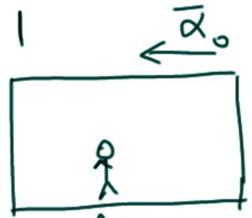
Μη-αδρανειακά συστήματα αναφοράς

Μη-αδρανειακός

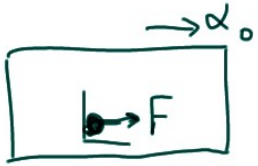
Παρ. 1



τριβές=0

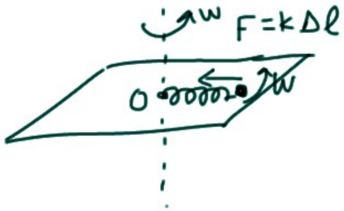
γιατί επιταχύνεται προς τα πίσω αφού $\bar F=0$

Παρ. 2



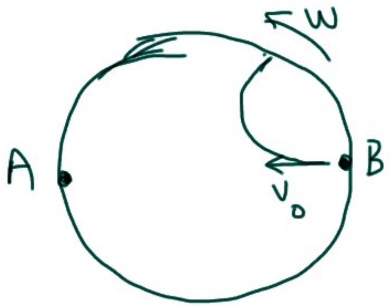
γιατί δεν επιταχύνεται αφού μου ασκείται $\bar F$

Παρ. 3



γιατί η m δεν κινείται ενώ $F=k\Delta l$

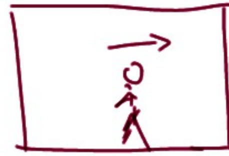
Παρ. 4



τριβές=0

γιατί το m δεν κινείται ευθύγραμμα/ομαλά;

Αδρανειακός

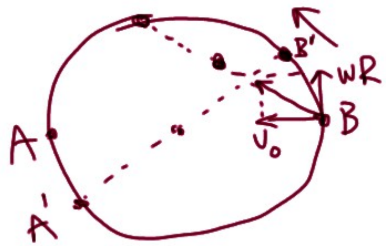


$\bar F=0$

$v=$σταθ

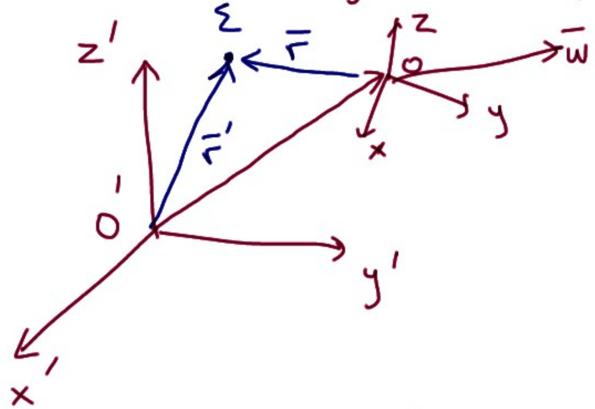
$F=m\alpha_0$

$m\omega^2 r=k\Delta l$



$\bar\upsilon=$σταθ.

Έστω $O'x'y'z'$ ένα αδρανειακό και $Oxyz$ ένα μη-αδρανειακό.



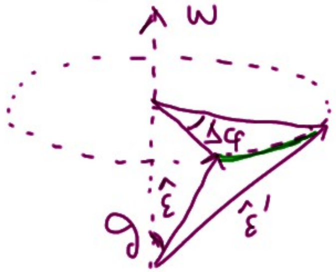
Η κίνηση του $Oxyz$ αναλύεται σε μεταφορική με αντίστοιχη επιτάχυνση $\bar{\alpha}_0 = \ddot{\bar{R}}$ και στροφή $\vec{w}$.

$$\bar{r}' = \underbrace{\vec{O'O}}_{\bar{R}} + \bar{r}$$

Λόγω της μεταφορικής κίνησης τα μοναδιαία $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ δεν αλλάζουν.

Λόγω της περιστροφής αλλάζουν $\frac{d\hat{x}}{dt} = \bar{w} \times \hat{x}$, $\frac{d\hat{y}}{dt} = \bar{w} \times \hat{y}$, $\frac{d\hat{z}}{dt} = \bar{w} \times \hat{z}$.

Απόδειξη:



$\Delta\varphi = w\Delta t$

ακτίνα $= \sin\theta$

Τόξο $= \sin\theta\ \Delta\varphi$

$|\Delta\hat{\varepsilon}| = \sin\theta\ \Delta\varphi$

$\left|\frac{\Delta\hat{\varepsilon}}{\Delta t}\right| = \sin\theta\ w$ ή $\boxed{\frac{d\hat{\varepsilon}}{dt} = \bar{w} \times \hat{\varepsilon}}$

Για κάθε διάνυσμα $\bar{A} = A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z}$

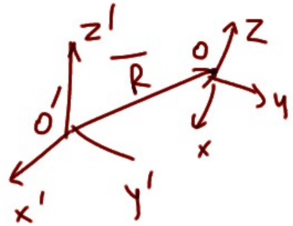
είναι $\dfrac{d\bar{A}}{dt} = \left(\dfrac{d\bar{A}}{dt}\right)_\alpha$ παράγωγος ως προς τον αδρανειακό

$\left(\dfrac{d\bar{A}}{dt}\right)_\sigma$: παράγωγος ως προς τον μη αδρανειακό.

$$\left(\frac{d\bar{A}}{dt}\right)_\alpha = \frac{d}{dt}\left(A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z}\right) = \underbrace{\frac{dA_x}{dx}\hat{x} + \frac{dA_y}{dt}\hat{y} + \frac{dA_z}{dt}\hat{z}}_{\left(\frac{d\bar{A}}{dt}\right)_\sigma} + \underbrace{A_x\overbrace{\frac{d\hat{x}}{dt}}^{\bar{\omega}\times\hat{x}} + A_y\overbrace{\frac{d\hat{y}}{dt}}^{\bar{\omega}\times\hat{y}} + A_z\overbrace{\frac{d\hat{z}}{dt}}^{\bar{\omega}\times\hat{z}}}_{\bar{\omega}\times\left(A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z}\right)}$$

$$\boxed{\left(\frac{d\bar{A}}{dt}\right)_\alpha = \left(\frac{d\bar{A}}{dt}\right)_\sigma + \bar{\omega}\times\bar{A}}$$

$$\vec r\,' = \underbrace{\vec{O'O}}_{\bar R} + \bar r \quad \curvearrowright \quad \bar v_\alpha = \left(\frac{d\bar r\,'}{dt}\right)_\alpha = \left(\frac{d}{dt}\left(\bar R + \bar r\right)\right)_\alpha = \underbrace{\left(\frac{d\bar R}{dt}\right)_\alpha}_{\vec v_o} + \underbrace{\left(\frac{d\bar r}{dt}\right)_\alpha}_{\underbrace{\left(\frac{d\bar r}{dt}\right)_\sigma}_{\bar v_\sigma} + \bar w\times\bar r}$$



$$\left(\frac{d\bar A}{dt}\right)_\alpha = \left(\frac{d\bar A}{dt}\right)_\sigma + \bar w\times\bar A$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\bar v_\alpha = \bar v_o + \bar v_\sigma + \bar w\times\bar r}$$

Παραγωγίζω ξανά:

$$\underbrace{\left(\frac{d\bar v_\alpha}{dt}\right)_\alpha}_{\bar\alpha_\alpha} = \underbrace{\left(\frac{d\bar v_o}{dt}\right)_\alpha}_{\bar\alpha_o} + \underbrace{\left(\frac{d\bar v_\sigma}{dt}\right)_\alpha}_{\underbrace{\left(\frac{d\bar v_\sigma}{dt}\right)_\sigma}_{\bar\alpha_\sigma} + \bar w\times v_\sigma} + \underbrace{\left(\frac{d\bar w}{dt}\right)_\alpha}_{\dot{\bar w}}\times\bar r + \bar w\times\underbrace{\left(\frac{d\bar r}{dt}\right)_\alpha}_{\underbrace{\left(\frac{d\bar r}{dt}\right)_\sigma}_{\bar v_\sigma} + \bar w\times\bar r} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{\bar\alpha_\alpha}_{\Sigma\bar F/m} = \bar\alpha_o + \bar\alpha_\sigma + 2\,\bar w\times\bar v_\sigma + \bar w\times(\bar w\times\bar r) + \dot{\bar w}\times\bar r \quad \Leftrightarrow$$

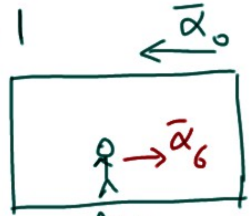
$$\boxed{m\bar\alpha_\sigma = \Sigma\bar F - m\bar\alpha_o \underbrace{- 2m\,\bar w\times\bar v_\sigma}_{\text{Coriolis}} \underbrace{- m\,\bar w\times(\bar w\times\bar r)}_{\text{φυγόκεντρος}} - m\dot{\bar w}\times\bar r}$$

Μη-αδρανειακά συστήματα αναφοράς

Μη-αδρανειακός

Αδρανειακός

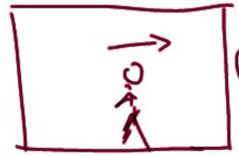
Παρ. 1



τριβές=0

γιατί επιταχύνομαι προς τα εμπρός αφού $\bar F=0$

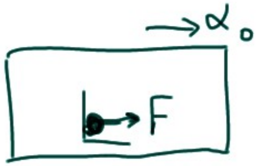
$$m\bar\alpha_\sigma = -m\bar\alpha_0$$



$\bar F = 0$

$v =$ σταθ

Παρ. 2

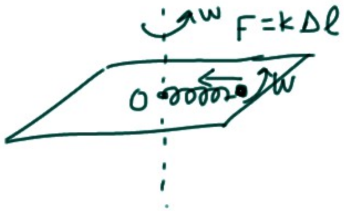


γιατί δεν επιταχύνομαι αφού μου ασκείται $\bar F$

$$m\cancel{\bar\alpha_\sigma}^{0} = \bar F - m\bar\alpha_0$$

$F = m\alpha_0$

Παρ. 3

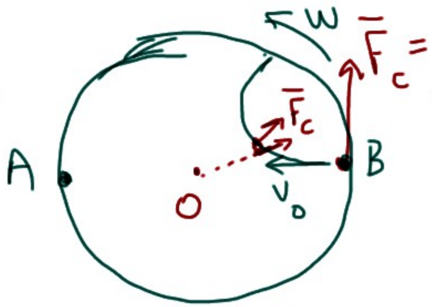


γιατί η m δεν κινείται εφόσον $F=k\Delta l$

$$\cancel{m\bar\alpha_\sigma} = -k\Delta l\,\hat\varpi + \underline{\underline{m\omega^2 \varpi\,\hat\varpi}}$$

$$\underline{\underline{m\omega^2 r = k\Delta l}}$$

Παρ. 4

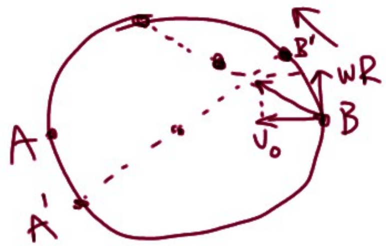


τριβές=0

$$\bar F_c = -2m\bar\omega\times\bar v_\sigma$$

γιατί το m δεν κινείται ευθύγραμμα/ομαλά;

2η άσκηση 4ης εργασίας 2010-2011

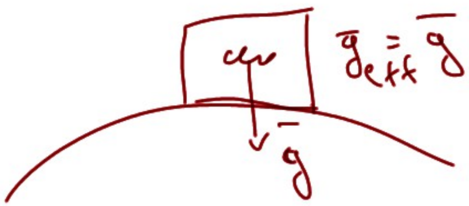


$\bar v =$ σταθ.

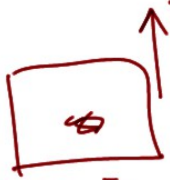
$$m\bar\alpha_\sigma = \Sigma\bar F - m\bar\alpha_0 - 2m\,\bar\omega\times\bar v_\sigma \underbrace{- m\,\bar\omega\times(\bar\omega\times\bar r)}_{m\omega^2\bar r_\perp} - m\dot{\bar\omega}\times\bar r$$

Αρχή της ισοδυναμίας :

$$m\bar{\alpha}_\sigma = \underbrace{-m\bar{\alpha}_0 + m\bar{g}}_{m(\bar{g}-\bar{\alpha}_0) = m\bar{g}_{eff}} + \dots$$



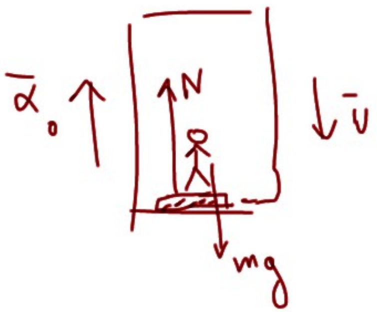
$\bar{g}_{eff} = \bar{g}$



$\bar{\alpha}_0 = -\bar{g}$

$\bar{g} = 0$

$\bar{g}_{eff} = -\bar{\alpha}_0$



$$\cancel{m\bar{\alpha}_\sigma} = -m\bar{\alpha}_0 + m\bar{g} + \bar{N} \Leftrightarrow \bar{N} = m(\bar{\alpha}_0 - \bar{g})$$

$$N = m(\alpha_0 + g) = m\, g_{eff}$$

ISS

$$\cancel{M}\bar{\alpha}_0 = \cancel{M}\bar{g} \Leftrightarrow \bar{\alpha}_0 = \bar{g}$$

$$\cancel{m\bar{\alpha}_\sigma} = \underbrace{-m\bar{\alpha}_0 + m\bar{g}}_{g_{eff} = 0} + \bar{N} \Leftrightarrow N = 0$$

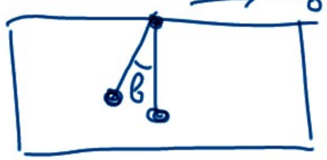
Αυτοκίνητο επιταχύνεται οριζόντια με $\bar{\alpha}_0$, σε οριζόντιο δρόμο.

(α) Ποια η θέση ισορροπίας εκκρεμούς μέσα σ' αυτό;

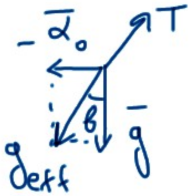
(β) —"— αντίστροφου εκκρεμούς με μπαλόνι ηλίου;

<u>Λύση</u>:

(α)



$$m\cancel{\bar{\alpha}}^{\,0} = -m\bar{\alpha}_0 + m\bar{g} + \bar{T} \Rightarrow -\bar{T} = m(\bar{g} - \bar{\alpha}_0) = m\bar{g}_{eff}$$

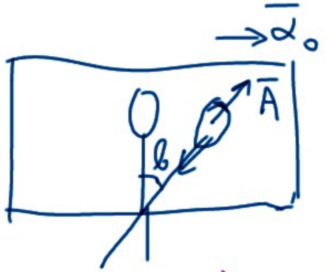


$$\tan\theta = \frac{\alpha_0}{g}$$

$$\left(m\bar{\alpha}_0 = m\bar{g} + \bar{T} \right)$$

(δείτε ερώτημα β θέμα 1, 23/1/2018).

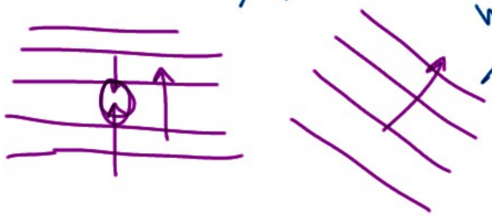
(β)



A = βάρος του εκτοπιζόμενου αέρα > βάρους μπαλονιού

Αντικαθιστώ g με $\bar{g}_{eff} = \bar{g} - \bar{\alpha}_0$

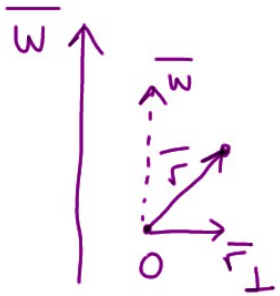
$$m\cancel{\bar{\alpha}}^{\,0} = m\bar{g}_{eff} + \bar{A} + \bar{T}$$



Δυναμικό φυγόκεντρου

$$\bar F_\varphi = -m\,\bar w\times(\bar w\times\bar r) \xlongequal{\bar r=\bar r_\parallel+\bar r_\perp} -m\,\bar w\times(\bar w\times\bar r_\perp) =$$

$$= -m\left[\cancel{(\bar w\cdot\bar r_\perp)}\,\bar w - w^2\,\bar r_\perp\right] = m w^2\,\bar r_\perp = m w^2\,\varpi\,\hat\varpi$$

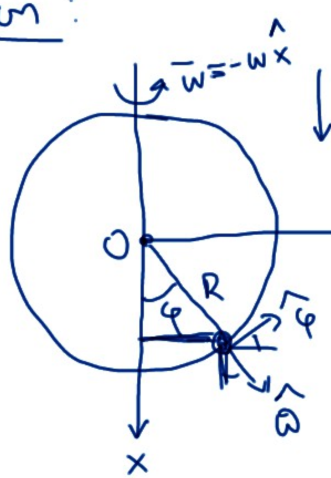


$$\boxed{\text{Αν } w=\text{σταθ τότε } \bar F_\varphi = -\nabla V_\varphi \text{ με } V_\varphi = -\frac{m w^2 r_\perp^2}{2}}$$

Αν οι υπόλοιπες δυνάμεις είναι συντηρητικές (η Coriolis είναι $\perp \bar v_\sigma$ άρα δεν παράγει έργο και είναι τετριμμένα συντηρ.) τότε υπάρχει ολοκλήρωμα "ενέργειας".

Κατακόρυφη στεφάνη ακτίνας R περιστρέφεται γύρω από την κατακόρυφη διάμετρό της με σταθερή $\bar{\omega}$, μέσα σε $\bar{g}$. Δαχτυλίδι είναι περασμένο στη στεφάνη και κινείται χωρίς τριβές:
(α) Εξίσωση κίνησης, (β) Ποια η ενέργεια ως προς αδρανειακό; Είναι σταθερή;
(γ) Ποια τα σημεία ισορροπίας; Ευσταθή; Ασταθή;

Λύση:



$\bar{g}=g\hat{x}$

$$m\bar{\alpha}_\sigma = m\bar{g} + \bar{N} - \cancel{m\bar{\alpha}_0}^{\,0} - \overbrace{2m\bar{\omega}\times\bar{v}_\sigma}^{+2m\omega\hat{x}\times R\dot{\varphi}\hat{\varphi} = 2m\omega R\dot{\varphi}\cos\varphi\,\hat{z}} - \underbrace{m\,\bar{\omega}\times(\omega\times\bar{r})}_{m\omega^2\bar{r}_\perp} - \cancel{m\dot{\bar{\omega}}\times\bar{r}}^{\,0}$$

$$\bar{r} = R\hat{\varpi}\,,\quad \bar{v}_\sigma = R\dot{\varphi}\hat{\varphi}\,,\quad \bar{\alpha}_\sigma = -\dot{\varphi}^2 R\hat{\varpi} + R\ddot{\varphi}\hat{\varphi}$$

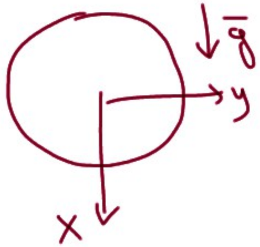
$$\bar{g} = g\hat{x}\,,\quad \bar{\omega} = -\omega\hat{x} \quad \text{με} \quad \hat{x} = \underbrace{(\hat{x}\cdot\hat{\varpi})}_{\cos\varphi}\hat{\varpi} + \underbrace{(\hat{x}\cdot\hat{\varphi})}_{-\sin\varphi}\hat{\varphi}$$

$$\bar{r}_\perp = y\hat{y} \quad \text{με} \quad y = R\sin\varphi \quad \text{και} \quad \hat{y} = \underbrace{(\hat{y}\cdot\hat{\varpi})}_{\sin\varphi}\hat{\varpi} + \underbrace{(\hat{y}\cdot\hat{\varphi})}_{\cos\varphi}\hat{\varphi}$$

Νόμος Νεύτωνα:
$$\begin{cases} \hat{\varpi}: & -R\dot{\varphi}^2 = g\cos\varphi + \dfrac{N_\varpi}{m} + \omega^2 R\sin^2\varphi & (1) \rightsquigarrow \text{δίνει το } N_\varpi \\ \hat{\varphi}: & R\ddot{\varphi} = -g\sin\varphi + \omega^2 R\sin\varphi\cos\varphi & (2) \rightsquigarrow \text{εξίσωση κίνησης} \\ \hat{z}: & 0 = \dfrac{N_z}{m} + 2\omega R\dot{\varphi}\cos\varphi & (3) \rightsquigarrow \text{δίνει το } N_z \end{cases}$$

Αλλιώς: $V_g = -mgx = -mgR\cos\varphi$

N ανεπηρέαστη γιατί $\perp \bar{v}_6$ (ΣΤΟ ΜΗ ΑΔΡΑΝΕΙΑΚΟ)



Coriolis τετριμμένα ανεπηρέαστη

$$V_\varphi = -\frac{m\omega^2}{2}r_\perp^2 = -\frac{m\omega^2}{2}y^2 = -\frac{m\omega^2}{2}R^2\sin^2\varphi$$

$$\bar{v}_6 = R\dot{\varphi}\hat{\varphi} \quad \Rightarrow \quad \frac{mv_6^2}{2} = \frac{mR^2\dot{\varphi}^2}{2}$$

Ολοκλήρωμα "ενέργειας": $$\boxed{\frac{mR^2\dot{\varphi}^2}{2} - mgR\cos\varphi - \frac{m\omega^2}{2}R^2\sin^2\varphi = E} = \text{σταθ}$$

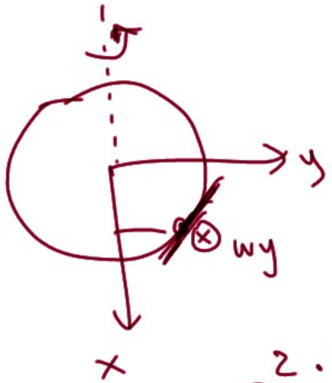
(παραγωγίζοντας βρίσκω την ②)

εξίσωση κίνησης.

(β) $E_\alpha = \frac{m v_\alpha^2}{2} - mgR\cos\varphi$

$$\bar v_\alpha = \cancel{\bar V_{\varpi}} + \bar V_6 + \bar\omega \times \bar r = R\dot\varphi\hat\varphi + \underbrace{(-\omega\hat x)\times R\hat\varpi}_{} = R\dot\varphi\hat\varphi - \omega R\sin\varphi\,\hat z$$

$$\begin{vmatrix} \hat x & \hat y & \hat z \\ -\omega & 0 & 0 \\ R\cos\varphi & R\sin\varphi & 0 \end{vmatrix} \quad \text{ή} \quad \begin{vmatrix} \hat\varpi & \hat\varphi & \hat z \\ -\omega\cos\varphi & \omega\sin\varphi & 0 \\ R & 0 & 0 \end{vmatrix}$$



$$v_\alpha^2 = R^2\dot\varphi^2 + \omega^2 R^2 \sin^2\varphi$$

$$E_\alpha = \frac{mR^2\dot\varphi^2}{2} - mgR\cos\varphi + \frac{m\omega^2R^2\sin^2\varphi}{2} = E + m\omega^2R^2\sin^2\varphi$$

Δεν διατηρείται η E_α.

$$\dot E_\alpha = 2m\omega^2R^2\sin\varphi\cos\varphi\,\dot\varphi$$

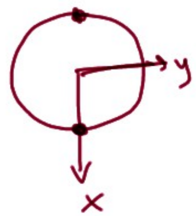
$$\bar N\cdot\bar v_\alpha = (N_\varpi\hat\varpi + N_z\hat z)\cdot(R\dot\varphi\hat\varphi - \omega R\sin\varphi\,\hat z) = -\omega R\sin\varphi\, N_z = \dot E_\alpha$$

αντίδραση της Coriolis

(γ) $\dfrac{mR^2\dot{\varphi}^2}{2} + V(\varphi) = E$ με $V(\varphi) = -mgR\cos\varphi - \dfrac{m\omega^2 R^2 \sin^2\varphi}{2}$

άρτια, περιοδική, τη μελετώ στο $\varphi \in [0,\pi]$

$$V'(\varphi) = mgR\sin\varphi - m\omega^2 R^2 \sin\varphi\cos\varphi = -m\omega^2 R^2 \sin\varphi\left(\cos\varphi - \frac{g}{\omega^2 R}\right)$$

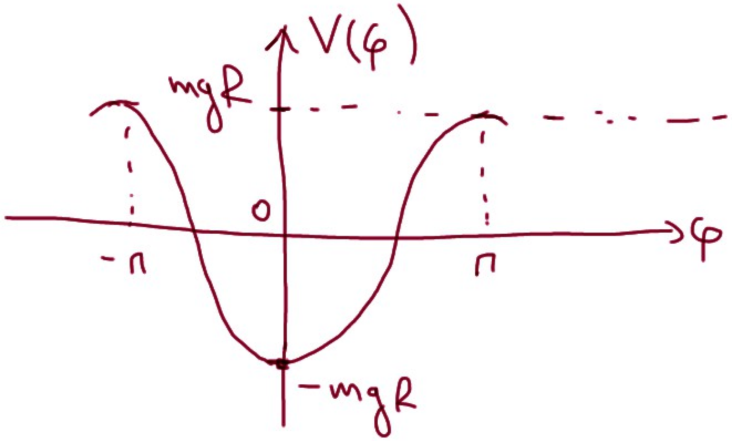


• $\omega^2 < \dfrac{g}{R}$: Η παρένθεση αρνητική οπότε $V' > 0$ παντού στο $(0,\pi)$

και $V' = 0$ στα $\varphi = 0, \pi$.

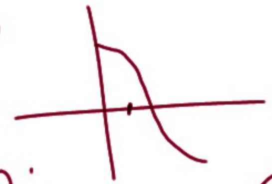
$V'\big|_{\varphi=0^-} < 0$ $\quad V'\big|_{\varphi=0^+} > 0$ άρα το $\varphi = 0$ ελάχιστο → ευσταθές

$V'\big|_{\varphi=\pi^-} > 0$ $\quad V'\big|_{\varphi=\pi^+} < 0$ άρα το $\varphi = \pi$ μέγιστο → ασταθές

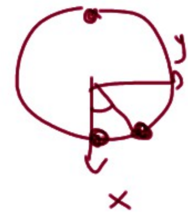


• $\omega^2 > \frac{g}{R}$: Η V' μηδενίζεται στα 0, π, και στο $\cos\varphi_0 = \frac{g}{\omega^2 R} \Leftrightarrow \varphi_0 = \arccos\frac{g}{\omega^2 R}$

Για $\varphi \gtrless \varphi_0 \Leftrightarrow \cos\varphi \lessgtr \cos\varphi_0$ και $V' = -m\omega^2 R^2 \sin\varphi\,(\cos\varphi - \cos\varphi_0) \gtrless 0$

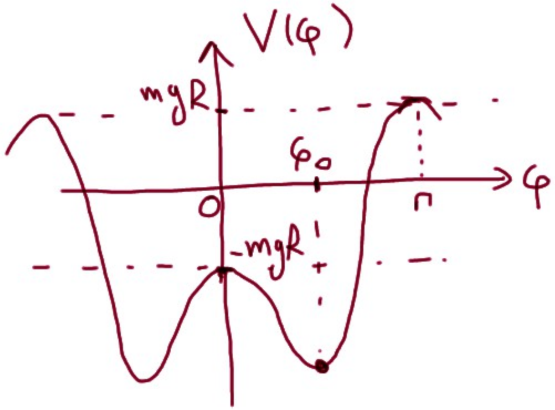


άρα ελάχιστο → ευσταθές

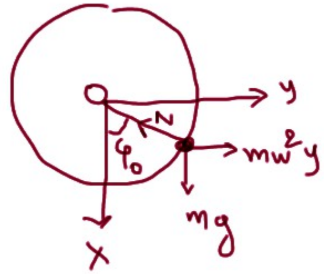


$V'\big|_{\varphi=0^+} < 0$, $V'\big|_{\varphi=0^-} > 0$ άρα $\varphi = 0$ μέγιστο → ασταθές

$V'\big|_{\varphi=\pi^+} < 0$, $V'\big|_{\varphi=\pi^-} > 0$ άρα $\varphi = \pi$ μέγιστο → ασταθές

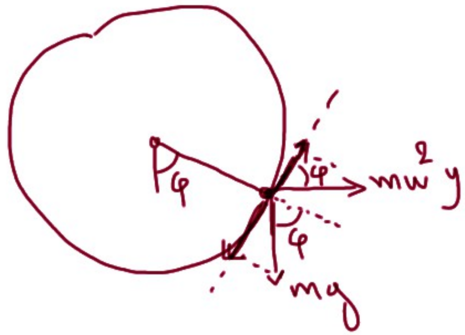


Αλλιώς:



$$\left.\begin{aligned} N\sin\varphi_0 &= m\omega^2 y \quad (y \to R\sin\varphi_0) \\ N\cos\varphi_0 &= mg \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\cos\varphi_0 = \frac{g}{\omega^2 R}$$



$$\bar{F}_\varphi \cdot \hat{\varphi} = m\omega^2 y\cos\varphi = m\omega^2 R\sin\varphi\cos\varphi$$

$$\overline{mg} \cdot \hat{\varphi} = -mg\sin\varphi$$