}{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}$



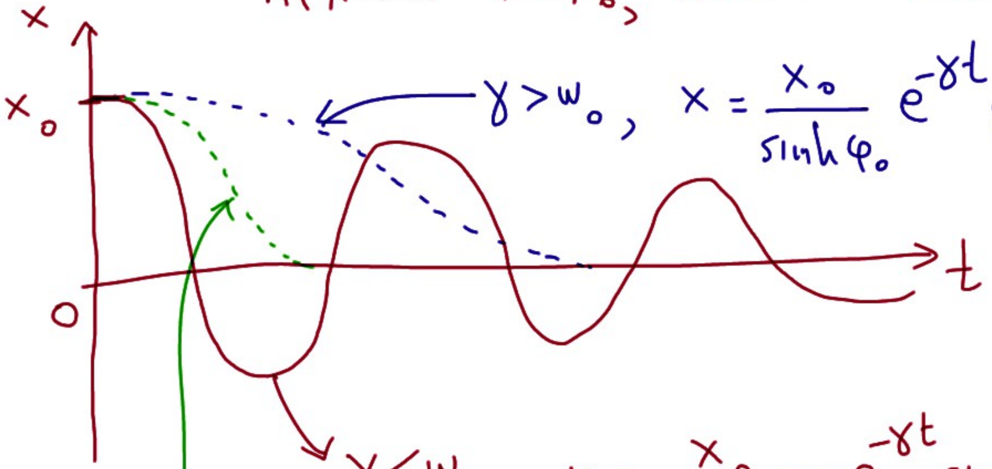

(Η ίδια γράφεται και $x = D e^{-\gamma t} \sinh\left(\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\, t + \varphi_0\right)$)

• κρίσιμη απόσβεση $\gamma = \omega_0$ : $\lambda_1 = \lambda_2 = -\gamma$

$$x = e^{-\gamma t}(c_1 + c_2 t) \qquad x \approx 0 \text{ σε } t \sim 5/\gamma$$

---

Αρχικά $x = x_0$, $\dot{x} = 0$. Ίδιο $\omega_0$, διαφορετικά $\gamma$.




$\gamma > \omega_0$, $x = \dfrac{x_0}{\sinh\varphi_0} e^{-\gamma t} \sinh\left(\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\, t + \varphi_0\right)$ με $\varphi_0 = \operatorname{arctanh}\sqrt{1 - \dfrac{\omega_0^2}{\gamma^2}}$

$\gamma < \omega_0$, $x = \dfrac{x_0}{\sqrt{1 - \gamma^2/\omega_0^2}} e^{-\gamma t} \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\, t + \arctan\sqrt{\dfrac{\omega_0^2}{\gamma^2} - 1}\right)$

$\gamma = \omega_0$, $x = x_0 e^{-\gamma t}(1 + \gamma t)$

## Εξαναγκασμένη ταλάντωση (με διεγέρτη)

$$m\ddot{x} = -\underbrace{kx}_{m\omega_0^2 x} - 2m\gamma\dot{x} + \underbrace{m f_0 \cos(\omega t)}_{\text{δύναμη από τον διεγέρτη (περιοδική, αρμονική)}} \Leftrightarrow \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0\cos(\omega t)$$

• Χωρίς απόσβεση, $\gamma = 0$: $\ddot{x} + \omega_0^2 x = f_0\cos(\omega t)$

$$x = x_{μερ} + x_{ομ}, \qquad x_{ομ} \to C_1\sin(\omega_0 t) + C_2\cos(\omega_0 t)$$

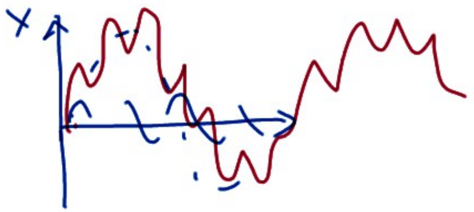
$x_{μερ}$: $A\cos(\omega t)$ με την αντικατάσταση να δίνει $-\omega^2 A + \omega_0^2 A = f_0 \Leftrightarrow A = \dfrac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$

Γενική λύση

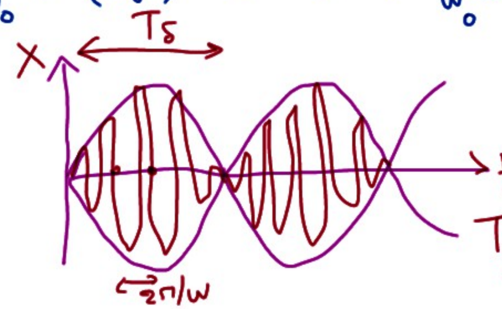
$$x = \underbrace{\frac{f_0}{\omega_0^2-\omega^2}\cos(\omega t)}_{\text{Ταλάντωση με την συχνότητα του διεγέρτη}} + \underbrace{C_1\sin(\omega_0 t) + C_2\cos(\omega_0 t)}_{\text{Ταλάντωση με } \omega_0}$$

Αν αρχικά $x|_{t=0} = x_0$, $\dot{x}|_{t=0} = v_0$ τότε

$$x = \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t) + x_0\cos(\omega_0 t) + \overbrace{\frac{f_0}{\omega_0^2-\omega^2}\Big[\underbrace{\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t)}_{2\sin\left(\frac{\omega_0-\omega}{2}t\right)\sin\left(\frac{\omega_0+\omega}{2}t\right)}\Big]}^{\frac{f_0}{2\omega_0}t\sin(\omega_0 t) \text{ αν } \omega=\omega_0}$$




Για $\omega \approx \omega_0$
διακρότημα




$$T_δ = \frac{2\pi}{|\omega_0 - \omega|}$$

• εξαναγκασμένη με απόσβεση, $\gamma \neq 0$ :

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\omega t) \quad , \quad f_0 > 0$$

$x = x_{μερ} + x_{ομ}$ → ό,τι βρήκατε πριν στην φθίνουσα. πρακτικά εξαφανίζεται μετά από κάποιο χρόνο

Α' τρόπος εύρεσης της $x_{μερ}$ : $x_{μερ} = \alpha \sin(\omega t) + b\cos(\omega t)$.

Αντικατάσταση → $(\underbrace{-\omega^2\alpha - 2\gamma\omega b + \omega_0^2 \alpha}_{0}) \sin(\omega t) + (\underbrace{-\omega^2 b + 2\gamma\omega\alpha + \omega_0^2 b}_{f_0}) \cos(\omega t) = f_0 \cos(\omega t)$

$$\alpha = \frac{2\gamma\omega f_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2} \quad , \quad b = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) f_0}{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2} .$$

Άρα $x_{μερ} = \dfrac{2\gamma\omega f_0 \sin(\omega t) + (\omega_0^2 - \omega^2) f_0 \cos(\omega t)}{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}$

Β' τρόπος : $x = Re\, z$ με $\ddot{z} + 2\gamma\dot{z} + \omega_0^2 z = f_0 e^{i\omega t}$

$z_{μερ} = A e^{i\omega t}$ με την αντικατάσταση να δίνει $-\omega^2 A + 2i\gamma\omega A + \omega_0^2 A = f_0 \Leftrightarrow A = \dfrac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega} = D e^{-i\varphi}$

$\left(\dot{z}_{μερ} = i\omega A e^{i\omega t} , \ \ddot{z}_{μερ} = (i\omega)^2 A e^{i\omega t}\right)$ και $x = Re\left(\dfrac{f_0 e^{i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega}\right)$

όπου $D = |A| = \dfrac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}$

και $\varphi \in (0, \pi)$

$\varphi = \arccos \dfrac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}$

Δηλ. $x = Re\left[D e^{i(\omega t - \varphi)}\right] = D\cos(\omega t - \varphi)$

Αφού "σβήσει" η $x_{ομ}$ μένει $x \approx x_{μερ} = D\cos(\omega t - \varphi)$ με

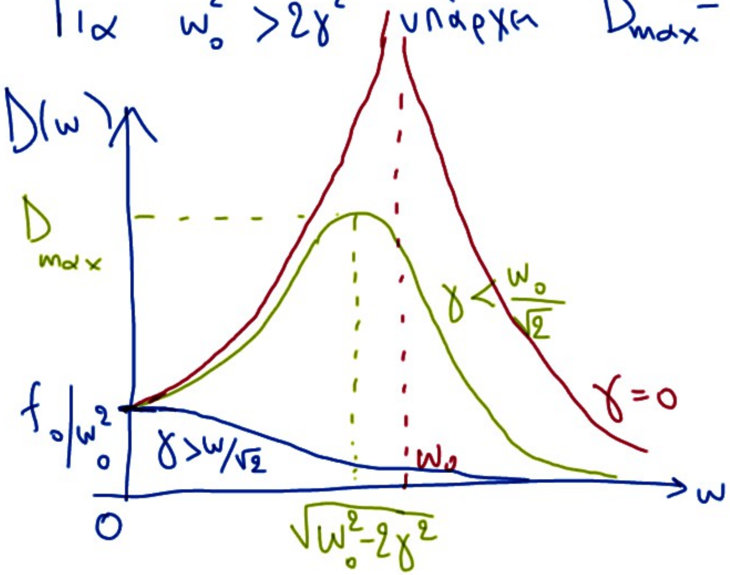
$$D = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\gamma\omega)^2}} \quad \text{και} \quad \varphi = \arccos\frac{\omega_0^2-\omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\gamma\omega)^2}}$$

$D(\omega)$

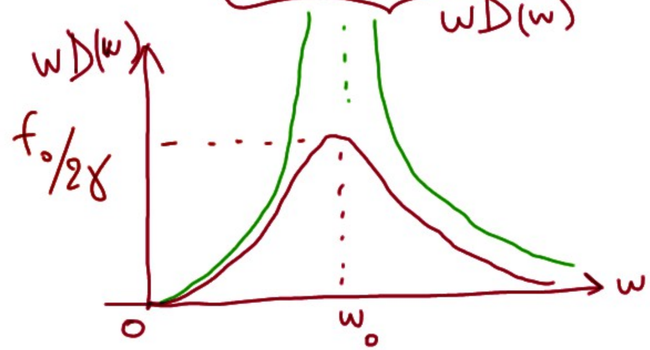
$$\frac{dD(\omega)}{d\omega} = f_0\,\frac{2\omega\,(\omega_0^2-2\gamma^2-\omega^2)}{\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\gamma\omega)^2\right]^{3/2}}$$

Για $\omega_0^2 < 2\gamma^2$, $D(\omega)\downarrow$ πάντα

Για $\omega_0^2 > 2\gamma^2$ υπάρχει $D_{max} = \dfrac{f_0}{2\gamma\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}}$ όταν $\omega = \sqrt{\omega_0^2-2\gamma^2}$




$$u = -\underbrace{\frac{f_0\,\omega}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\gamma\omega)^2}}}_{\omega D(\omega)}\sin(\omega t-\varphi)$$



Ποια η ενέργεια που δίνει ο διεγέρτης σε μια περίοδο της κίνησης;

$$\mathcal{E} = \int d\mathcal{E} = \int \bar{F}_{\delta\iota\varepsilon\gamma.} \cdot d\bar{r} = \int_0^T \underbrace{\bar{F}_{\delta\iota\varepsilon\gamma} \cdot \frac{d\bar{r}}{dt}}_{\text{ισχύς}\ m f_0 \cos(\omega t)\cdot[-\omega D(\omega)]\sin(\omega t-\varphi)} dt \quad , \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

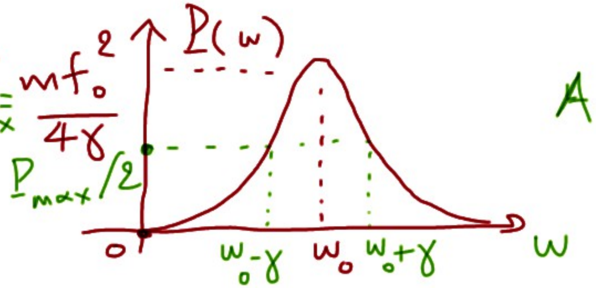
$$\underbrace{\sin(\omega t - \varphi)}_{\sin(\omega t)\cos\varphi - \sin\varphi\cos(\omega t)}$$

$$\mathcal{E} = m f_0 \left[-\omega D(\omega)\right] \left\{ \underbrace{\int_0^T \cos(\omega t)\sin(\omega t)\,dt}_{0} \cos\varphi - \underbrace{\int_0^T \cos^2(\omega t)\,dt}_{T/2} \sin\varphi \right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{E} = m f_0 \frac{\omega T}{2} D(\omega) \sin\varphi = m f_0 \pi D(\omega) \sin\varphi$$

$$\text{Μέση ισχύς} = \frac{\mathcal{E}}{T} = \frac{m f_0 \omega D}{2} \sin\varphi \xrightarrow[\sin\varphi = \dots]{D = \dots} P(\omega) = \frac{m f_0^2 \gamma}{\left(\frac{\omega_0^2}{\omega} - \omega\right)^2 + 4\gamma^2}$$

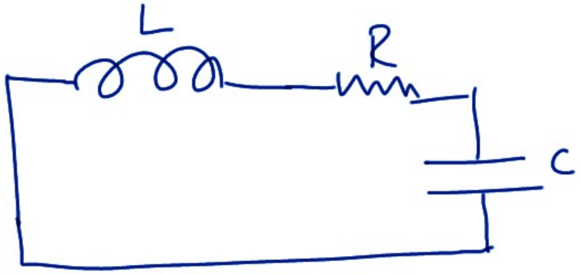
$P(\omega) =$ μέγιστη για $\omega = \omega_0$ : $P_{max} = \dfrac{m f_0^2}{4\gamma}$




Αν $\gamma << \omega_0$

$$P(\omega_0 \pm \gamma) = \frac{1}{2} P(\omega_0)$$

## R-L-C κυκλώματα




$\xrightarrow{}$ μαγνητική ροή $LI$

$$\oint \bar{E}\cdot d\bar{l} = -\frac{d\Phi}{dt} \Leftrightarrow$$

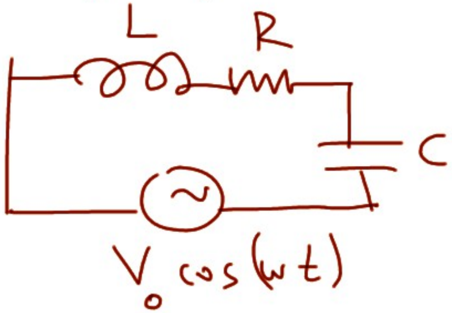
$$\Leftrightarrow IR + \frac{q}{C} = -L\frac{dI}{dt} \overset{I=\dot{q}}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = 0$$

ίδια με $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ για μηχανικό σύστημα

με $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $\gamma = \frac{R}{2L}$.

## Εξαναγκασμένη




$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = \underbrace{\frac{V_0}{L}}_{f_0}\cos(\omega t)$$